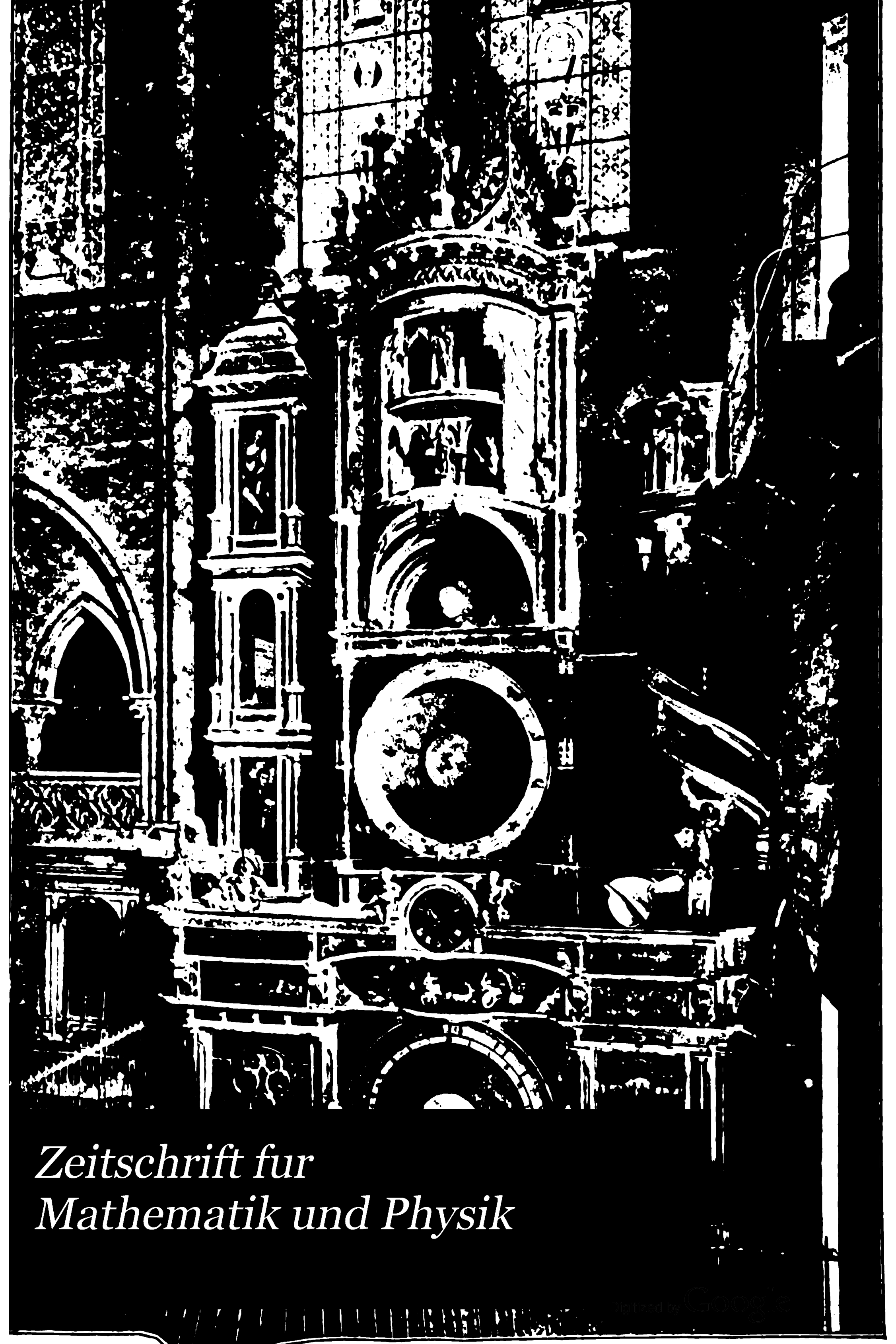
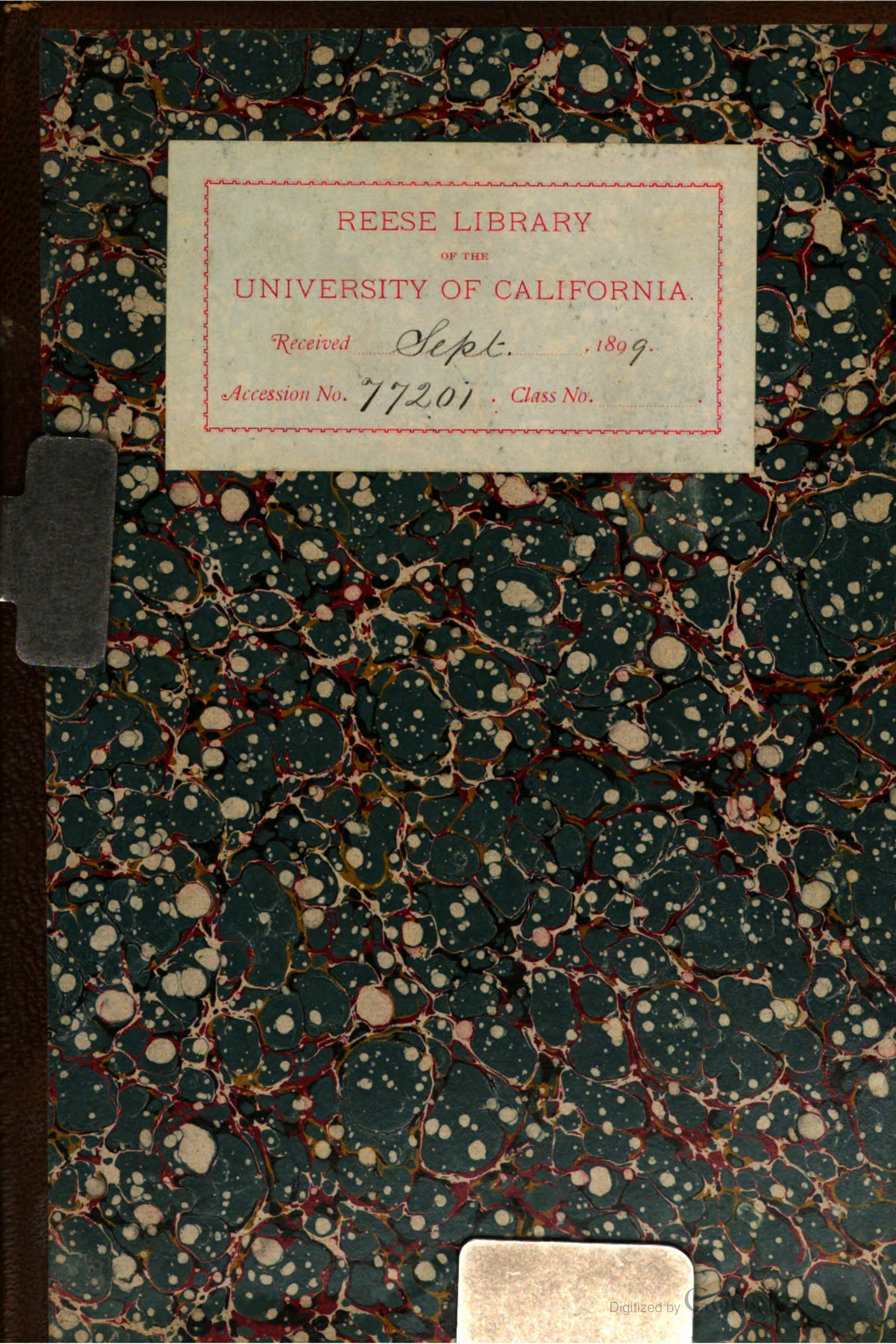

Zeitschrift fur
Mathematatik und Physik


REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
Received Sept. , 1899.
Accession No. 77201 . Class No. .



# Zeitschrift

für

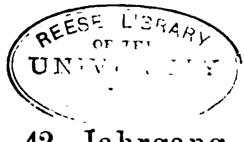
# Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaktion

von

**Dr. R. Mehmke** und **Dr. M. Cantor.**




42. Jahrgang.

Mit in den Text gedruckten Figuren und drei lithographierten Tafeln.

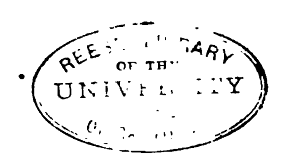


Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1897.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.



# Inhalt.

## Arithmetik und Analysis.

Seite



## Synthetische, darstellende und analytische Geometrie.



## Graphisches Rechnen. Zeichenapparate.

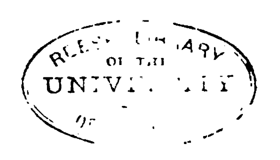
### Mechanik (einschl. Kinematik).



### Elastizitäts- und Festigkeitslehre.



### Physik.



# An die Herren Mitarbeiter und Leser!

Bei Beendigung des vorliegenden Bandes der „Zeitschrift für Mathematik und Physik“ empfinde ich es als eine angenehme Pflicht, den verehrten Mitarbeitern für ihre mir so wertvolle Unterstützung meinen aufrichtigen Dank zu sagen. Möchte mir dieselbe auch künftig in gleichem Maße zu teil werden!

Als ich nach dem bedauerlichen Rücktritte des hochverdienten Begründers dieser Zeitschrift, des Herrn Geheimrat Schlömilch, die Leitung des ersten Teiles derselben übernahm, geschah es mit der Absicht, der Zeitschrift allmählich eine entschiedene Richtung nach der Seite der angewandten Mathematik zu geben. Es hatte ja bis dahin an einem Organ für die mathematische Exekutive (um einen Ausdruck des Herrn Klein zu gebrauchen), wie für die Anwendungen der Mathematik im allgemeinen und auf Probleme der Technik im besonderen gefehlt, und wenn die in den letzten Jahren mehrfach zu Tage getretenen Bemühungen, ein solches ins Leben zu rufen, trotz des von allen Seiten anerkannten Bedürfnisses ohne Erfolg geblieben waren, so durfte daraus wohl die Lehre gezogen werden, dass es besser sei, an eine bestehende Zeitschrift anzuknüpfen, als den in so übergrosser Zahl vorhandenen mathematischen Zeitschriften eine neue hinzuzufügen. Es erschien aber auch „Schlömilchs Zeitschrift“ hierzu besonders geeignet, weil darin das numerische Rechnen, die darstellende Geometrie mit Schattenkonstruktion und Perspektive, die Kinematik etc. von jeher gepflegt worden sind, mithin zwar das bisherige Gebiet durch Einbeziehung der technischen Mechanik (im weitesten Sinne) erweitert werden musste, sonst aber in der Hauptsache nur schon Bestehendes auszubauen und zu vertiefen war. Hierauf besonders hinzuweisen, wurde aus verschiedenen Gründen bis jetzt unterlassen, erscheint aber nunmehr geboten, nachdem mehrere namhafte Techniker sowohl als auf den bezeichneten Gebieten thätige Mathematiker als Mitarbeiter gewonnen sind und so die Durchführung jener Absicht als gesichert anzusehen, auch in dem jetzt abgeschlossenen Bande bereits dieser und jener Schritt in der angestrebten Richtung zu bemerken ist.

Es erübrigt noch, einige damit im Zusammenhang stehende besondere Maßnahmen zu erwähnen. Vom nächsten Bande an sollen

regelmässig Verzeichnisse der in technischen Zeitschriften erschienenen Abhandlungen mit vorwiegend mathematischem oder physikalischem Inhalte gebracht werden, wozu die Verlagsbuchhandlung mit dankenswerter Bereitwilligkeit den nötigen Raum zur Verfügung gestellt hat. Ferner beabsichtige ich, die Leser der Zeitschrift über die neuesten Fortschritte auf dem Gebiete der Rechen- und Zeichen-Apparate auf dem Laufenden zu erhalten und zur Verbreitung der neueren Methoden des graphischen Rechnens, insbesondere der Herstellung graphischer Tafeln, nach Kräften beizutragen. Wie schon in diesem Bande versuchsweise geschehen ist, sollen auch künftig aus der Praxis stammende Aufgaben gestellt werden, nicht bloss um die Mathematiker überhaupt zur Beschäftigung mit solchen anzuregen, sondern um dieselben der Lösung entgegenzuführen, wenn letztere für die Technik ein wirkliches Bedürfnis ist, aber besondere mathematische Kenntnisse und Gewandtheit in der Handhabung mathematischer Werkzeuge erfordert, also die Mitwirkung der Mathematiker von Fach wünschenswert erscheinen lässt.

Es versteht sich von selbst, dass bei alledem die reine Mathematik nicht ausgeschlossen zu werden braucht und den Bedürfnissen des Unterrichts eher in erhöhtem Maße Rechnung getragen werden kann.

Stuttgart, Ende 1897.

**R. Mehmke.**

## Studien zu Raabe's Monographie über die Jacob-Bernoullische Funktion.

Von

Prof. Dr. Louis Saalschütz

in Königsberg in Pr.

Die nachfolgende Arbeit knüpft an das grundlegende Werk Raabe's: „Die Jacob-Bernoullische Funktion" (Zürich 1848) an. In § 1 wird die Reihe, von welcher Raabe ausgeht [$\Phi(x)$ Gleichung 1), welche ich später mitunter die Raabesche Reihe nenne], in eine andere umgeformt, welche um $x = 1$ herum brauchbar ist, und es wird die von Raabe unternommene Bestimmung ihres Grenzwertes für $x = 1$ dadurch wesentlich verkürzt. In § 2 wird eine Gleichung des genannten Werkes, deren rechte Seite einen bestimmten Wert besitzt, während auf der linken Seite ein Integral von völlig unbestimmtem Werte steht, verbessert und verallgemeinert. In § 3 endlich wird die Raabesche Reihe summiert, das heisst in einen geschlossenen Ausdruck umgewandelt.

### § 1.

Raabe führt die Bernoullische Funktion gelegentlich der Betrachtung folgender Reihe, die wir mit $\Phi(x)$ bezeichnen wollen, in die Analysis ein:

$$1)\begin{cases} \Phi(x) = \\ a_1 + 2^m a_2 x + 3^m a_3 x^2 + \cdots + p^m a_p x^{p-1} \\ +(p+1)^m a_1 x^p + (p+2)^m a_2 x^{p+1} + (p+3)^m a_3 x^{p+2} + \cdots + (p+p)^m a_p x^{2p-1} \\ +(2p+1)^m a_1 x^{2p} + (2p+2)^m a_2 x^{2p+1} + (2p+3)^m a_3 x^{2p+2} + \cdots + (2p+p)^m a_p x^{3p-1} \\ + \text{etc. in infin.} \end{cases}$$

Darin ist $m$ eine positive ganze Zahl; auch $x$ werde als positiv angenommen, dann konvergiert jede der vertikalen Teilreihen und

somit auch $\Phi(x)$, so lange $x$ ein echter Bruch ist. Wird nun, wie es geschehen soll, den $a_k$ die Bedingung auferlegt:

$$\text{2)} \qquad \sum_1^p {}_k\, a_k = 0,$$

so hat auch $\lim\limits_{x=1} \Phi(x)$ einen bestimmten Wert, und dieser wird, ziemlich weitläufig, von Raabe abgeleitet. Wir wollen nun $\Phi(x)$ oder vielmehr $x\Phi(x)$ in eine nach Potenzen von $lx$ fortschreitende Reihe umwandeln, welche um $x = 1$ herum zwischen meist engen, aber nicht zusammenfallenden Grenzen konvergiert. Wir benutzen dabei einen von Herrn Schlömilch bei seiner Methode, die Bernoullischen Funktionen (abgekürzt: B.F.) und die auf sie bezüglichen Sätze abzuleiten, ausgesprochenen Gedanken, indem wir $\Phi(x)$ als Differentialquotienten darstellen. — Soll der, zunächst hypothetisch vorausgesetzte, aber später (in § 3) wirklich hergestellte geschlossene Ausdruck, dessen Entwickelung unter Voraussetzung von 2) und für $x < 1$ die Reihe $\Phi(x)$ ergiebt, verstanden werden, so soll dafür die Bezeichnung $F(x)$ gebraucht werden.

Der Koeffizient von $a_k$ in $\Phi(x)$:

$$\{k^m + (p+k)^m x^p + (2p+k)^m x^{2p} + \cdots\} x^{k-1}$$

ist, mit Benutzung des Zeichens $D_v^m$ für $\frac{d^m}{dv^m}$:

$$\text{3)} \qquad \begin{cases} = \dfrac{1}{x} D_v^m (e^{kv} + e^{(p+k)v} x^p + e^{(2p+k)v} x^{2p} + \cdots)\, x^k_{v=0}, \\[2ex] = \dfrac{1}{x} D_v^m \left(\dfrac{e^{kv} x^k}{1 - e^{pv} x^p}\right)_{v=0} = \dfrac{1}{x} D_v^m \left(\dfrac{e^{k(v+lx)}}{1 - e^{p(v+lx)}}\right)_{v=0} \end{cases}$$

Setzen wir nun:

$$\text{4)} \qquad V = \frac{p(v+lx)}{e^{p(v+lx)} - 1},$$

$$\text{5)} \qquad U = \frac{a_1 e^{v+lx} + a_2 e^{2(v+lx)} + \cdots + a_p e^{p(v+lx)}}{(v+lx)},$$

so wird nach 3):

$$\text{6)} \qquad px\Phi(x) = -D_v^m (VU)_{v=0} \qquad 0 \leq x < 1.$$

Dass $x$ bis 0 hinuntergehen darf, folgt aus der Form des Produktes:

$$\frac{1}{x} VU = p\, \frac{a_1 e^v + a_2 e^{2v} x + \cdots + a_p e^{pv} x^{p-1}}{e^{pv} x^p - 1};$$

aber die Differentialquotienten auf der rechten Seite von 6) sind für jeden endlichen Wert von $x$ (auch für $v = 0$ und über $lx = 0$ hinweg) stetig. Dies ergiebt sich (für $x > 0$) ohne Schwierigkeit mittelst der Reihenentwickelungen [für $U$ mit Rücksicht auf 2)]:

$$U = \sum_0^\infty {}_k\, P_{k+1} \frac{(v+lx)^k}{(k+1)!},$$

worin:

$$P_{k+1} = a_1 + 2^{k+1}a_2 + \cdots + p^{k+1}a_p;$$

$$\frac{1}{V} = z = \sum_0^\infty {}_k \frac{p^k(v+lx)^k}{(k+1)!},$$

wenn man sich der Formel:

$$D_v^n(z^{-1}) = -\frac{(n+1)_2}{z^2} D_v^n z + \frac{(n+1)_3}{z^3} D_v^n z^2 \mp \cdots \pm \frac{(n+1)_{n+1}}{z^{n+1}} D_v^n z^n$$

erinnert. Wir erhalten somit $F(x)$ als stetige Funktion, wenn wir sie durch die Gleichung:

$$7) \qquad -px\,F(x) = D_v^m(VU)_{v=0}$$

definieren.

Mit Benutzung von 2) folgt hieraus:

$$-px\,F(x) = \sum_1^{p-1} {}_k\, a_k D_v^m \left( \frac{p(v+lx)}{e^{p(v+lx)}-1} \cdot \frac{e^{k(v+lx)} - e^{p(v+lx)}}{v+lx} \right)_{v=0}$$

$$= \sum_1^{p-1} {}_k\, a_k D_v^m \left( \frac{p(v+lx)}{e^{p(v+lx)}-1} \cdot \frac{e^{k(v+lx)}-1}{v+lx} \right)_{v=0}$$

(unter Voraussetzung von $m > 0$) oder endlich:

$$8) \qquad -x\,F(x) = \sum_1^{p-1} {}_k\, a_k D_v^m \left( \frac{e^{\frac{k}{p}p(v+lx)} - 1}{e^{p(v+lx)}-1} \right)_{v=0}$$

worin nun die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_{p-1}$ voneinander vollkommen unabhängig sind. Hieraus folgt für $x = 1$:

$$-F(1) = -\lim_{x=1} \Phi(x) = \sum_1^{p-1} {}_k\, a_k D_v^m \left( \frac{e^{\frac{k}{p}\cdot pv} - 1}{e^{pv}-1} \right)_{v=0}$$

oder wenn

$$9) \qquad \frac{k}{p} = z$$

und $pv = w$ gesetzt wird:

$$10) \qquad -F(1) = -\lim_{x=1} \Phi(x) = p^m \sum_1^{p-1} {}_k\, a_k D_w^m \left( \frac{e^{zw}-1}{e^w - 1} \right)_{w=0}$$

Der rechts stehende Differentialquotient ist der Schlömilchsche Ausdruck für die B. F. in der Form, wie sie von Raabe eingeführt worden ist, und soll nach dem Vorgang von Herrn Hermite durch $S_m(z)$ bezeichnet werden.

In der Gleichung 10) kann die Summation nach $k$ auch bis $p$ ausgedehnt werden, weil $S_m(1) = 0$ ist, und sie giebt dann genau das von Raabe gefundene Resultat.

Setzen wir nun:

$$11) \qquad lx = u, \quad -x\,F(x) = \psi(u),$$

so ist nach 8):

$$\psi^{(n)}(0) = \sum_{1}^{p-1}{}_k\, a_k \frac{d^n}{du^n}\left\{\frac{d^m}{dv^m}\left(\frac{e^{zp(v+u)}-1}{e^{p(v+u)}-1}\right)_{v=0}\right\}_{u=0}$$

$$= \sum_{1}^{p-1}{}_k\, a_k \frac{d^{m+n}}{d(u+v)^{m+n}}\left(\frac{e^{zp(v+u)}-1}{e^{p(v+u)}-1}\right)_{u+v=0}$$

$$= \sum_{1}^{p-1}{}_k\, a_k p^{m+n} S_{m+n}\left(\frac{k}{p}\right)$$

und somit ist der Mac-Laurinschen Reihe gemäss:

$$12)\quad \begin{cases} -x\,F(x) = \sum_{1}^{p-1}{}_k\, a_k \cdot p^m \left\{ S_m\left(\frac{k}{p}\right) + S_{m+1}\left(\frac{k}{p}\right)\frac{plx}{1} \right. \\ \left. \qquad + S_{m+2}\left(\frac{k}{p}\right)\frac{(plx)^2}{2!} + S_{m+3}\left(\frac{k}{p}\right)\frac{(plx)^3}{3!} + \cdots \right\}. \end{cases}$$

Dies ist die gesuchte Entwickelung und ihre Gültigkeit an die Bedingung:

$$13)\quad |lx| < \frac{2\pi}{p}$$

oder

$$14)\quad e^{-\frac{2\pi}{p}} < x < e^{\frac{2\pi}{p}}$$

gebunden. Man erkennt dies entweder vermöge einer Darstellung der rechten Seite von 7) als Summe von Produkten unendlicher Reihen, deren langsamer konvergierende (das ist $V$ und seine Ableitungen) von

$$lx = -\frac{2\pi}{p} \quad \text{bis} \quad lx = +\frac{2\pi}{p}$$

mit Ausschluss der Grenzen konvergent sind, oder einfacher aus der Natur der Funktion $F(x)$ selbst. Dieselbe ist nämlich, wie sich in § 3 zeigen wird [siehe daselbst die Gleichung 31) oder die bald darauf hervorgehobene Stelle], eine rationale gebrochene Funktion, deren Nenner eine Potenz von $\frac{1-x^p}{1-x}$ oder, mittelst der Substitution $lx = u$, von $\frac{1-e^{pu}}{1-e^u}$ ist; wird sie also nach Potenzen von $u$ entwickelt, so konvergiert sie bis zu dem Absolutwert desjenigen $u$, für welches $1-e^{pu}$, mit Ausschluss von $u=0$, zum ersten Mal verschwindet, das ist, wegen

$$1 - e^{\pm 2i\pi} = 0, \quad \text{bis} \quad u = \frac{2\pi}{p}.$$

An die Gleichung 12) knüpfen sich noch zwei Bemerkungen:

1. Nehmen wir $x < 1$ an, so hat die, dann mit $F(x)$ äquivalente, Reihe $\Phi(x)$ mit der rechten Seite von 12) die Strecke für $x$ von $e^{-\frac{2\pi}{p}}$ bis 1 (mit Ausschluss der Grenzen) als eine solche gemeinsam, auf welcher beide Reihen konvergieren; folglich ist auch die Gleichung:

$$15)\qquad -x\,\Phi(x) = p^m \sum_1^p {}_k\, a_k \left\{ S_m\left(\frac{k}{p}\right) + S_{m+1}\left(\frac{k}{p}\right)\frac{plx}{1} + \cdots \right\}$$

$$e^{-\frac{2\pi}{p}} < x < 1$$

richtig.

2. Setzt man $x = 1 + \xi$, so ist:

$$F(1+\xi) = F(1) + \xi F'(1) + \frac{\xi^2}{2!}F''(1) + \cdots$$

und nun kann man die Koeffizienten dieser Reihe mittelst 12), deren rechte Seite den Gleichungen 11) gemäss als $\psi(lx)$ zu bezeichnen ist, finden; es ist nämlich:

$$-\left[F^{(n)}(1) + nF^{(n-1)}(1)\right] = \left[D_x^n \psi(lx)\right]_{lx=0}$$

und hieraus:

$$-F^{(n)}(1) = \left[D_x^n\psi(lx) - nD_x^{n-1}\psi(lx) + n(n-1)D_x^{n-2}\psi(lx) \mp \cdots + (-1)^{n-1}n \ldots 2 D_x\psi(lx) + (-1)^n n \ldots 1\psi(lx)\right]_{lx=0}.$$

Mittelst der bekannten Formel*

$$\begin{cases} D_x^h\psi(lx) = \frac{1}{x^h} \\ \left\{\psi^{(h)}(lx) - C_1^h\psi^{(h-1)}(lx) + C_2^h\psi^{(h-2)}(lx) \mp \cdots + (-1)^{h-1}C_{h-1}^h\psi'(lx)\right\}, \end{cases}$$

worin $C_1^h$, $C_2^h \ldots$ die Fakultätenkoeffizienten sind, von denen

$$C_0^h = 1, \quad C_{h-1}^h = (h-1)!$$

sind, und der leicht beweisbaren Gleichung:

$$C_k^n + nC_{k-1}^{n-1} + n(n-1)C_{k-2}^{n-2} + \cdots + n(n-1)\ldots(n-k+1)C_0^{n-k} = C_k^{n+1}$$

ergiebt sich nunmehr:

$$16)\begin{cases} -F^{(n)}(1) = \psi^{(n)}(0) - C_1^{(n+1)}\psi^{(n-1)}(0) + C_2^{n+1}\psi^{(n-2)}(0) \mp \cdots \\ \qquad + (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n+1}\psi'(0) + (-1)^n n(n-1)\ldots 1\psi(0) \\ \qquad = \sum_1^{p-1}{}_k\, a_k\left\{S_{m+n}\left(\frac{k}{p}\right)p^{m+n} - C_1^{n+1}S_{m+n-1}\left(\frac{k}{p}\right)p^{m+n-1} \pm \cdots \right. \\ \qquad \left. + (-1)^n C_n^{n+1} S_m\left(\frac{k}{p}\right)p^m\right\}, \end{cases}$$

wo auch bis $p$ summiert werden darf. Der Radius des Konvergenzkreises ist, wie aus der Natur der Funktion hervorgeht, $2\sin\frac{\pi}{p}$; denn dies ist der Modul desjenigen $\xi$, für welches $\frac{(1+\xi)^p - 1}{\xi}$ zum ersten Mal verschwindet.

---

* Siehe **Schlömilchs** Compendium der höheren Analysis, 2. Bd. 1. Abhdlg., woselbst auch die Werte der Fakultätenkoeffizienten angegeben sind.

## § 2.

Im ersten Abschnitt der in Rede stehenden Monographie betont Raabe wiederholentlich, er wolle den Wert der oben [Gleichung 1)] mit $\Phi(x)$ bezeichneten Reihe an der Grenze der Konvergenz, wenn $x$ noch um unendlich wenig von der Einheit übertroffen werde, bestimmen. Dennoch begegnet es ihm im dritten Abschnitt, dass er seine, für $x=1$ selbst, vollkommen unbestimmte Reihe,

wie etwa die Reihe $1-2x+3x^2-4x^3 \pm \cdots$ für $x=1$,

in ein Integral umbildet, ohne, wie es scheint, zu merken, dass dieses auch ganz unbestimmt sein muss, wie es z. B. das in der Anwendung auftretende

$$\int_0^\infty v^m \sin^{2n+1} v\, dv$$

[a.a.O. S 40 flg. Gleichungen 7) und 10)] in der That ist.

Diese ungenauen Resultate sollen im folgenden präzisiert und mit Hilfe von 12) verallgemeinert werden. Wir setzen, wobei bis auf den fraglichen Punkt die von Raabe benutzte Methode reproduziert wird, $a_k$ gleich einer periodischen Funktion, nämlich, wenn wir unter $a$, $b$ und $r$ positive rationale Zahlen der Art verstehen, dass $ra$ und $rb$ ganze Zahlen sind:

$$a_k = \varphi(\sin k\, a\delta,\ \cos k\, b\delta)\delta^{m+1}; \tag{17}$$

darin soll $\delta$ unendlich klein, ferner $p$ unendlich gross und

$$p\delta = 2r\pi \tag{18}$$

sein, sodass die Vermehrung des Index $k$ von $a_k$ um ein Vielfaches von $p$ den Wert von $a_k$ ungeändert lässt. Dadurch wird:

$$x\, \Phi(x) = \sum_1^\infty{}_k\, a_k k^m x^k = \sum_1^\infty{}_k\, a_k\, k^m\, e^{klx}.$$

Jetzt liege $x$ sehr wenig unterhalb 1, und sei:

$$lx = -\varepsilon = -\varrho\delta,$$

wobei $\varrho$ eine positive endliche Zahl ist; ferner sei:

$$k\delta = v;$$

dann ist:

$$klx = -\varrho v, \quad plx = -2r\pi\varrho.$$

Und nun geht $x\, \Phi(x)$ in ein Integral über:

$$x\, \Phi(x) = \int_0^\infty v^m\, \varphi(\sin a v,\ \cos b v) e^{-\varrho v} dv. \tag{19}$$

Wollen wir nun die Gleichung 15) anwenden, so müssen die $a_k$ der Bedingung 2) genügen, das heisst es muss, mit Fortlassung des sehr kleinen, aber nicht verschwindenden Faktors $\delta^m$:

$$20)\qquad \int_0^{2r\pi} \varphi(\sin av,\ \cos bv)dv = 0$$

sein.

Ferner ist die rechte Seite von 15):

$$\left\{\begin{array}{l} \int_0^{2r\pi} \varphi(\sin av,\ \cos bv)(2r\pi)^m \\ \left\{S_m\left(\frac{v}{2r\pi}\right) - \frac{2r\pi\varrho}{1} S_{m+1}\left(\frac{v}{2r\pi}\right) + \frac{(2r\pi\varrho)^2}{1\cdot 2} S_{m+2}\left(\frac{v}{2r\pi}\right) \mp \cdots\right\} dv, \end{array}\right.$$

wobei jetzt die Klammer unter der Bedingung

$$r\varrho < 1$$

konvergiert, oder vermöge der Substitution

$$v = 2r\pi z$$

auch:

$$\int_0^1 \varphi(\sin 2ra\pi z,\ \cos 2rb\pi z)(2r\pi)^{m+1}\left\{S_m(z) - \frac{2r\pi\varrho}{1} S_{m+1}(z) + \cdots\right\}\cdot\cdot$$

Ist nun also $\varphi$ eine Funktion, die der Bedingung 20) genügt, so gilt nach 15) die Gleichung:

$$21)\left\{\begin{array}{l} -\int_0^\infty v^m \varphi(\sin av,\ \cos bv)e^{-\varrho v}dv = (2r\pi)^{m+1} \\ \times\int_0^1 \varphi(\sin 2ra\pi z,\ \cos 2rb\pi z) \\ \times\left\{S_m(z) - \frac{2r\pi\varrho}{1!} S_{m+1}(z) + \frac{(2r\pi\varrho)^2}{2!} S_{m+2}(z) - \frac{(2r\pi\varrho)^3}{3!} S_{m+3}(z) \pm \cdots\right\} dz \end{array}\right.$$

$$0 < r\varrho$$

und im besonderen:

$$22)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\varrho=0} \int_0^\infty v^m \varphi(\sin av,\ \cos bv)e^{-\varrho v}dv = -(2r\pi)^{m+1} \\ \qquad \times\int_0^1 \varphi(\sin 2ra\pi z,\ \cos 2rb\pi z)S_m(z)dz. \end{array}\right.$$

Dies ist die verbesserte Raabe'sche Gleichung [S. 38, Gleichungen 4) bis 6)], während 21) eine Verallgemeinerung derselben ist.

Von den a. a. O. gegebenen Beispielen nehme ich folgende besonders einfache heraus:

$$\varphi(\sin av,\ \cos bv) = \sin v,\ r = 1$$

und

$$\varphi(\sin av,\ \cos bv) = \cos v,\ r = 1.$$

Beide genügen der Bedingung 20) und es gelten nun nach den von Raabe angegebenen Formeln:

$$\int_0^1 S_{2m}(z)\sin(2\pi z)\,dz = \frac{(-1)^{m+1}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}},\quad \int_0^1 S_{2m+1}(z)\sin(2\pi z)\,dz = 0,$$

$$\int_0^1 S_{2m+1}(z)\cos(2\pi z)\,dz = \frac{(-1)^m(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}},\quad \int_0^1 S_{2m}(z)\cos(2\pi z)\,dz = 0$$

folgende Gleichungen:

$$23)\quad \begin{cases} \int_0^\infty v^{2m}\sin v e^{-\varrho v}dv = (-1)^m(2m)! \\ \times\left\{1-\frac{(2m+1)(2m+2)}{2!}\varrho^2+\frac{(2m+1)\dots(2m+4)}{4!}\varrho^4\mp\cdots\right\}, \\ \int_0^\infty v^{2m-1}\sin v e^{-\varrho v}dv = (-1)^{m-1}(2m-1)! \\ \times\left\{\frac{2m}{1}\varrho-\frac{(2m)\dots(2m+2)}{3!}\varrho^3+\frac{(2m)\dots(2m+4)}{5!}\varrho^5\mp\cdots\right\}. \end{cases}$$

$$24)\quad \begin{cases} \int_0^\infty v^{2m}\cos v e^{-\varrho v}dv = (-1)^m(2m)! \\ \times\left\{\frac{2m+1}{1}\varrho-\frac{(2m+1)\dots(2m+3)}{3!}\varrho^3+\frac{(2m+1)\dots(2m+5)}{5!}\varrho^5\mp\cdots\right\}, \\ \int_0^\infty v^{2m-1}\cos v e^{-\varrho v}dv = (-1)^m(2m-1)! \\ \times\left\{1-\frac{2m(2m+1)}{2!}\varrho^2+\frac{(2m)\dots(2m+3)}{4!}\varrho^4\mp\cdots\right\} \end{cases} \quad 0<\varrho<1.$$

und im besonderen:

$$25)\quad \begin{cases} \lim_{\varrho=0}\int_0^\infty v^{2m}\sin v e^{-\varrho v}dv = (-1)^m(2m)! \\ \lim_{\varrho=0}\int_0^\infty v^{2m-1}\sin v e^{-\varrho v}dv = 0,\ \text{etc.} \end{cases}$$

Man kann diese vier Integrale auch direkt behandeln und erhält dann die Resultate in geschlossenen Ausdrücken. Diese, sowie die rechten Seiten der Gleichungen 23) und 24) gehen bei der Substitution

$$\varrho = \operatorname{tg}\alpha$$

beziehungsweise in folgende trigonometrische Ausdrücke über:

$$(-1)^m(2m)!\ \cos^{2m+1}\alpha\cos(2m+1)\alpha,$$
$$(-1)^{m-1}(2m-1)!\ \cos^{2m}\alpha\sin 2m\alpha;$$
$$(-1)^m(2m)!\ \cos^{2m+1}\alpha\sin(2m+1)\alpha,$$
$$(-1)^m(2m-1)!\ \cos^{2m}\alpha\cos 2m\alpha.$$

In dieser Form gelten die Gleichungen 23) und 24), der Stetigkeit beider Seiten wegen, für jedes $\alpha$ zwischen Null und $\frac{\pi}{2}$ mit Einschluss

beider Grenzen, wenn für die untere (Null) das Zeichen lim, wie in 25) geschehen, gebraucht wird.

Schliesslich möge bemerkt werden, dass diejenigen Resultate in Raabe's Buch, welche durch Elimination der linken Seite von 22) entstehen, wieder richtig sind.

§ 3.

Wir gehen jetzt an die Aufgabe, die Funktion $F(x)$ in geschlossener fertiger Form darzustellen. Allerdings hat Raabe schon angegeben, wie man zu einem solchen Ausdruck gelangen könnte,* doch ist dies Verfahren rekursiv und verlangt überdies, um überflüssige Faktoren fortzuschaffen, die Division von Zähler und Nenner des auf den Nenner $(1-x^p)^{m+1}$ gebrachten Ausdrucks durch $(1-x)^{m+1}$.

Man könnte aber in Ermangelung eines besseren Weges folgendermassen verfahren. Nach 8) ist:

$$26) \qquad -x\,F(x) = \sum_1^{p-1}{}_k\, a_k D_v^m \left(\frac{e^{k(v+lx)}-1}{e^{p(v+lx)}-1}\right)_{v=0}$$

oder da, wenn

$$lx = u$$

gesetzt wird, die Differentiationen nach $u$ statt nach $v$ ausgeführt werden dürfen, und daher schon vor der Differentiation $v=0$ gesetzt werden darf:

$$27) \quad \begin{cases} -x\,F(x) = \sum_1^{p-1}{}_k\, a_k D_u^m \left(\frac{e^{ku}-1}{e^{pu}-1}\right) \\ \qquad = \sum_1^{p-1}{}_k\, a_k D_u^m \left(\frac{1+e^u+e^{2u}+\cdots+e^{(k-1)u}}{1+e^u+e^{2u}+\cdots+e^{(p-1)u}}\right). \end{cases}$$

Führt man jetzt die Bezeichnungen:

$$28) \quad \begin{cases} a_1+a_2+\cdots+a_{p-1} = \alpha_1 \\ a_2+\cdots+a_{p-1} = \alpha_2 \\ a_h+\cdots+a_{p-1} = \alpha_h \\ a_{p-1} = \alpha_{p-1} \end{cases}$$

ein, so ist:

---

* Bezeichnet man (Raabe a. a. O. S. 4 und 10):

$$X_m = a_1 + 2^m a_2 x + 3^m a_3 x^2 + \cdots + p^m a_p x^{p-1},$$

also insbesondere

$$X_0 = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_p x^{p-1},$$

und $F(x)$ für $m = 0, 1, \ldots m$ mit bez. $Y_0, Y_1, \ldots Y_m$, so ist:

$$Y_0 = \frac{X_0}{1-x^p}$$

und

$$Y_m = \frac{X_m}{1-x^p} + (m)_1\, p x^p \frac{Y_{m-1}}{1-x^p} + (m)_2\, p^2 x^p \frac{Y_{m-2}}{1-x^p} + \cdots + (m)_{m-1}\, p^{m-1} x^p \frac{Y_1}{1-x^p} + p^m \frac{Y_0}{1-x^p}.$$

$$29)\quad -x\,F(x) = \sum_{0}^{p-2} {}_k\, \alpha_{k+1} D_u^m \left(\frac{e^{ku}}{1+e^u+e^{2u}+\cdots+e^{(p-1)u}}\right),$$

worin die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-1}$ voneinander ebenso vollkommen unabhängig sind, wie die $a_1, a_2, \ldots a_{p-1}$ voneinander.

Benutzt man jetzt die Entwickelung:

$$30)\quad \begin{cases} \left(\frac{1-x^p}{1-x}\right)^r = (1+x+\cdots+x^{p-1})^r = 1 + M_1^r x + M_2^r x^2 + \cdots \\ \qquad\qquad + M_{r(p-1)} x^{r(p-1)}, \end{cases}$$

deren Koeffizienten ich an anderer Stelle* angegeben habe, so kann man die rechte Seite von 29) nach den Formeln für höhere Differentialquotienten, insbesondere mit Hilfe der Gleichung, worin der Nenner von 29) als Funktion von $u$ mit $z$ bezeichnet ist:

$$\begin{aligned} D_u^h(z^{-1}) = &-\frac{(h+1)_1}{z^2}\left(e^u + 2^h e^{2u} + 3^h e^{3u} + \cdots + (p-1)^h e^{(p-1)u}\right) \\ &+ \frac{(h+1)_2}{z^3}\left(M_1^2 e^u + 2^h M_2^2 e^{2u} + 3^h M_3^2 e^{3u} + \cdots\right) \\ &\mp \cdots \\ &+ (-1)^h \frac{(h+1)_{h+1}}{z^{h+1}}\left(M_1^h e^u + 2^h M_2^h e^{2u} + 3^h M_3^h e^{3u} + \cdots\right) \end{aligned}$$

ausführen, und erhält dann, nachdem $e^u$ durch $x$ ersetzt und

$$1 + x + \cdots + x^{p-1}$$

mit $y$ bezeichnet worden ist, nach einigen Zusammenziehungen schliesslich:

$$31)\quad \begin{cases} -x\,F(x) = \sum_{0}^{p-2} {}_k\, \alpha_{k+1} D_u^m\left(\frac{e^{ku}}{z}\right) \\ D_u^m\left(\frac{e^{ku}}{z}\right) = \frac{k^m x^k}{y} \\ \qquad -\frac{(m)_1}{2}\,\frac{x^{k+1}}{y^2}\{M_1^1(k+1)^{m-2}(2k+m+1) \\ \qquad\qquad + M_2^1\, 2(k+2)^{m-2}(2k+2m+2)x \\ \qquad\qquad + M_3^1\, 3(k+3)^{m-2}(2k+3m+3)x^2 + \cdots\} \\ \qquad +\frac{(m)_2}{3}\,\frac{x^{k+1}}{y^3}\{M_1^2(k+1)^{m-3}(3k+m+1) \\ \qquad\qquad + M_2^2\, 2^2(k+2)^{m-3}(3k+2m+2)x \\ \qquad\qquad + M_3^2\, 3^2(k+3)^{m-3}(3k+3m+3)x^2 + \cdots\} \\ \qquad \mp \cdots \\ \qquad + (-1)^m \frac{(m)_m}{m+1}\,\frac{x^{k+1}}{y^{m+1}}\{M_1^m(k+1)^{-1}[(m+1)k+(m+1)] \\ \qquad\qquad + M_2^m 2^m (k+2)^{-1}[(m+1)k + 2(m+1)]x + \cdots\}, \end{cases}$$

worin sämtliche Klammern soweit fortzusetzen sind, bis sie von selbst abbrechen und die letzten beiden Zeilen folgende einfachere Form annehmen:

---

* Schriften der physik.-ökon. Gesellschaft zu Königsberg in Pr., 36. Jahrg. (1895) S. 67 flg. — Bei $M_k^r$ ist $r$ natürlich auch Index.

$$+ (-1)^m \frac{x^{k+1}}{y^{m+1}} \{ M_1^m + M_2^m 2^m x + M_3^m 3^m x^2 + \cdots$$
$$+ M_{m(p-1)}^m [m(p-1)]^m x^{m(p-1)-1} \}.$$

Wir gelangen jedoch mit Hilfe eines von mir a. a. O. (S. 73) aufgestellten, sogleich anzugebenden Satzes sehr leicht zu einem übersichtlicheren Resultat. Wir entnehmen nur noch der Gleichung 31) zum Vergleich mit dem Folgenden die Thatsache (wobei zunächst beiderseits die Division durch $x$ ausgeführt zu denken ist):

$F(x)$ lässt sich rational durch eine gebrochene Funktion darstellen, deren Nenner $y^{m+1}$ ist, und deren Zähler, da $k$ bis $p-2$ wächst, vom $(m+1)(p-1)-2^{\text{ten}}$ Grade ist.

Der erwähnte Satz lautet:

Wenn die Entwickelungskoeffizienten $M_0^r = 1, M_1^r, M_2^r, \ldots M_{r(p-1)}^r$ der Funktion $(1 + x + \cdots + x^{p-1})^r$ beziehungsweise mit den Gliedern einer arithmetischen Reihe $r - 1^{\text{ten}}$ oder geringeren Grades und diese Produkte wieder mit den bis auf die Bedingung, dass ihre Summe Null sei, beliebigen und sich immer in gleicher Reihenfolge wiederholenden Zahlen $b_1, b_2, \ldots b_p$ multipliziert werden, wobei in der letzten Wiederkehr der Zahlenreihe $b_1, b_2, \ldots b_p$ dieselbe nicht vollständig verwendet zu sein braucht, so ist die Summe all dieser Produkte (aus je drei Faktoren) Null.

Wir multiplizieren nun die Raabe'sche Reihe [Gleichung 1)] mit $(1 + x + \cdots + x^{p-1})^{m+1}$, das ist mit

$$1 + M_1^{m+1} x + M_2^{m+1} x^2 + \cdots + M_{s+2}^{m+1} x^{s+2},$$

wobei

32) $$(m+1)(p-1) - 2 = s$$

gesetzt ist, und suchen den Koeffizienten von $x^\nu$. Ist $\nu > s+2$, so wird $x^\nu$ nur von dem Teile

$$a_\mu(\nu - s - 1)^m x^{\nu - s - 2} + a_{\mu+1}(\nu - s)^m x^{\nu - s - 1} + \cdots$$
$$+ a_\varrho(\nu + 1)^m x^\nu$$

der Raabe'schen Reihe geliefert werden, wobei $a_\mu, \ldots a_\varrho$ die betreffenden, der Zahlenreihe $a_1, a_2, \ldots a_p, a_1, a_2, \ldots$ angehörigen Zahlen sind. Der Koeffizient selbst ist aber:

$$a_\varrho(\nu + 1)^m + a_{\varrho-1} M_1^{m+1} \nu^m + \cdots + a_\mu M_{s+2}^{m+1} (\nu - s - 1)^m,$$

also, dem angegebenen Satze gemäss, da die Grössen $a$, der Gleichung 2) wegen, der in ihm gestellten Bedingung genügen, gleich Null. Auch der Koeffizient von $x^{s+1}$ ist noch Null, denn er lässt sich:

$$a_\varrho(s+2)^m + a_{\varrho-1} M_1^{m+1} (s+1)^m + \cdots + a_1 M_{s+1}^{m+1} 1^m + a_p M_{s+2}^{m+1} 0^m$$

schreiben. Es sind also nur die Koeffizienten von $x^0$ bis $x^s$ von Null verschieden, was mit dem früheren Resultat übereinstimmt. Bezeichnen wir nunmehr den Koeffizienten von $x^h$ mit $A_h$, so ist:

$$33)\qquad F(x) = \frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_s x^s}{(1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1})^{m+1}};$$

wir erhalten aber, wenn $a_\sigma$ der Koeffizient von $(s+1)^m x^s$ in der Raabeschen Reihe ist:

$$A_s = a_\sigma (s+1)^m + a_{\sigma-1} M_1^{m+1} s^m + \cdots + a_1 M_s^{m+1} 1^m$$

oder, da die gleichweit von der Mitte entfernten $M_h^{m+1}$ und $M_{s+2-h}^{m+1}$ einander gleich sind:

$$34)\quad \begin{cases} A_s = a_1 M_2^{m+1} 1^m + a_2 M_3^{m+1} 2^m + \cdots + a_\sigma M_{s+2}^{m+1} (s+1)^m, \\ A_h = a_1 M_{s-h+2}^{m+1} 1^m + a_2 M_{s-h+3}^{m+1} 2^m + \cdots + a_{\sigma-s+h} M_{s+2}^{m+1} (h+1)^m, \\ A_2 = a_1 M_s^{m+1} 1^m + a_2 M_{s+1}^{m+1} 2^m + a_3 M_{s+2}^{m+1} 3^m, \\ A_1 = a_1 M_{s+1}^{m+1} 1^m + a_2 M_{s+2}^{m+1} 2^m, \\ A_0 = a_1 M_{s+2}^{m+1} 1^m. \end{cases}$$

Ordnen wir diese nach $a_1, a_2, \ldots a_{p-1}$, wobei $a_p$ nach 2) durch $-a_1 - a_2 - \cdots - a_{p-1}$ zu ersetzen ist, so findet noch eine interessante Beziehung statt. Wir suchen nämlich die Koeffizienten von $a_k \left(k < \frac{p}{2}\right)$ und $a_{p-k}$ in $A_h$ beziehentlich $A_{s-h}$ auf. Der erstere ist (mit Fortlassung des oberen Index):

$$35)\quad M_{s-h+k+1} k^m - M_{s-h+p+1} p^m + M_{s-h+p+k+1} (p+k)^m \mp \cdots,$$

derjenige von $a_{p-k}$ in $A_{s-h}$:

$$M_{h+p-k+1} (p-k)^m - M_{h+p+1} p^m + M_{h+2p-k+1} (2p-k)^m \mp \cdots$$

oder, wegen der bereits erwähnten Gleichheit von $M_r$ und $M_{s+2-r}$:

$$36)\ M_{s-h-p+k+1}(p-k)^m - M_{s-h-p+1} p^m + M_{s-h-2p+k+1}(2p-k)^m \mp \cdots$$

Die Reihe 35) schliesst mit demjenigen $M$, dessen Index so nahe wie möglich $s+2$ liegt, die Reihe 36) mit demjenigen $M$, dessen Index so nahe wie möglich der 0 liegt. Ist nun $m$ ungerade, so ist

$$(p-k)^m = -(k-p)^m \text{ etc.}$$

und die Differenz der Koeffizienten 35) und 36) wird:

$$37)\quad \begin{cases} \cdots + M_{s-h-2p+k+1}(k-2p)^m - M_{s-h-p+1}(-p)^m \\ \quad + M_{s-h-p+k+1}(k-p)^m - M_{s-h+1} 0^m \\ \quad + M_{s-h+k+1} k^m - M_{s-h+p+1} p^m \pm \cdots, \end{cases}$$

sodass der Unterschied zweier aufeinander folgender Indices sowohl, wie auch Basen zum Exponenten $m$ abwechselnd $p-k$ und $k$ ist. Setzen wir nun in den dem angeführten Satz eigentümlichen Zahlen $b_k = 1$, $b_p = -1$ oder allgemeiner:

$$b_r = 1, \quad b_{p-k+r} = -1$$

und die anderen $p-2$ Zahlen gleich Null, so sieht man, dass die obige Summe 37) verschwindet, das heisst: Der Koeffizient von $x^h$ im

Faktor von $a_k$ ist gleich dem Koeffizienten von $x^{s-h}$ im Faktor von $a_{p-k}$; oder:

Liest man die Koeffizienten im Faktor von $a_k$ vom Anfang zum Ende und im Faktor von $a_{p-k}$ in entgegengesetzter Richtung, so erhält man dieselbe Zahlenreihe.

Ist $m$ gerade, so tritt nur der Unterschied ein, dass man dem Faktor von $a_{p-k}$ das entgegengesetzte Zeichen des Faktors von $a_k$ vorsetzen muss. Mittelst dieser Beziehungen wird die Rechnung etwa auf die Hälfte reduziert.

Aus den letzten Gleichungen 34) ersieht man, dass der Faktor von $a_k$ mit $x^{k-1}$ beginnt $\left(k \lesseqgtr \frac{p}{2}\right)$, und ebenso, dass der Faktor von $a_{p-k}$ mit $x^{p-k-1}$ beginnt; daher schliesst der Faktor von $a_k$ mit $x^{s-p+k+1}$, sodass überhaupt jeder Faktor aus $s-p+3=m(p-1)$ Gliedern besteht.

Ist $p$ gerade $=2n$, so beginnt der Faktor von $a_{\frac{p}{2}}=a_n$ mit $x^{n-1}$ und schliesst mit $x^{s-n+1}$. Die Koeffizienten der gleichweit von der Mitte abstehenden Glieder sind bei ungeradem $m$ gleich, bei geradem $m$ entgegengesetzt gleich; im ersteren Falle giebt es ein einzelnes Mittelglied.

Um mit einem einfachen Beispiele zu schliessen, sei $p=3$, $m=4$; dann ist:

$$
\begin{aligned}
F(x) = \frac{1}{(1+x+x^2)^5}\{a_1(1 &+ 5x - 66x^2 - 119x^3 + 110x^4 \\
&+ 165x^5 + x^6 - 16x^7) \\
- a_2(x^8 &+ 5x^7 - 66x^6 - 119x^5 + 110x^4 \\
&+ 165x^3 + x^2 - 16x)\}.
\end{aligned}
$$

Dezember 1895.

# Die singulären Punkte der Flächen.

Von

Dr. Ernst Wölffing,

Privatdozent in Stuttgart.

Zu den noch wenig entwickelten Gebieten der Geometrie gehört die Lehre von den singulären Punkten der Flächen. Wohl existieren Monographien von Rohn* über die biplanaren und uniplanaren Knotenpunkte und von Korteweg** über die sogenannten Faltenpunkte; wohl haben Salmon*** und Cayley† bei ihren Untersuchungen über Reziprokalflächen die Plückerschen Zahlen für den Raum zu verallgemeinern gesucht und bei dieser Gelegenheit mehrere höhere Singularitäten eingeführt; insbesondere aber hat Zeuthen†† die letzteren mit grosser Sorgfalt untersucht und beschrieben. Woran es aber vor allem noch fehlt, das ist eine praktisch brauchbare und zuverlässige Methode, um ohne Herstellung eines Modells die gestaltlichen Verhältnisse einer algebraischen Fläche, deren Gleichung gegeben ist, in der Nähe eines singulären Punktes zu studieren und damit den letzteren erst wirklich als geometrisches Gebilde kennen zu lernen. In Anbetracht des grossen Vorteils, welchen das Newtonsche Parallelogramm bei der Untersuchung der ebenen Kurven gewährt†††, ist es zu verwundern, dass anscheinend noch von keiner Seite der Versuch gemacht wurde, dasselbe auf den Raum zu übertragen. Dass dieser Gedanke ausführbar ist und wirklich zu einer allgemeinen Flächendiskussionsmethode führt, die auch in komplizierteren Fällen nicht versagt, gedenke ich in vorliegender Abhandlung zu zeigen. Durch Übertragung der Newtonschen Konstruktion auf den Raum gewinnt man zunächst einen polyedralen Zug (analytisches Polyeder), der sodann auf eine Ebene abgebildet wird (analytisches Netz). Dieses Netz erweist sich als wertvollstes Hilfsmittel für die weitere Forschung. Es dient zur Unter-

---

* Math. Ann. 22 S. 124.

** Wiener Ak. Ber. Math. Nat. Cl. 98 IIa S. 1154.

*** Transactions Royal J. Ac. vol. 23 S. 461.

† Papers IV S. 21; VI S. 338, 577, 600.

†† Math. Ann. 10 S. 446.

††† Vergl. Reuschle, Praxis der Kurvendiskussion. Stuttgart 1886.

suchung der Flächenkurven durch den singulären Punkt, zur Ermittelung der Durchdringungskurve zweier Flächen und führt zuletzt im Verein mit der bildlichen Darstellung des singulären Flächenpunktes vermittelst einer durchsichtigen Kugel zu einer Methode, durch welche man sich von der Gestalt der Fläche in der Nähe des singulären Punktes und von deren Anschluss an die Näherungs- und Hilfsflächen eine Vorstellung machen kann. Erst auf Grund einer solchen allgemeinen Untersuchungsmethode dürfte es möglich sein, zu einer genaueren Kenntnis der Flächensingularitäten zu gelangen. In einem zweiten Teile dieser Abhandlung gedenke ich diese Methode auf die Untersuchung solcher Singularitäten anzuwenden, welche auf mehrfachen Flächenkurven liegen. Hiermit wird eine kritische Revision der in den oben angeführten Abhandlungen über Reziprokalflächen besprochenen Singularitäten verbunden sein.

## § 1.

### Das analytische Polyeder.

Will man das Newtonsche Parallelogramm (Cramersches Dreieck) in den Raum übertragen, so hat man jedem Term der Flächengleichung $Cx^a y^b z^c$ den Punkt $a, b, c$ in einem rechtwinkligen Koordinatensysteme zuzuordnen. Dann zieht man jede Verbindungsebene von drei oder mehr Punkten, welche den Koordinatenursprung von allen nicht auf ihr liegenden Punkten des Systems trennt. Alle diese Ebenen bilden einen in dem Oktanten der positiven $x, y, z$ sich erstreckenden polyedralen Zug, den ich analytisches Polyeder nennen will. Die Terme der Flächengleichung, welche den auf dem Polyeder gelegenen Punkten entsprechen, sind die „niedrigsten Glieder“ derselben. Die betreffenden Punkte liegen teils auf den Kanten und Flächen des Polyeders, teils bilden sie die Ecken desselben; die zugehörigen Terme sollen hiernach als Zwischenterme und Eckterme unterschieden werden. Die Flächen des Polyeders sind drei- oder mehreckig, durch Parallelverschiebung können sie soweit dem Ursprunge genähert werden, dass auf jede Koordinatenebene wenigstens eine Ecke fällt, während die Axen frei bleiben können. Die Terme der Flächengleichung, welche den Punkten einer Polyederfläche entsprechen, geben unter Weglassung etwaiger Potenzen von $x, y, z$ als Faktoren für sich gleich Null gesetzt eine trinomische oder polynomische Näherungsfläche. Alle Näherungsflächen zusammen sind massgebend für den Verlauf der Fläche; aber keineswegs entsprechen den einzelnen Näherungsflächen verschiedene Zweige der Fläche, wie man dies nach der Analogie beim Cramerschen Dreieck erwarten sollte. Sollen durch den Flächenpunkt mehrere Flächenmäntel gehen, die sich in Doppelkurven durchdringen müssten, so ist eine Reihe von Bedingungen erforderlich, in welche sämtliche Glieder der Flächengleichung, nicht nur die

niedrigsten, eingehen. Im allgemeinen besitzt daher die Fläche im singulären Punkte nur einen Mantel, der sich den einzelnen Näherungsflächen in verschiedenen Teilen seines Verlaufs anschliesst. Über die Art und Weise, wie die Fläche von einer Näherungsfläche zur anderen übergeht, geben die Hilfsflächen Aufschluss, deren Gleichung man erhält, indem man die Terme, deren zugehörige Punkte alle je auf einer Kante des Polyeders liegen, ebenfalls unter Weglassung von Faktoren, welche Potenzen von $x, y, z$ sind, für sich gleich Null setzt. Die Hilfsflächen sind immer binomische Flächen oder Produkte von solchen und bieten somit eine Analogie dar zu den binomischen Hilfskurven, welche in der ebenen Geometrie das Cramersche Dreieck an die Hand giebt. Jede binomische Hilfsfläche vermittelt den Zusammenhang zwischen den zwei Näherungsflächen, deren zugehörige Polyederflächen an die der Hilfsfläche zugehörige Polyederkante stossen. Beispiel: Die Fläche $0 = xy + x^3 + y^3 + z^3$ schliesst sich der Näherungsfläche $0 = xy + y^3 + z^3$ in der Nähe der Ebene $x = 0$, der Näherungsfläche $0 = xy + x^3 + z^3$ in der Nähe der Ebene $y = 0$ an; über ihren Übergang von einer zur anderen giebt die Hilfsfläche $0 = xy + z^3$ Aufschluss.

Um zu ermitteln, welche Teile der Näherungs- und Hilfsflächen für die Untersuchung der Fläche massgebend sind, ist es erforderlich, die durch den singulären Punkt hindurchgehenden Flächenkurven zu betrachten.

## § 2.

### Die Flächenkurven in einem singulären Punkte.

Eine Raumkurve durch den Ursprung sei durch die Entwickelung gegeben: $\begin{Bmatrix} x = \lambda\varepsilon^\alpha + \cdots \\ y = \mu\varepsilon^\beta + \cdots \\ z = \nu\varepsilon^\gamma + \cdots \end{Bmatrix}$. Dabei kann der Parameter $\varepsilon$ so gewählt werden, dass eine der Reihen mit dem ersten Gliede abbricht. Einer der Koeffizienten $\lambda, \mu, \nu$ kann gleich Eins angenommen werden. Die Anfangsexponenten $\alpha, \beta, \gamma$ nenne ich mit Björling* Indices der Raumkurve. Soll die letztere auf der in § 1 besprochenen Fläche liegen, so muss durch Einsetzen von $x, y, z$ in die Gleichung derselben ein identisch verschwindender Ausdruck in $\varepsilon$ entstehen. Ist $\varepsilon^\varrho$ der in $\varepsilon$ niedrigste Term, der beim Einsetzen entsteht, so tritt entweder

a) ein Term $\varepsilon^\varrho$ auf; dann muss aber einer der Koeffizienten $\lambda, \mu, \nu$ verschwinden, $\alpha, \beta, \gamma$ können also nicht Indices einer Flächenkurve sein.

Oder es treten

b) zwei Terme $\varepsilon^\varrho$ auf (oder mehrere, deren zugehörige Systempunkte alle auf einer Geraden liegen). Die Summe ihrer

* „Über Raumkurvensingularitäten". Arch. für Math. u. Phys. II. Reihe, Band 8, S. 83.

Koeffizienten gleich Null gesetzt liefert eine Gleichung zwischen $\lambda, \mu, \nu$; es liegen also unendlich viele Raumkurven von den Indices $\alpha, \beta, \gamma$ auf der Fläche. Ebenso ist es, wenn

c) drei oder mehr Terme $\varepsilon^\varrho$ (deren zugehörige Punkte nicht auf einer Geraden liegen) auftreten. Es seien in letzterem Falle $x^a y^b z^c$, $x^{a'} y^{b'} z^{c'}$, $x^{a''} y^{b''} z^{c''}$ drei solcher Terme. Die zugehörigen Punkte liegen auf einer Polyederfläche. Denn es ist

$$\varrho = a\alpha + b\beta + c\gamma = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = a''\alpha + b''\beta + c''\gamma,$$

also:

$$\alpha : \beta : \gamma : -\varrho = \left\| \begin{matrix} a & b & c & 1 \\ a' & b' & c' & 1 \\ a'' & b'' & c'' & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Die Ebene $E$ der drei Punkte $(a, b, c)$, $(a', b', c')$, $(a'', b'', c'')$ hat

den Ursprungsabstand $d = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$,

$$\text{also ist } \alpha = \frac{-\varrho}{d\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} \begin{vmatrix} b & c & 1 \\ b' & c' & 1 \\ b'' & c'' & 1 \end{vmatrix} \cdots$$

Es sei $x^{a'''} y^{b'''} z^{c'''}$ ein vierter Term, der beim Einsetzen $\varepsilon^{\varrho'}$ liefert.

Dann ist $\varrho' = a'''\alpha + b'''\beta + c'''\gamma = \dfrac{-\varrho}{d\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} \begin{vmatrix} a''' & b''' & c''' & 0 \\ a & b & c & 1 \\ a' & b' & c' & 1 \\ a'' & b'' & c'' & 1 \end{vmatrix}$.

Eine durch $(a''', b''', c''')$ parallel zu $E$ gelegte Ebene $E'$ hat den

Ursprungsabstand $d' = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} \begin{vmatrix} -a''' & -b''' & -c''' & 0 \\ a & b & c & 1 \\ a' & b' & c' & 1 \\ a'' & b'' & c'' & 1 \end{vmatrix}$, also $\varrho' : \varrho = d' : d$.

Ist $\varrho' > \varrho$, so ist $d' > d$; daher müssen sich $(a, b, c)(a', b', c')(a'', b'', c'')$ auf einer Polyederfläche befinden und auf dieser liegt jeder weitere Punkt $(a^{IV}, b^{IV}, c^{IV})$, der beim Einsetzen $\varepsilon^\varrho$ liefert.

Weil aber aus $(a, b, c)$, $(a', b', c')$, $(a'', b'', c'')$ das Verhältnis der Indices $\alpha : \beta : \gamma$ eindeutig berechnet werden kann, so entspricht jeder Polyederfläche eine Schar von Flächenkurven von konstanten Indices, zwischen deren Anfangskoeffizienten eine Gleichung besteht. Die Indices verhalten sich wie die Stellungskoordinaten der Polyederfläche.

Im Falle b) mögen zwei Terme $x^a y^b z^c$ und $x^{a'} y^{b'} z^{c'}$ den niedersten Grad $\varepsilon^\varrho$ ergeben, so ist:

$$\varrho = a\alpha + b\beta + c\gamma = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma.$$

Legt man durch die Punkte $(abc)$ und $(a'b'c')$ eine Ebene $E$ mit den Stellungskoordinaten $\alpha : \beta : \gamma$, so ist dieselbe:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = a\alpha + b\beta + c\gamma = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = \varrho;$$

ihr Ursprungsabstand ist $d = \frac{\varrho}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$. Durch einen nicht auf der Geraden $(a, b, c)$, $(a', b', c')$ liegenden Punkt $(a'', b'', c'')$, für den also $a''\alpha + b''\beta + c''\gamma = \varrho' > \varrho$, legt man eine Ebene $E'$ parallel zu $E$, so ist deren Ursprungsabstand $d' = \frac{\varrho'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$ also $d' > d$. Daraus folgt, dass man durch $(abc)$, $(a'b'c')$ eine Ebene legen kann, die alle nicht auf dieser Geraden befindlichen Systempunkte vom Ursprunge trennt. Daher muss die Gerade der Oberfläche des analytischen Polyeders angehören; sie kann keine Diagonale, sondern sie muss eine Kante desselben sein. Aber die Gleichung

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma$$

ist zur Bestimmung der Indices $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ nicht mehr hinreichend. Das Verhältnis derselben besitzt also unendlich viele Werte, welche beim Einsetzen die Terme $x^a y^b z^c$ und $x^{a'} y^{b'} z^{c'}$ als niederste Glieder ergeben. Jedem Indicessystem entspricht eine durch die Polyederkarte $(a, b, c)$, $(a', b', c')$ gelegten Ebene mit den Stellungskoordinaten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Aber nicht jede Ebene durch die Kante ist hierzu brauchbar, sondern nur diejenigen, welche alle nicht in die Kante fallenden Systempunkte vom Ursprunge trennen. Dieselben sollen die zur betreffenden Kante gehörigen uneigentlichen Polyederflächen heissen, wogegen die wirklich die Begrenzung des Polyeders bildenden Ebenen eigentliche Polyederflächen genannt werden mögen. Man erhält alle zur Kante gehörigen uneigentlichen Polyederflächen durch Drehung einer der an die Kante anstossenden eigentlichen Polyederflächen in die Lage der anderen, wobei der Ursprung nicht passiert wird. Liegt in einer Koordinatenebene nicht eine Fläche, sondern nur eine Kante des Polyeders, so kann man die an letztere anstossende Polyederfläche um die Kante bis in die Lage der Koordinatenebene drehen. Da bei weiterer Drehung keine uneigentlichen Polyederflächen mehr entstehen, die Koordinatenebene vielmehr die Reihe der letzteren beschliesst, so kann man dieselbe, ohne dass sie eine Fläche des Polyeders ist, den eigentlichen Polyederflächen beizählen. Liegt auf einer Koordinatenaxe kein Systempunkt — die entsprechende Axe ist dann Gerade der Fläche —, so projiziere man sämtliche Systempunkte vom unendlich fernen Punkte dieser Axe auf die gegenüberliegende Koordinatenebene. Von dem daselbst entstehenden Punktsysteme bestimme man das analytische Polygon nach der Cramerschen Regel und verbinde jede Seite desselben durch eine Ebene mit dem genannten unendlich fernen Punkte. Diese Ebenen, welche je Kanten des Polyeders enthalten, mögen Grenzflächen des Polyeders heissen. Auch sie sollen den eigentlichen Polyederflächen beigezählt werden, weil bei Drehung der anstossenden Polyederfläche um die Kante über die Grenzfläche hinaus keine uneigentlichen Polyederflächen mehr erzeugt werden.

## § 3.

### Das analytische Netz.

Wie gezeigt wurde, verhalten sich die Indices oder Anfangsexponenten der Flächenkurven wie die Stellungskoordinaten der eigentlichen oder uneigentlichen Polyederflächen, es ist also für dieselben nur die Stellung dieser Ebenen, nicht ihr Ursprungsabstand massgebend. Es kann daher das ganze System dieser Ebenen leichter übersichtlich gemacht werden zunächst durch Abbildung auf eine Kugel. Als Bildpunkt einer Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = \varrho$ dient der im ersten Oktanten gelegene Berührungspunkt einer parallel zu ihr an eine Kugel mit Mittelpunkt im Ursprunge und mit dem Radius Eins gelegten Tangentialebene, also der Punkt

$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}; \quad y = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}; \quad z = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}.$$

Diesen Punkt bildet man weiter ab auf die Tangentialebene $z = 1$ durch Projektion vom Mittelpunkte aus und wenn man in dieser Ebene eine neue $x$- und $y$-Axe, parallel zur $x$- und $y$-Axe in der Ebene $z = 0$, annimmt, so sind die Koordinaten des Bildpunktes $x = \frac{\alpha}{\gamma}$; $y = \frac{\beta}{\gamma}$. Also verhalten sich die homogenen Koordinaten des Bildpunktes in der Ebene $z = 1$ wie die Stellungskoordinaten der abzubildenden Ebene. Nun bilden sich aber auf der Kugel alle zu einer Kante gehörigen uneigentlichen Polyederflächen ab auf einem Grosskreisbogen zwischen den Bildpunkten der beiden an die Kante anstossenden eigentlichen Polyederflächen. Die auf der Kugel durch Abbildung sämtlicher Polyederflächen entstehende netzförmige Figur von Punkten, die durch Grosskreisbögen verbunden sind, projiziert sich auf die Ebene $z = 1$ als eine ebenfalls netzförmige Figur, bestehend aus Punkten, verbunden durch gerade Linien, die Projektionen jener Grosskreisbögen. Diese Figur nenne ich analytisches Netz. Die Punkte heissen Ecken des Netzes; sie sind die Bildpunkte der eigentlichen Polyederflächen. Von ihnen gehen Gerade aus, Linien des Netzes; jede ist die Abbildung einer Polyederkante und jeder ihrer Punkte ist die Abbildung einer durch die Kante gehenden uneigentlichen Polyederfläche. Die Zahl der von einer Ecke ausgehenden Linien ist gleich der Zahl der Seiten der entsprechenden eigentlichen Polyederfläche. Die Ecken und die Punkte der Linien (Linienpunkte) sollen zusammen Netzpunkte heissen. Die von den Linien des Netzes eingeschlossenen, ebenen polygonalen Flächenräume heissen Maschen des Netzes; sie entsprechen den Ecken des Polyeders und sind daher den Ecktermen der Flächengleichung zugeordnet. Nur die letzteren werden durch die Maschen zur Darstellung gebracht; die auf den Kanten und Flächen des Polyeders liegenden Zwischenterme sind bei den Linien und Ecken des Netzes hinzu zu denken. Die Maschen

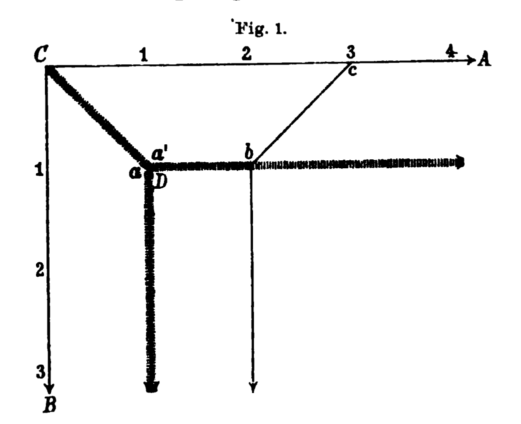
haben so viele Ecken, als Polyederflächen an die betreffende Polyederecke anstossen. Das Netz beschränkt sich auf den Quadranten der positiven $x$ und $y$; als **Randlinien** treten die $y$-Axe, die $x$-Axe und die unendlich ferne Gerade auf. Da auch die Koordinatenebenen den eigentlichen Polyederflächen beigezählt wurden, treten im Netze im allgemeinen als Abbildungen derselben folgende **Fundamentalpunkte** auf:

der unendlich ferne Punkt der $x$-Axe, mit $A$ bezeichnet, als Bildpunkt der Ebene $x = 0$,

der unendlich ferne Punkt der $y$-Axe, mit $B$ bezeichnet, als Bildpunkt der Ebene $y = 0$,

der Ursprung, mit $C$ bezeichnet, als Bildpunkt der Ebene $z = 0$.

Fig. 1.




Die durch die Fundamentalpunkte gehenden Netzlinien mögen **Ecklinien** heissen. Die Grenzflächen des Polyeders werden abgebildet durch **Grenzpunkte** des Netzes, die auf den Randlinien gelegen sind, z. B. Punkt $c$ in Figur 1.

Nach ihrem Verhalten gegenüber den Fundamentalpunkten teile ich die Maschen in drei Gruppen:

**Vollmaschen** haben keinen Fundamentalpunkt als Ecke, z. B. $abcdea$ in Figur 3.

**Eckmaschen** haben einen Fundamentalpunkt als Ecke, z. B. $abcCa$ in Figur 2.

**Randmaschen** haben zwei Fundamentalpunkte zu Ecken und daher eine vollständige Randlinie als Begrenzung, z. B. $bcABb$ in Figur 2.

Die Eckterme der Vollmaschen enthalten alle drei Veränderliche, diejenigen der Eckmaschen zwei, diejenigen der Randmaschen nur eine.

Für die Untersuchung der Flächen sind noch einige andere Punkte, Linien und Flächen des Netzes von Bedeutung, vor allem der **Zentralpunkt** $D$ mit den homogenen Koordinaten $1:1:1$; derselbe giebt zu einer weiteren Einteilung der Maschen in vier Klassen Anlass:

**Zentralmaschen** umschliessen den Zentralpunkt, z. B. $abcdea$ in Figur 3.

**Lateralmaschen** haben den Zentralpunkt auf einer Linie (**Zentrallinie**), z. B. $a'b'c'C''a$ in Figur 2.

**Radialmaschen** haben den Zentralpunkt als Ecke, z. B. $b'a'c'C'b'$ in Figur 3.

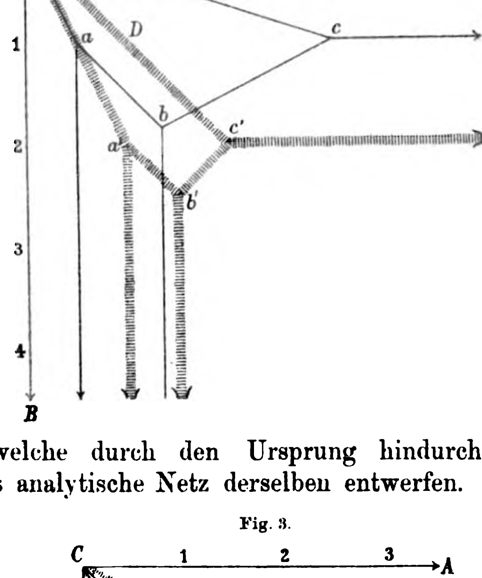
Nebenmaschen haben den Zentralpunkt ausserhalb, z. B. $bcABb$ in Figur 2.

Die Maschen der drei ersten Klassen könnte man Hauptmaschen nennen; ein Netz besitzt immer entweder eine Zentralmasche oder zwei Lateralmaschen, oder drei oder mehr Radialmaschen; daneben kann es beliebig viele Nebenmaschen enthalten. Während die Lage des Zentralpunktes über das Tangentialgebilde (§ 5) entscheidet, besitzen für das Verhalten der binomischen Hilfsflächen (§ 7) die drei Einheitspunkte eine gewisse Wichtigkeit; es sind dies die auf Randlinien gelegenen Punkte

$E = (0, 1, 1)$,
$F = (1, 0, 1)$,
$G = (1, 1, 0)$;

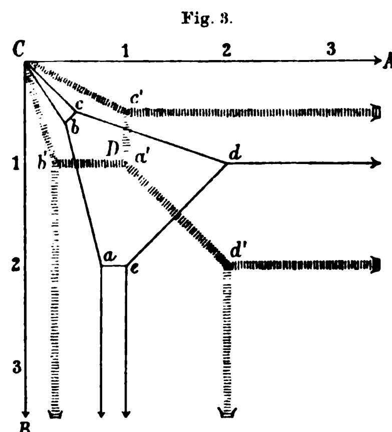
Einheitslinien mögen die Verbindungslinien $AD$, $BD$ und $CD$ des Zentralpunktes mit den Fundamentalpunkten heissen; als Einheitsdreiecke bezeichne ich die Dreiecke $BCD$, $CAD$, $ABD$, als Einheitsvierecke die Vierecke $AFDG$, $BGDE$, $CEDF$.

Fig. 2.




Ist die Gleichung einer Fläche gegeben, welche durch den Ursprung hindurchgeht, so kann man jederzeit das analytische Netz derselben entwerfen. Man zeichnet (in einer perspektivischen Figur) das analytische Polyeder und bestimmt die Stellungskoordinaten der einzelnen Polyederflächen. Hiermit sind die homogenen Koordinaten der Netzecken gefunden; die letzteren werden alsdann den Kanten des Polyeders entsprechend durch gerade Linien verbunden. Wie oben jede (eigentliche und uneigentliche) Polyederfläche, so liefert jetzt jeder Netzpunkt (das heisst jede Ecke und jeder Linienpunkt) eine Schar von Flächenkurven mit bestimmten Anfangs-

Fig. 3.



exponenten.* Dieselbe berührt respektive die $x, y, z$-Axe, je nachdem der Netzpunkt im Einheitsdreieck $BCD$, $CAD$, $ABC$ liegt; sie berührt respektive die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, wenn der Netzpunkt respektive auf der Einheitslinie $AD$, $BD$, $CD$ liegt; sie hat endlich die Ebene $x = 0$; $y = 0$, $z = 0$ zur Schmiegungsebene, je nachdem der Netzpunkt sich im Einheitsvierecke $AFDG$, $BGDE$, $CEDF$ befindet.

Zusatz: Damit eine aus Ecken, Linien und Maschen bestehende netzförmige Figur wirklich als analytisches Netz einer Fläche gedeutet werden kann, muss sie vor allem folgenden zwei Bedingungen genügen:

a) Es dürfen sich nicht zwei Linien schneiden (ohne dass der Kreuzungspunkt als Ecke aufgefasst wird).

b) Keine Masche darf einen einspringenden (oder auch nur flachen) Winkel besitzen.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so kann zwar aus den durch die Ecken des Netzes bestimmten Ebenen ein Polyeder gebildet werden; es fragt sich aber noch, ob dieses die durch die Linien und Maschen des Netzes geforderten Kanten und Ecken besitzen kann. Jedenfalls ist jede Polyederfläche nur hinsichtlich ihrer Stellung bestimmt.

Zerfällt eine Fläche in das Produkt zweier Teilflächen, so besteht ihr Netz aus den aufeinander gelegten Netzen der Teilflächen, wobei Kreuzungen von Linien derselben als neue Eckpunkte einzuführen sind.

## § 4.

### Die Durchdringungskurve zweier Flächen.

Eine erste Anwendung des analytischen Netzes ist die Lösung folgender Aufgabe: Gegeben zwei Flächen, welche durch den Ursprung gehen, gesucht die Zweige ihrer Durchdringungskurve daselbst. Zur Ermittelung der Anfangsexponenten dieser Zweige ergiebt sich nämlich sofort folgendes graphische Verfahren: Soll eine Raumkurve beiden Flächen angehören, so muss der durch ihre Indices bestimmte Punkt im Netze beider Flächen vorkommen; man erhält diese Punkte als gemeinsame Netzpunkte (Netzschnittpunkte), wenn man die beiden Netze aufeinander legt, sodass die Fundamentalpunkte beider zusammenfallen.

Dabei sind aber drei Fälle zu unterscheiden:

a) Eine Ecke des einen Netzes fällt auf eine solche des anderen, das heisst es ist im einen Polyeder eine eigentliche Fläche zu einer solchen des anderen parallel.

b) Eine Ecke des einen Netzes fällt auf eine Linie des anderen, das heisst es ist eine eigentliche Fläche des einen Polyeders zu einer uneigentlichen des anderen parallel.

* Dabei liefern die Grenzpunkte Scharen von Flächenkurven, die nicht durch den Ursprung gehen.



c) Eine Linie des einen Netzes schneidet eine Linie des anderen, das heisst es ist eine uneigentliche Fläche des einen Polyeders einer solchen des anderen parallel.

Es kann aber auch vorkommen, dass Linien der beiden Netze ganz oder teilweise zusammenfallen. Als Netzschnittpunkte sind hierbei nur die an den Endpunkten des zusammenfallenden Linienstückes befindlichen Ecken anzusehen.

Es ist leicht zu sehen, dass immer mindestens ein Netzschnittpunkt existiert, wenn keine Grenzpunkte vorhanden sind. Zunächst kann ein Netz ohne Grenzpunkte nicht in zwei völlig getrennte Linienzüge zerfallen; also muss man von jeder Ecke aus auf den Linien des Netzes fortschreitend jeden Fundamentalpunkt erreichen können. Ferner hat jedes Netz ohne Grenzpunkte mindestens eine Ecke. Dann fällt eine Ecke des ersten Netzes entweder in eine Ecke oder auf eine Linie des zweiten (in welchem Falle bereits ein Netzschnittpunkt vorliegt) oder in eine Masche desselben. Diese ist im günstigsten Falle eine Randmasche, sodass die erwähnte Ecke mit zwei Fundamentalpunkten verbunden sein kann, ohne dass der betreffende Linienzug die Begrenzungslinien der Masche schneidet. Aber der dritte Fundamentalpunkt kann von der Ecke aus nur durch einen Linienzug erreicht werden, der entweder eine Ecke der Masche passiert oder eine Linie derselben kreuzt, womit der Satz bewiesen ist.

Jeder Netzschnittpunkt $(\alpha, \beta, \gamma)$ liefert einen oder mehrere Zweige der Durchdringungskurve.

Die ersten Glieder der Kurvenentwickelung sind nun:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \varepsilon^{\alpha} \\ y = \mu \varepsilon^{\beta} \\ z = \nu \varepsilon^{\gamma} \end{array}\right\}.$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten nimmt man aus jeder Flächengleichung die Eckterme der an den Netzschnittpunkt stossenden Maschen unter Beifügung der dazwischen liegenden Zwischenterme und setzt dieselben je für sich gleich Null. Durch Einsetzen der Werte von $x, y, z$ ergeben sich zwei Gleichungen (Koeffizientengleichungen) zur Bestimmung von $\lambda : \mu : \nu$. Einer dieser Koeffizienten (etwa $\nu$) kann gleich Eins gesetzt werden. Man macht dann die Koeffizientengleichungen durch Einführung der homogenisierenden Veränderlichen $n$ in $\lambda$ und $\mu$ homogen. Bei der Lösung der Koeffizientengleichungen, die man als Gleichungen von Kurven (Koeffizientenkurven) in homogenen Koordinaten $\lambda, \mu, n$ deuten kann, ist folgendes zu beachten.

Die in die Ecken des Koordinatendreiecks fallenden Schnittpunkte bleiben ausser Betracht; auch werden die Koordinatenaxen weggelassen, wenn sie etwa als Bestandteile der Koeffizientenkurven auftreten.

Bei den übrig bleibenden Lösungen ist für den Fall, dass der Index $\gamma$, dessen Koeffizient $\nu = 1$ gesetzt wurde, grösser als Eins ist, der

Parameter $\varepsilon = \sqrt[\gamma]{z}$ nicht eindeutig, sondern $\gamma$-deutig bestimmt. Also führen je $\gamma$-Wertesysteme für $\lambda, \mu, n$ nur auf einen Raumkurvenzweig, weil sich je $\gamma$ Entwickelungen nur in der Wahl des Parameters unterscheiden.

Werden diese beiden Umstände berücksichtigt, so ist die Zahl der Lösungen der Koeffizientengleichungen von der Wahl des gleich Eins zu setzenden Koeffizienten unabhängig; zweckmässig ist es nach dem Vorstehenden hierzu denjenigen zu wählen, zu welchem der kleinste Index gehört. Den Parameter $\varepsilon = \sqrt[\gamma]{z}$ behält man auch für die höheren Glieder der Reihen bei, sodass sich die Reihe für $z$ auf $z = \varepsilon^\gamma$ beschränkt. Die Terme der Flächengleichung, welche auf die zweiten Glieder der Reihen für $x$ und $y$ Einfluss haben, findet man, indem man die zu $(\alpha, \beta, \gamma)$ gehörende eigentliche oder uneigentliche Polyederfläche vom Ursprunge weg parallel mit sich verschiebt, bis sie wieder durch einen oder mehrere auf der Oberfläche des Polyeders oder in seinem Innern gelegene Systempunkte geht. Die zugehörigen Terme treten zu den Termen der Koeffizientengleichungen hinzu, um die zweiten Glieder von $x$ und $y$ zu liefern.

Infolge besonderer Werte der Koeffizienten der Flächengleichungen treten oft bei Lösung der Koeffizientengleichungen eigentümliche Schwierigkeiten auf. Es kann ein Schnittpunkt der Koeffizientenkurven auf eine Koordinatenaxe fallen, wodurch sich einer der Indices erhöht; es können aber auch die Koeffizientenkurven ganz oder in einem Teile ihres Verlaufes zusammenfallen. Dann sind ihre Gleichungen zur Berechnung der Koeffizienten nicht mehr ausreichend. Die Ursache dieser Erscheinung ist, dass die beiden Flächengleichungen auf die Form gebracht werden können: $f = \varphi\psi + \chi = 0$ und $f' = \varphi\psi' + \chi' = 0$. Man schafft die störende Funktion $\varphi$ weg, indem man bildet:

$$f'' = \psi' f - \psi f' = \psi' \chi - \psi \chi' = 0.$$

Die Fläche $f'' = 0$ schneidet $f = 0$ in den Kurven $\begin{Bmatrix} f = 0 \\ f' = 0 \end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} f = 0 \\ \psi = 0 \end{Bmatrix}$. Man berechnet daher die Zweige von $\begin{Bmatrix} f = 0 \\ f'' = 0 \end{Bmatrix}$ und lässt, um diejenigen von $\begin{Bmatrix} f = 0 \\ f' = 0 \end{Bmatrix}$ zu bekommen, die Zweige von $\begin{Bmatrix} f = 0 \\ \psi = 0 \end{Bmatrix}$ weg, wenn $\psi$ nicht eine Konstante, sondern eine Funktion ist.

Tritt ein Schnittpunkt der Koeffizientenkurven $m$-fach zählend auf, so sind im allgemeinen nicht $\alpha, \beta, \gamma$, sondern $m\alpha, m\beta, m\gamma$ die Indices des zugehörigen Raumkurvenzweiges, doch können unter Umständen auch $m$-Zweige mit Indices $\alpha, \beta, \gamma$ in höherer Berührung auftreten.

Als Beispiel werde die Durchdringungskurve der Flächen

$$Ax^2 + Bxy + Cxz + Dz^3 = 0$$

und

$$Ex + Fy + Gz = 0$$

ermittelt.

Das Netz der ersten Fläche, in Figur 1 ausgezogen, hat die Ecken $a = (1, 1, 1)$, $b = (2, 1, 1)$, den Grenzpunkt $c = (3, 0, 1)$ und die Maschen $CaBC(x^2)$; $CabcC(xy)$; $BabB(xz)$; $cABbc(z^3)$. Das Netz der zweiten Fläche, in Figur 2 quergestrichelt, hat die Ecke $a' = (1, 1, 1)$ und die Maschen $Ba'CB(x)$; $Aa'CA(y)$; $Aa'BA(z)$.

Netzschnittpunkte: Es liegt Ecke $b$ auf Linie $a'A$; Ecke $a$ auf Ecke $a'$.

Erster Zweig: $\left\{\begin{matrix} x = l\,\varepsilon^2 \\ y = \mu\varepsilon + \cdots \\ z = \nu\varepsilon + \cdots \end{matrix}\right\}$ (es wurde $\lambda = 1$ gesetzt und mit $l$ homogen gemacht). Koeffizientengleichungen:

$$\left\{\begin{matrix} Bl^2\mu + Cl^2\nu + D\nu^3 = 0 \\ F\mu + G\nu = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Die Lösung $\left\{\begin{matrix} \mu = 0 \\ \nu = 0 \end{matrix}\right\}$ bleibt weg; die beiden anderen Lösungen beziehen sich nur auf eine Entwickelung, also:

$$x = \varepsilon^2, \quad y = \frac{-G}{F}\sqrt{\frac{BG - CF}{DF}}\,\varepsilon + \cdots, \quad z = \sqrt{\frac{BG - CF}{DF}}\,\varepsilon + \cdots$$

Zweiter Zweig:

$$\left\{\begin{matrix} x = l\,\varepsilon \\ y = \mu\varepsilon + \cdots \\ z = \nu\varepsilon + \cdots \end{matrix}\right\}.$$

Koeffizientengleichungen: $Al + B\mu + C\nu = 0$ (Faktor $l$ bleibt weg)

$$El + F\mu + G\nu = 0$$

also:

$$x = \varepsilon, \quad y = \frac{CE - AG}{BG - CF}\,\varepsilon + \cdots, \quad z = \frac{AF - BE}{BG - CF}\,\varepsilon + \cdots$$

Die Berechnung der Durchdringungskurve ermöglicht auch die Lösung folgender wichtigen Aufgabe:

Betrachtet man eine Fläche $f(x, y, z, t) = 0$ von einem beliebigen Punkte $(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ aus, so besitzt das Bild derselben eine Umrisslinie, nämlich die Berührungskurve des von $(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ an die Fläche zu legenden Berührungskegels. Durch diese Kurve geht aber auch die erste Polarfläche des Punktes $(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ in Bezug auf die Fläche $f = 0$, also die Fläche:

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial z}\zeta + \frac{\partial f}{\partial t}\tau = 0.$$

Hat $f = 0$ im Ursprunge einen zwei- oder mehrfachen Punkt, so geht durch denselben auch $P = 0$, gleichviel, wo der Punkt $(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ gelegen ist. Dann geht also eine Umrisslinie der Fläche, die Durchdringungskurve von $f = 0$ und $P = 0$, durch den Ursprung und deren Zweige können nach dem eben geschilderten Verfahren ermittelt werden. Zu diesem Zwecke muss man auf das Netz der Fläche das Netz der Polarfläche eines beliebigen Punktes in Beziehung auf dieselbe legen; ich nenne das letztere Polarnetz der Fläche.

Beispiel: Umrisslinie der Flächen

$$f = xy^2 - x^3z - x^5 - y^5 - 32z^5 = 0$$

vom Punkte $(\xi, \eta, \zeta, 0)$ gesehen. Das Netz, in Figur 2 ausgezogen, hat die Ecken $a = (1, 2, 2)$; $b = (8, 11, 6)$; $c = (3, 1, 1)$ und die Maschen $CabcC(xy^2)$; $BabB(x^3z)$; $CaBC(x^5)$; $CcAC(y^5)$; $BbcAB(z^5)$. Die Polarfläche des Punktes $(\xi, \eta, \zeta, 0)$ in Bezug auf $f = 0$ ist:

$$P = \xi(y^2 - 3x^2z - 5x^4) + \eta(2xy - 5y^4) + \zeta(-x^3 - 160z^4) = 0.$$

Das Polarnetz, in Figur 2 quergestrichelt, hat die Ecken

$$a' = (1, 2, 1), \quad b' = (3, 5, 2), \quad c' = (2, 2, 1)$$

und die Maschen

$$Ca'b'c'C(xy), \quad Cc'AC(y^2), \quad Ca'BC(x^3), \quad Ba'b'B(x^2z), \quad Bb'c'AB(z^4).$$

Netzschnittpunkte:

1. Ecke $a$ auf Linie $a'C$ liefert:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \varepsilon \\ y = \dfrac{\zeta}{2\eta}\varepsilon^2 + \cdots \\ z = \left(\dfrac{\zeta^2}{4\eta^2} - 1\right)\varepsilon^2 + \cdots \end{array}\right\}.$$

2. Kreuzung der Linien $bB$ und $a'b'$ im Punkte $(4, 7, 3)$ giebt:

$$\left\{\begin{array}{l} x = -2\sqrt[3]{4}\,\varepsilon^4 + \cdots \\ y = -\dfrac{3\xi}{\eta}\sqrt[3]{4}\,\varepsilon^7 + \cdots \\ z = \varepsilon^3 \end{array}\right\}.$$

3. Kreuzung der Linien $bc$ und $c'C$ im Punkte $(5, 5, 3)$ giebt:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2\sqrt[3]{\dfrac{\xi^2}{\eta^2}}\,\varepsilon^5 + \cdots \\ y = -4\sqrt[3]{\dfrac{\eta}{\xi}}\,\varepsilon^5 + \cdots \\ z = \varepsilon^3 \end{array}\right\}.$$

Diese drei Zweige besitzt also die Umrisslinie der Fläche (siehe Fig. 4).

## § 5.

### Das Tangentialgebilde.

Es ist nun erforderlich den Begriff, „singulärer Punkt einer Fläche“ genau zu definieren. Ein gewöhnlicher Punkt besitzt bekanntlich folgende Eigenschaften:

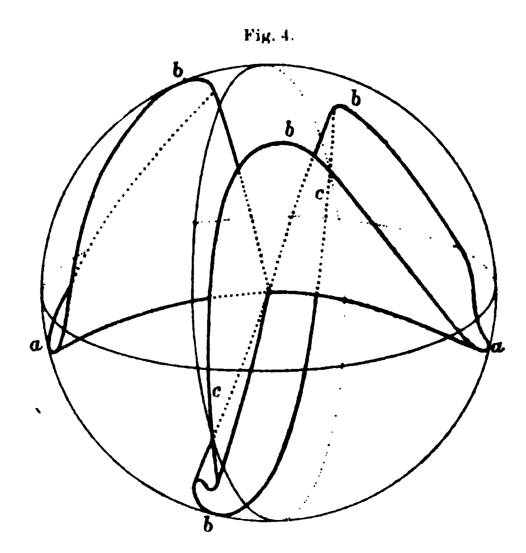
a) Eine beliebige Gerade durch ihn schneidet die Fläche in einem Punkte.

b) Es giebt speziell unendlich viele Geraden (Tangenten) durch den Punkt, die die Fläche in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden; dieselben liegen in einer Ebene (Tangentialebene).

c) In der Tangentialebene giebt es zwei Tangenten, welche die Fläche in drei zusammenfallenden Punkten schneiden (Haupttangenten).

Jeder Punkt, der nicht alle diese drei Eigenschaften besitzt, möge ein **singulärer Punkt** genannt werden. Schneidet eine beliebige Gerade durch einen solchen die Fläche nicht in einem, sondern in $\nu$ Punkten, so heisst der Flächenpunkt ein $\nu$-facher. Alsdann liegen die in $\nu + 1$ oder mehr Punkten schneidenden Geraden auf einem Kegel $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung, mit Spitze im singulären Punkte, den ich als **Tangentialgebilde** bezeichne. Derselbe kann ganz oder teilweise in Ebenen zerfallen und reduziert sich im Falle des einfachen Flächenpunktes auf die Tangentialebene. Liegt der Flächenpunkt im Koordinatenursprunge, so ergiebt sich die Gleichung des Kegels durch Nullsetzen der **Tangentialglieder**, das heisst der Glieder der Flächengleichung von niedrigster, also $\nu^{\text{ter}}$ Gesamtdimension in $x$, $y$, $z$. Das Tangentialgebilde ist diejenige Fläche, der sich die gegebene Fläche um so inniger anschliesst, je mehr man sich dem Flächenpunkte nähert. Dasselbe wird durch den Zentralpunkt bestimmt und je nach der Lage desselben im Netz sind drei Fälle möglich:

Fig. 4.




I. Netz mit Zentralmasche. Ein Tangentialglied. Tangentialgebilde zerfällt in Koordinatenebenen.

a) Triplanarer Typus: Zentralmasche ist Vollmasche; Tangentialgebilde besteht aus allen drei Koordinatenebenen (Fig. 3).

b) Biplanarer Typus: Zentralmasche ist Eckmasche; Tangentialgebilde besteht aus zwei Koordinatenebenen (Fig. 2).

c) Uniplanarer Typus: Zentralmasche ist Randmasche; Tangentialgebilde beschränkt sich auf eine Koordinatenebene.

II. Netz mit zwei Lateralmaschen. Zwei Tangentialglieder. Tangentialgebilde besteht aus einem binomischen Kegel, zu dem noch Koordinatenebenen hinzutreten, wenn die Lateralmaschen nicht an die Fundamentalpunkte stossen. Der Kegel zerfällt in Ebenen, wenn die Zentrallinie oder ihre Verlängerung durch einen Einheitspunkt hindurchgeht.

III. Netz mit drei oder mehr Radialmaschen. Drei oder mehr Tangentialglieder. Das Tangentialgebilde ist ein trinomischer oder polynomischer Kegel, zu dem Koordinatenebenen hinzutreten können, wenn die Radialmaschen nicht an die Fundamentalpunkte stossen.

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, dass immer die Hauptmaschen die Eckterme der Tangentialglieder liefern.

## § 6.

## Bildliche Darstellung einer Fläche in der Nähe eines singulären Punktes.

Zur Herstellung einer perspektivischen, die Gestalt der Fläche in der Nähe eines singulären Punktes darstellenden Zeichnung hat sich folgendes Verfahren als praktisch bewährt:

Man beschreibt um den singulären Punkt eine sehr kleine durchsichtige Kugel; dieselbe schneidet die Fläche in einer sphärischen Kurve, die ich Kugelkurve nennen will. Die Kugelkurve drängt sich an die Spur des Tangentialgebildes umso näher heran, je kleiner die Kugel angenommen wird.* Die Fläche selbst möge als undurchsichtig angenommen werden.

Alsdann nimmt man den ausserhalb der Kugel befindlichen Teil der Fläche weg und bildet die ganze Figur durch Projektion auf die Ebene $y = 0$ ab und zwar von einem unendlich fernen Punkte aus (Parallelprojektion), wobei es zweckmässig ist, $\xi : \eta : \zeta = 1 : 3 : 1$ zu setzen.

Zur Veranschaulichung der Kugel dienen drei Grosskreise, nämlich ihre Schnitte mit den Koordinatenebenen. Die Grosskreise $x = 0$ und $z = 0$ bilden sich auf der Ebene $y = 0$ als Ellipsen vom Halbaxenverhältnisse $1 : 3$ ab. Der Grosskreis $y = 0$ möge mit dem Umriss der Kugel, der eigentlich eine Ellipse wäre, verwechselt werden, wodurch das Bild an Einfachheit und Klarheit bedeutend gewinnt. Wird die Kugel in dieser Weise angedeutet, so ist es nicht schwer, die Kugelkurve als sphärische Kurve zu sehen und sich demgemäss von der Gestalt der Fläche im Raume eine Vorstellung zu machen.

Um die Kugelkurve zu zeichnen, liegt es am nächsten, nach dem Vorgange von Möbius** sphärische Koordinaten auf der Kugel einzuführen. Die Gleichung einer sphärischen Kurve ist dann identisch mit der Gleichung des dieselbe vom Ursprunge aus projizierenden Kegels. Man erhält also die Gleichung der Kugelkurve durch Elimination von $t$ aus der Flächengleichung $f(x, y, z, t) = 0$ und der Kugelgleichung $x^2 + y^2 + z^2 - \varrho^2 t^2 = 0$ in der Form:

$$f\left(\varrho x, \varrho y, \varrho z, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = 0.$$

* Vergl. Rohn, Math. Ann. 22, S. 128.

** Grundformen der Linien III. Ordnung. Ges. Werke II, S. 115.

Aber man muss sich jetzt wohl hüten, diese Gleichung durch Wegschaffung des Wurzelzeichens rational zu machen; denn hierdurch käme neben der Kugelkurve auch ihre Gegenkurve* herein.

Man muss sich daher bei der Diskussion der Kugelkurve (die man auch auf eine Tangentialebene der Kugel projizieren könnte) an die irrationale Form ihrer Gleichung halten.

In einfacheren Fällen, insbesondere bei Näherungs- und Hilfsflächen, genügt für die Zeichnung der Kugelkurve folgendes Verfahren: Man zeichne die Spur des Tangentialgebildes auf der Kugel und bestimme ferner die Schnittpunkte der Kugelkurve mit den Koordinatenebenen. Diese Punkte liegen auf den drei Grosskreisen; man erhält sie durch Nullsetzen je einer Veränderlichen in der Flächengleichung; sie mögen Hauptpunkte heissen. Die Zahl der auf der Begrenzung eines Kugeloktanten gelegenen Hauptpunkte muss eine gerade sein. Ausserdem lassen sich auch die Schnittpunkte mit den Medianebenen

$$y \pm z = 0; \quad z \pm x = 0; \quad x \pm y = 0$$

leicht ermitteln. Auch die Schnittpunkte der Kugelkurve mit dem Tangentialgebilde, soweit dieses nicht aus Koordinatenebenen besteht, sind nach § 4 unschwer zu berechnen.

Tritt ein $n$-fach zählender Teil des Tangentialgebildes auf, so wird dessen Spur von $n$ Zweigen der Kugelkurve begleitet, die aber paarweise ganz oder in einem Teile ihres Verlaufes imaginär sein können. Daher ist die Spur immer wenigstens von einem Zweige begleitet, wenn $n$ ungerade ist, während sie ganz frei oder teilweise ganz frei sein kann, wenn $n$ gerade ist.

Mehrfache Punkte kann die Kugelkurve nur besitzen, wenn mehrfache Kurven durch den singulären Punkt hindurchgehen. Den Umriss der Kugel berührt die Kugelkurve, wo sie ihn trifft.

Die Kugelkurve ist aber zur bildlichen Darstellung der Fläche nur dann ausreichend, wenn der singuläre Punkt ein einfacher ist. Bei einem mehrfachen Punkte treten, wie in § 4 bereits bemerkt wurde, eine oder mehrere Umrisslinien auf. Ihre Berechnung wurde in § 4 angegeben. Die Zweige der Umrisslinien gehen vom Kugelmittelpunkt aus und laufen bis zur Kugelkurve, wo sie, dieselbe berührend, ihr Ende finden. Die Umrisslinien bilden daher eine Kontrolle bei der Zeichnung der Kugelkurve und geben insbesondere über scheinbare Doppelpunkte derselben, Ovale, die ausserhalb der Koordinatenebenen liegen u. s. f. Aufschluss.**

---

* Möbius a. a. O. S. 97.

** Grenzpunkte auf der Randlinie $BC$, $CA$, $AB$ zeigen, dass die $x$-, $y$-, $z$-Axe der Fläche angehört. Die singuläre Natur dieser Flächengeraden ermittelt man vermittelst des in § 2 erwähnten, von den Spuren der Grenzflächen gebildeten Polygons.

§ 7.

**Die Näherungs- und Hilfsflächen.**

Einer Näherungsfläche gehört eine Polyederfläche, im Netze also eine Ecke, einer Hilfsfläche eine Polyederkante, also auch eine Netzlinie an. Das Netz einer Hilfsfläche beschränkt sich auf eine gerade Linie (die Verlängerung der zugehörigen Netzlinie), welche von einem Grenzpunkte zu einem anderen oder zu einem Fundamentalpunkte verläuft. Jeder Punkt dieser Geraden bestimmt ein Indicessystem; zu jedem dieser Systeme gehört eine Schar von Raumkurven auf der Hilfsfläche. Im Netze der gegebenen Fläche kommt aber die zur Hilfsfläche gehörige Gerade nur zum Teile vor (soweit sie eben Netzlinie ist); daher tritt von den unendlich vielen Raumkurvenscharen der Hilfsfläche nur ein Teil in Beziehung zu Kurven auf der Fläche. Diese Beziehung besteht darin, dass die Kurvenscharen auf der Hilfsfläche und auf der gegebenen Fläche in den Exponenten und Koeffizienten der ersten Glieder übereinstimmen. In diesem Sinne ist derjenige Teil der Hilfsfläche, auf welchem die erwähnten Kurvenscharen (massgebende Kurvenscharen) liegen, für die gegebene Fläche massgebend. Die Fläche schliesst sich der Hilfsfläche in der Nähe der Ebene $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ an, wenn die zugehörige Netzlinie die Einheitslinie $AD$, $BD$, $CD$ kreuzt; ferner in der Nähe der $x$-, $y$-, $z$-Axe, wenn die Netzlinie im Einheitsdreieck $BCD$, $CAD$, $ABD$ verläuft. Geht die Netzlinie durch den Zentralpunkt, so schliesst sich die Hilfslinie der Fläche in einem von den Koordinatenebenen entfernten Teile an.

Das Netz einer Näherungsfläche besteht aus einem Eckpunkte; von demselben laufen Gerade (die Verlängerungen der anstossenden Netzlinien) nach Grenz- oder Fundamentalpunkten. Jedem Netzpunkte der Näherungsfläche entspricht allerdings eine Schar von Raumkurven auf derselben. Aber jeder Linienpunkt des Netzes gehört zugleich dem Netze einer Hilfsfläche an; die von einem solchen gelieferten Kurven stimmen in den ersten Gliedern mit auf den Hilfsflächen liegenden überein, und deren Einfluss wurde bereits erörtert. Etwas Neues liefert nur der Eckpunkt des Netzes, nämlich eine massgebende Schar von Raumkurven, die nur auf der Näherungsfläche existiert und ebenfalls mit einer Schar von Flächenkurven gleiche erste Glieder besitzt. Der massgebende Teil der Näherungsfläche liegt wieder in der Nähe der Ebene $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$, wenn die Netzecke auf der Einheitslinie $AD$, $BD$, $CD$ liegt; ferner in der Nähe der $x$-, $y$-, $z$-Axe, wenn die Netzecke ins Einheitsdreieck $BCD$, $CAD$, $ABD$ fällt; endlich entfernt von den Koordinatenebenen, wenn die Netzecke der Zentralpunkt selbst ist.

Aus dieser Betrachtung ergiebt sich ein bemerkenswerter Unterschied zwischen den Näherungs- und Hilfsflächen hinsichtlich ihres

Einflusses auf das Verhalten der Fläche. Die Hilfsflächen enthalten je unendlich viele massgebende Scharen von Raumkurven, sind also selbst im allgemeinen in einem grösseren Teile ihres Verlaufes massgebend. Der Einfluss der Näherungsflächen mit je nur einer massgebenden Schar von Raumkurven auf das Verhalten der Fläche konzentriert sich auf einen räumlich beschränkten Teil der Fläche, ist aber gerade darum umso augenfälliger.

Während bei den trinomischen und polynomischen Näherungsflächen eine unabsehbar grosse Zahl verschiedener Typen auftritt, lässt sich für die binomischen Hilfsflächen folgende Einteilung aufstellen.

Die binomische Hilfsfläche sei $x^\alpha = y^\beta z^\gamma$ (wo $x, y, z$ beliebig vertauschbar sind).

A) Kein Exponent ist Null. Zwei Grenzpunkte. Rand- und Eckmasche.

I. $\alpha < \beta + \gamma$. Uniplanarer Typus. Eine Tangentialebene. Zentralrand- und Nebeneckmasche.

1. $\alpha < \beta \leqq \gamma$. Alle Einheitspunkte auf der Begrenzung der Zentralmasche. Die Tangentialebene wird von der Hilfsfläche in zwei torsalen* Geraden berührt und fällt mit der Tangentialebene längs derselben zusammen, z. B. $x = y^2 z^2$.
2. $\alpha = \beta < \gamma$. Zwei Einheitspunkte auf der Begrenzung der Zentralmasche, der dritte ist Grenzpunkt. Die Tangentialebene wird von der Hilfsfläche in einer torsalen Geraden berührt, längs deren sie Tangentialebene ist und in einer skrolaren* Geraden geschnitten, z. B. $x = yz^2$.
3. $\beta < \alpha < \gamma$. Zwei Einheitspunkte in der Begrenzung der Zentralmasche, der dritte in derjenigen der Nebenmasche. Die Tangentialebene wird von der Hilfsfläche in einer torsalen Geraden berührt, längs deren sie Tangentialebene ist und in einer anderen torsalen Geraden geschnitten, längs deren sie nicht Tangentialebene ist, z. B. $x^2 = yz^3$.
4. $\beta = \alpha = \gamma$. Zwei Einheitspunkte sind Grenzpunkte, der dritte liegt in der Begrenzung der Zentralmasche. Die Tangentialebene wird von der Hilfsfläche in zwei skrolaren Geraden geschnitten, z. B. $x = yz$.
5. $\beta < \alpha = \gamma$. Ein Einheitspunkt auf der Begrenzung der Zentralmasche, einer auf der der Nebenmasche, der dritte ist Grenzpunkt. Die Tangentialebene wird von der Hilfsfläche in einer skrolaren Geraden und in einer torsalen, längs der sie nicht Tangentialebene ist, geschnitten, z. B. $x^2 = yz^2$.
6. $\beta \leqq \gamma < \alpha$. Ein Einheitspunkt auf der Begrenzung der Zentralmasche, zwei auf der der Nebenmasche. Die Tangentialebene wird von der Hilfsfläche in zwei torsalen Geraden geschnitten, längs deren sie nicht Tangentialebene ist z. B. $x^3 = y^2 z^2$.

* Vergl. Salmon-Fiedler, Analyt. Geom. d. Raumes II., 3. Aufl. S. 372 (Anm.).

II. $\alpha = \beta + \gamma$. Konischer Typus. Hilfsfläche ist ein Kegel. Eine Lateralrand- und eine Lateraleckmasche. Zwei Einheitspunkte auf der Begrenzung der ersteren, einer auf derjenigen der letzteren, z. B. $x^2 = yz$.

III. $\alpha > \beta + \gamma$. Biplanarer Typus. Zwei Tangentialebenen. Eine Zentraleck- und eine Nebenrandmasche. Zwei Einheitspunkte auf der Begrenzung der ersteren, einer auf derjenigen der letzteren, z. B. $x^3 = yz$.

B) Ein Exponent $\gamma = 0$. Nur ein Grenzpunkt. Netzlinie ist Ecklinie. Cylindrischer Typus. Die Fläche ist ein Cylinder. Zwei Randmaschen.

1. $\alpha < \beta$. Zentral- und Nebenmasche, z. B. $x = y^2$.
2. $\alpha = \beta$. Zwei Lateralmaschen. Der Cylinder zerfällt in Ebenen, z. B. $x^2 = y^2$.

Je nachdem $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gerade oder ungerade sind, ergeben sich (ausschliesslich der zerfallenden) 35 gestaltlich verschiedene Spezies von binomischen Hilfsflächen.

## § 8.

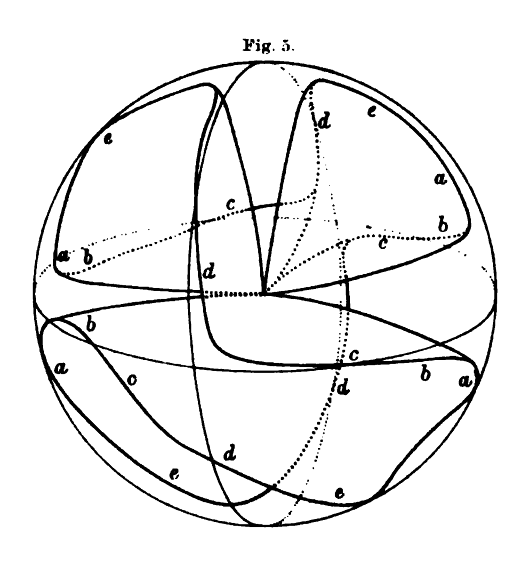
### Untersuchung einer Fläche in der Nähe eines singulären Punktes.

Jede Fläche durch den Ursprung, deren niederste Glieder nicht für sich gleich Null gesetzt die Gleichung einer binomischen Hilfsfläche oder einer polynomischen Näherungsfläche liefern, besitzt ein Polygon mit mehreren Flächen und Kanten, also auch ein Netz mit Ecken und Linien und schliesst sich daher an eine Anzahl von Näherungsflächen und Hilfsflächen an. In komplizierteren Fällen ist zu ihrer bildlichen Darstellung das in § 6 gegebene Verfahren zur Zeichnung der Kugelkurve nicht mehr ausreichend. Aber die letztere kann nunmehr aus Näherungsbögen zusammengesetzt werden, welche von den Näherungs- und Hilfsflächen an die Hand gegeben werden. Man zeichnet nach § 6 die Bilder aller Näherungsflächen ($a$, $b$, $c$...) und aller Hilfsflächen ($ab$, $\overline{ac}$,...), welche die Ecken und Linien des Netzes liefern. In diesen Figuren verdickt* man sämtliche Bögen (Näherungsbögen) der Kugelkurve, welche man gemäss § 7 als massgebend erkennt. Die Näherungsbögen der Näherungsflächen werden nun in die Hauptfigur eingetragen und durch Kurvenbögen, die den Näherungsbögen der Hilfsflächen entsprechen, verbunden; so erhält man den genäherten Verlauf der Kugelkurve der Fläche. Man kann dann diese Kurve natürlich durch Konstruktion einzelner Punkte genauer erhalten. Um bei der Verbindung der Näherungsbögen systematisch zu verfahren, kann man eine Gerade (ein Lineal) um den Zentralpunkt des Netzes im Sinne des Uhrzeigers drehen; man führt dann jede Verbindung

* Vergl. das Verfahren bei Reuschle, Praxis der Kurvendiskussion. Stuttgart 1886, S. 4 flg.

mittelst eines Hilfsflächenbogens aus, während die Gerade die zugehörige Netzlinie passiert. Geht die Gerade in der Anfangslage durch den Punkt $C$, so erhält man den Verlauf der Kugelkurve zuerst in der Nähe der Ebene $z = 0$, dann geht man weiter vorbei an der $y$-Axe, der Ebene $x = 0$, der $z$-Axe, der Ebene $y = 0$, der $x$-Axe zurück zur Ebene $z = 0$. Damit hat man die ganze Kugelkurve umlaufen. (Beispiel: In Figur 5 werden so der Reihe nach die Verbindungen $cd$, $de$, $ea$, $ab$, $bc$ ausgeführt.) Praktisch ist dieses Verfahren bei Zentralmaschen. Bei Lateralmaschen müssen ausserdem die Näherungsbögen der den Endpunkten der Zentrallinie entsprechenden Näherungsflächen durch die vom Tangentialkegel gelieferten Näherungsbögen verbunden werden. Bei Radialmaschen existieren drei oder mehrere Hilfskegelflächen, welche die Verbindung der vom Tangentialkegel gelieferten Näherungsbögen mit den übrigen Teilen der Kugelkurve herstellen. Durch dieses Verfahren werden die einzelnen Teile der Kugelkurve den Näherungs- und Hilfsflächen zugeordnet; sie sind daher in den Figuren mit $a, b\ldots$ bezeichnet. Und zwar gehört zu jeder Näherungs- und Hilfsfläche, also auch zu jeder Ecke und Linie des Netzes, ein Teil der Kugelkurve oder mehrere solche.

Fig. 5.




Freilich kann es auch vorkommen, dass der massgebende Teil einer Näherungs- oder Hilfsfläche imaginär wird. So zerfällt in dem Beispiele $x^3y^3 - x^2y^2z^2 + x^3z^5 + y^3z^5 - z^{10} - x^{12} - y^{12} = 0$ die Kugelkurve wegen der imaginären Hilfsflächen $y^2z^2 + x^{10} = 0$ und $x^2z^2 + y^{10} = 0$ in zwei völlig getrennte Teile, von denen der eine sich dem Kegel $xy - z^2 = 0$, der andere den Ebenen $x = 0$ und $y = 0$ anschliesst.

Die Hauptpunkte der Kugelkurve werden durch diejenigen Hilfsflächen geliefert, welche den Ecklinien des Netzes entsprechen. Dabei ist es praktisch, die betreffenden Teile der Kugelkurve derjenigen Näherungsfläche zuzuordnen, deren zugehörige Ecke den Endpunkt der betreffenden Ecklinie bildet.

Ergiebt ferner ein Schnittpunkt des Netzes und des Polarnetzes der in eine Ecke oder auf eine Linie des Netzes fällt, eine Umrisslinie der Fläche, so berührt diese die Kugelkurve innerhalb des

Näherungsbogens, welchen die zur Ecke oder Linie gehörige Näherungs- oder Hilfsfläche geliefert hat.

Im allgemeinen reichen, wie bei ebenen Kurven, so auch bei Flächen die vom analytischen Polyeder gelieferten Näherungs- und Hilfsflächen, also auch die niedrigsten Glieder der Flächengleichung, von denen diese abhängen, aus, um die Gestalt der Fläche im Ursprunge zu bestimmen. Eine Ausnahme tritt aber ein (analog wie bei ebenen Kurven), wenn Hilfs- oder Näherungsflächen mehrfach zählend vorkommen. Alsdann müssen zur Bestimmung der Flächengestalt höhere Glieder, eventuell auch im Innern des Polygons gelegene, beigezogen werden. In gestaltlicher Beziehung sei nur bemerkt, dass die mehrfach zählenden Näherungsbogen durch Beiziehung höherer Glieder in mehrere einfache Näherungsbogen umgewandelt werden, und dass manchmal ein doppelt (oder $2n$-fach) zählender Näherungsbogen in einem Teile seines Verlaufes ungültig wird, indem die zwei nebeneinander herlaufenden, durch Umwandlung entstandenen Näherungsbogen, eine bestimmte Fläche berührend, ineinander übergehen (sich gewissermassen miteinander verzweigen). Näher kann hier auf diesen Gegenstand nicht eingegangen werden.

Beispiele:

1. Untersuchung der Fläche

$$xy^2 - x^3z - x^5 - y^5 - 32z^5 = 0.$$

Das Netz, Figur 2, und die Umrisslinien sind bereits in § 4 angegeben worden. Tangentialgebilde ist $xy^2$.

Näherungsflächen:

$a = y^2 \quad - x^2z - x^4 \quad = 0$ (bei der $x$-Axe),

$b = xy^2 - x^3z - 32z^5 = 0$ (bei der $z$-Axe in der Nähe der Ebene $y = 0$),

$c = xy^2 - y^5 \quad - 32z^5 = 0$ (bei der Ebene $x = 0$).

Hilfsflächen:

$\overline{aC} = y^2 \quad - x^4 \quad = 0$ (Hauptpunkte auf $z = 0$),

$\overline{aB} = z \quad + x^2 \quad = 0$ (Hauptpunkte auf $y = 0$),

$\overline{ab} = y^2 \quad - x^2z \quad = 0$ (bei der Ebene $y = 0$),

$\overline{bB} = - x^3 \quad + 32z^4 = 0$ (Hauptpunkte auf $y = 0$),

$\overline{bc} = xy^2 - 32z^5 = 0$ (bei der $z$-Axe mit Annäherung an $x = 0$),

$\overline{cA} = y^5 \quad + 32z^5 = 0$ (Hauptpunkte auf $x = 0$),

$\overline{cC} = x \quad - y^3 \quad = 0$ (Hauptpunkte auf $z = 0$).

Von den Umrisslinien (siehe § 4) gehört die erste der Näherungsfläche $a$, die zweite der Hilfsfläche $\overline{bB}$, die dritte der Hilfsfläche $\overline{bc}$ an. Die Gestalt der Fläche zeigt Figur 4.

2. Untersuchung der Fläche:

$$xyz + x^2y^2 - y^4 + xz^3 + z^4 + x^5 = 0.$$

Das Netz, in Figur 3 ausgezogen, hat die Ecken:

$a = (3, 8, 4)$, $b = (2, 3, 5)$, $c = (1, 1.2)$, $d = (2, 1, 1)$, $e = (1, 2, 1)$

die Zentralmasche $abcdea(xyz)$ und die Nebenmaschen

$CbcC(x^2y^2)$, $CcdAC(y^4)$, $BaeB(xz^3)$, $BedAB(z^4)$, $BabCB(x^5)$.

Tangentialgebilde ist $xyz$.

Näherungsflächen:

$a = yz + z^3 + x^4 = 0$ ($x$-Axe mit Annäherung an $y = 0$),

$b = yz + xy^2 + x^4 = 0$ ($x$-Axe mit Annäherung an $z = 0$)

$c = xz + x^2y - y^3 = 0$ (bei der Ebene $z = 0$),

$d = xyz - y^4 + z^4 = 0$ (bei $x = 0$),

$e = xy + xz^2 + z^3 = 0$ (bei $y = 0$).

Hilfsflächen:

$\overline{aB} = z^3 + x^4 = 0$ (Hauptpunkte auf $y = 0$),

$\overline{ab} = yz + x^4 = 0$ (bei der $x$-Axe),

$\overline{bC} = y^2 + x^3 = 0$ (Hauptpunkte auf $z = 0$),

$\overline{bc} = z + xy = 0$ (bei der $x$-Axe mit Annäherung an $z = 0$),

$\overline{cC} = x^2 - y^2 = 0$ (Hauptpunkte auf $z = 0$),

$\overline{cd} = xz - y^3 = 0$ (bei der $y$-Axe),

$\overline{dA} = y^4 - z^4 = 0$ (Hauptpunkte auf $x = 0$),

$\overline{de} = xy + z^3 = 0$ (bei der $z$-Axe),

$\overline{eB} = x + z = 0$ (Hauptpunkte auf $y = 0$),

$\overline{ea} = y + z^2 = 0$ (bei der $x$-Axe mit Annäherung an $y = 0$).

Polarfläche vom Punkte $(\xi, \eta, \zeta, 0)$ in Bezug auf die Fläche:

$$\xi(yz + 2xy^2 + z^3 + 5z^4) + \eta(xz + 2x^2y - 4y^3) + \zeta(xy + 3xz^2 + 4z^3) = 0.$$

Das Polarnetz, in Figur 3 quergestrichelt, hat die Ecken:

$a' = (1, 1, 1)$, $b' = (1, 3, 3)$, $c' = (2, 1, 2)$, $d' = (2, 2, 1)$,

die Radialmaschen:

$Cb'a'c'C(xy)$, $Bd'a'b'B(xz)$ und $Ac'a'd'A(yz)$

und die Nebenmaschen:

$Ac'CA(y^3)$, $Bd'AB(z^3)$, $Cb'BC(x^4)$.

Umrisslinien:

a) Kreuzung von $ab$ und $a'b'$ im Punkte $(1, 2, 2)$ giebt:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \varepsilon \\ y = \sqrt{\frac{\eta}{\zeta}}\,\varepsilon^2 + \cdots \\ z = -\sqrt{\frac{\zeta}{\eta}}\,\varepsilon^2 + \cdots \end{array}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{array}{l} x = \varepsilon \\ y = -\sqrt{\frac{\eta}{\zeta}}\,\varepsilon^2 + \cdots \\ z = \sqrt{\frac{\zeta}{\eta}}\,\varepsilon^2 + \cdots \end{array}\right\}$$

Sie gehören dem Näherungsbogen $ab$ an.

b) Kreuzung von $\overline{cd}$ mit $\overline{a'c'}$ im Punkte (3, 2, 3) giebt:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{\xi}{\zeta}}\,\varepsilon^3 + \cdots \\ y &= -\varepsilon^2\,{}^* \\ z &= -\sqrt{\frac{\zeta}{\xi}}\,\varepsilon^3 + \cdots \end{aligned}\right\}.$$

Dieselbe gehört dem Bogen $\overline{cd}$ an.

c) Kreuzung von $\overline{dc}$ mit $a'd'$ im Punkte (3, 3, 2) giebt:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\,\varepsilon^3 + \cdots \\ y &= -\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\,\varepsilon^3 + \cdots \\ z &= \varepsilon^2 \end{aligned}\right\}.$$

Sie gehört zum Bogen $dc$.

Die Gestalt der Fläche giebt Figur 5.

Weitere Beispiele sind:

$$\left.\begin{aligned} xy^2 + x^2z^2 + y^4 + x^5 + z^6 = 0 \\ x^2yz + xz^5 + y^3z^4 - y^8 + z^{10} = 0 \end{aligned}\right\}$$ die Kugelkurve besteht je aus einen Zug.

$$\left.\begin{aligned} x^2 + xz^2 + xy^3 + y^8 - z^6 = 0 \\ x^3y + x^2yz + x^5 + y^3z^2 + xy^6 = 0 \end{aligned}\right\}$$ die Kugelkurve besteht je aus zwei Zügen.

$$x^2y^2z + xyz^3 + x^5y + x^4z^2 + xy^4z - z^6 + x^7 + y^3z^4 - y^{11} = 0,$$

die Kugelkurve besteht aus drei Zügen und besitzt in der Nähe der $y$-Axe eigentümliche Ausbiegungen.

---

* Hier wurde $y = -\varepsilon^2$ (nicht $y = \varepsilon^2$) gesetzt, um imaginäre Werte des Parameters zu vermeiden.

# Die kinematische Theorie der Hyperboloiden-reibungsräder.*

Von

Dr. Fr. Schilling,

Privatdozent an der Technischen Hochschule zu Aachen.

Hierzu Tafel I und II.

## Einleitung.

Hyperboloidenreibungsräder, deren kinematische Theorie den Inhalt dieser Arbeit bildet, sind ihrer Gestalt nach entsprechende Segmente zweier einschaliger Rotationshyperboloide, die zu einander windschiefe Axen besitzen und sich längs einer Erzeugenden berühren. Gemäss dieser Eigenschaft können solche Räder, materiell ausgeführt, dazu dienen, die Umdrehung um die eine ihrer festgelagerten Axen auf die andere zu übertragen. Hyperboloidenpaare der genannten Art treten uns in der Kinematik noch in anderer Bedeutung entgegen. Sie stellen auch die Axoide für die gegenseitige Bewegung zweier Körper dar, die um zwei windschiefe Axen mit unveränderlichem Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten rotieren, und bilden als solche die Grundkörper für Hyperboloidenzahnräder. Dass diese beiden Verwendungsarten solcher Hyperboloide in der That wohl zu unterscheiden sind, werden wir am besten klar machen können, wenn wir zunächst von dem speziellen Falle sprechen, in dem die Axen einander parallel sind beziehungsweise sich schneiden. Dann gehen die Hyperboloide, mögen sie Reibungsräder liefern sollen oder als Axoide gelten, in zwei Kreiscylinder beziehungsweise zwei Rotationskegel mit derselben Spitze über, die sich wieder längs einer Erzeugenden berühren. Für sie gelten die folgenden drei Sätze:

1. Sind irgend zwei entsprechende Segmente der Cylinder beziehungsweise Kegel als Reibungsräder ausgebildet, so ändert sich das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeit des einen Rades zu der des anderen nicht, mag jenes oder dieses das treibende sein.

2. Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten bleibt gleichfalls ungeändert, welcher Stelle der Cylinder beziehungsweise Kegel diese Segmente auch angehören mögen.

---

* Die vorliegende Arbeit ist die weitere Ausführung des Vortrages, den ich am 4. März 1896 zum Zwecke meiner Habilitation an der Kgl. Technischen Hochschule zu Aachen gehalten habe.

3. Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten der Cylinder- beziehungsweise Kegelreibungsräder ist identisch mit demjenigen der Zahnräder, deren Grundkörper die gleichen Cylinder oder Kegel sind.

Man sollte meinen, dass diese Sätze auch in dem allgemeinen Falle windschiefer Axen ihre Gültigkeit behielten. Dies findet jedoch keineswegs statt. Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten hyperboloidischer Reibungsräder ändert vielmehr seinen Wert, einmal wenn man an Stelle des einen Rades das andere als das treibende wählt, sodann auch je näher oder weiter entfernt von den Kehlkreisen der Hyperboloide die Segmente ausgewählt werden. Hiermit ist zugleich auch das Bestehen des dritten Satzes nicht mehr verträglich. Dieser Unterschied ist bisher in den Lehrbüchern der Kinematik oder technischen Mechanik nicht bemerkt worden; ja es finden sich dort bei gelegentlicher Erwähnung hyperboloidischer Reibungsräder ungenaue oder gar unrichtige Angaben.* Es ist das Hauptziel der vorliegenden Arbeit, die soeben ausgesprochenen Behauptungen zu beweisen und als positives Resultat insbesondere den Ausdruck für das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten hyperboloidischer Reibungsräder aufzustellen, freilich unter der sich als notwendig erweisenden Beschränkung auf sehr dünne Räder.

Was die in den ersten Paragraphen durchgeführten geometrischen Untersuchungen meiner Arbeit betrifft, so war es zunächst nötig, eine neue Einführung der Hyperboloidenpaare zu geben; denn diejenige, welche sich in den bisherigen Darstellungen findet, erweist sich für unseren Zweck nicht brauchbar, da sie von vornherein die Verwendung der Hyperboloide als Axoide im Auge hat. An diese Einführung schliesst sich eine eingehende Untersuchung der besonderen geometrischen Eigenschaften, welche die verschiedenen Fälle der Hyperboloidenpaare darbieten. Insbesondere habe ich es mir angelegen sein lassen, genaue Begriffsbestimmungen zu geben. Da die bezüglichen Abschnitte in den Lehrbüchern oder Monographieen** in dieser Hinsicht viel zu knapp

* Ich nenne hier: Weisbach-Herrmann, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. III. Teil, 1. Abt.; S. 405 u. 406. Braunschweig 1876; Grashof, Theoretische Maschinenlehre, II. Band, S. 81 und 88. Leipzig 1877. — An diesen Stellen wird ausdrücklich den Hyperboloidenreibungsrädern dasselbe Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten zugesprochen, welches Hyperboloidenzahnräder besitzen, die dem gleichen Hyperboloidenpaare angehören, was keineswegs richtig ist. (Übrigens findet sich an der letztgenannten Stelle des Werkes von Grashof auch insofern ein Irrtum, als in dem fraglichen Falle, für den die Gleichung $\omega \sin \varphi = \omega' \sin \varphi'$ gilt, sich die Hyperboloide gar nicht als Elementenflächen ergeben, sondern wie im allgemeinen Falle als Evolventenflächen bestimmter Schraubenlinien, wie wir hier nicht weiter ausführen wollen.)

** Als Litteratur sei erwähnt: Weisbach-Herrmann, l. c. §46 u. §86; Grashof, l. c. §24—26; Mac Cord, Kinematics, Nr. 151—170. New-York 1893. Hier finden sich besonders gut ausgeführte Figuren, während die Betrachtungen des Textes weniger übersichtlich sind. Tessari, Sopra la costruzione degli ingranaggi ad assi non concorrenti. Annali del R. Museo Industriale Italiano. Separatabdr. Torino 1871.

gehalten und nicht frei von Ungenauigkeiten* sind — es steht auch stets die Bedeutung der Hyperboloide als Axoide im Vordergrunde —, so kommen sie kaum neben meiner ausführlichen Untersuchung in Betracht, die gewiss vieles Neue bringt. Eine selbständige und vollständige Behandlung hyperboloidischer Reibungsräder ist meines Wissens überhaupt nirgends gegeben worden. Soll ich noch eine Einzelheit speziell herausgreifen, so will ich den Fall der sich berührenden Hyperboloide erwähnen, in dem sie sich ausserdem in zwei reellen Erzeugenden durchdringen, eine Möglichkeit, die an und für sich bekannt ist. Hier tritt jedoch die bisher nicht berührte Frage in den Vordergrund, ob trotz des reellen Durchdringens der Flächen entsprechende Segmente sich als Reibungsräder verwenden lassen. Wir werden sehen, dass dies in der That unter Beobachtung gewisser Bedingungen geschehen kann, die angegeben werden.

Wo sich eine Beziehung zu den Resultaten verwandter Gebiete zeigt, habe ich nicht unterlassen auf letztere in einer Anmerkung hinzuweisen. Ich habe mich bemüht, die Untersuchung mit elementaren und anschaulichen Mitteln durchzuführen; hierzu erwiesen sich besonders zweckmässig einfache Methoden der darstellenden Geometrie. Der Gegenstand selbst dürfte, hoffe ich, in gleicher Weise dem Mathematiker wie dem Techniker Interesse bieten.

## § 1.

### Ableitung der Grundformel $p:q = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta$.

Wir denken, es seien uns irgendwie zwei einschalige Rotationshyperboloide mit den Axen $a$ und $b$ gegeben, die sich längs der Erzeugenden $c$ berühren.** Da die gemeinsamen Normalen beider Flächen die drei Geraden $a, b$ und $c$ schneiden, und zwar letztere unter rechtem Winkel, so bilden sie ein hyperbolisches Paraboloid. Weil ferner die Gerade $c$ alle Erzeugende der anderen Schar rechtwinklig schneidet, so muss sie zugleich eine Scheitelerzeugende des Paraboloids sein. Denn anderenfalls würde $c$, an den beiden Symmetrieebenen des Para-

* Z. B. wird bei Weisbach-Herrmann S. 233 erwähnt, „dass die Axoide sich von aussen berühren, solange die Erzeugungslinie mit den Axen spitze Winkel bildet.“ Hiermit vergleiche man meine Ausführungen auf S. 46, die zeigen, dass im dritten Hauptfalle diese Behauptung nicht zutrifft.

** Die sich längs einer Erzeugenden berührenden einschaligen Rotationshyperboloide, sowie ihre speziellen Fälle, sind keineswegs die einzigen Rotationsflächen, deren Segmente durch Reibungskräfte die Umdrehung einer Axe $a$ auf eine zu ihr im allgemeinen windschiefe Axe $b$ zu übertragen geeignet sind. Man vergleiche Rohn und Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Band II, S. 44 flg., Leipzig 1896. Dort ist das allgemeine Gesetz angegeben, nach dem sich beliebige Rotationsflächen bestimmen lassen, die sich längs einer Kurve berühren, sowie ein komplizierteres Beispiel, besonders nach der zeichnerischen Seite, besprochen. Erwähnt sei hier jedoch, dass im Falle paralleler oder sich

boloids wiederholt gespiegelt, noch drei weitere Erzeugende geben, welche die gleiche Eigenschaft besässen, sodass diese vier Erzeugenden zusammen ein Viereck geben würden, in dem jede Seite auf den benachbarten senkrecht steht, das heisst ein ebenes Viereck, was nicht möglich ist. Das Paraboloid ist daher ein solches, dessen Scheitelerzeugende aufeinander senkrecht stehen. Da auch die zweite Scheitelerzeugende alle Erzeugenden der anderen Schar rechtwinklig schneidet, so gewinnen wir den Satz:

Die Berührungserzeugende $c$ muss die Gerade des kürzesten Abstandes der Axen $a$ und $b$ treffen, welche die zweite Scheitelerzeugende ist. Diese als notwendig erkannte Bedingung erweist sich jetzt umgekehrt zugleich auch als hinreichend. Wir können in der That von einem beliebigen hyperbolischen Paraboloid ausgehen, dessen Scheitelerzeugende sich rechtwinklig schneiden, die eine von ihnen als Berührungserzeugende $c$ wählen, irgend zwei andere Erzeugende derselben Schar als Axen $a$ und $b$, und wir sind sicher, dass die Rotation der Geraden $c$ um $a$ und $b$ zwei sich längs $c$ berührende Hyperboloide liefert. Hierbei mögen zwei Fälle unterschieden sein, die sich ergeben, je nachdem die Axen $a$ und $b$ auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite der Scheitelerzeugenden ausgewählt werden.

In Figur 2 (Tafel II) sei eine solche Konfiguration der drei Geraden $a$, $b$ und $c$ im Grund- und Aufriss dargestellt. Ihre Lage gegen die Tafeln ist so gewählt, dass die Gerade $d$ des kürzesten Abstandes von $a$, $b$ und $c$ senkrecht zur ersten Tafel steht und demnach die Schnittpunkte $A$, $B$ und $C$ in erster Projektion zusammenfallen.

Wir wollen fernerhin stets voraussetzen, dass die erste Projektion der unteren Axe, die wir mit $a$ bezeichnen, um einen spitzen (beziehungsweise rechten) Winkel $\gamma$ im positiven Sinne* um $A'$ gedreht werden muss, bis sie zum ersten Male mit der ersten Projektion der oberen Axe $b$ zusammenfällt. Falls diese Annahme für zwei gegebene Axen $a$ und $b$ nicht erfüllt ist, haben wir an ihrer Statt ihr Spiegelbild zu

---

schneidender Axen, etwa der Geraden $PR$ und $QR$ der Figur 1 (Tafel II), jede beliebige Gerade $PQ$ ihrer Ebene durch ihre Rotation um die Axen zwei sich längs derselben berührende Kegel (beziehungsweise Cylinder) liefert. Nur wenn die letztgenannte Gerade den Axen gleichfalls parallel ist beziehungsweise durch ihren Schnittpunkt geht, sind die Cylinder oder Kegel Grenzfälle unserer allgemeinen Hyperboloidenpaare. Zu den Hyperboloidenpaaren und ihren speziellen Fällen, die wir im Texte betrachten, sind daher noch die soeben erwähnten Fälle hinzuzunehmen, um alle Paare von Rotationsflächen zu umfassen, die sich längs einer Geraden berühren. (Abgesehen ist hier indes von dem ausgearteten Falle, dass man für parallele Axen als Berührungserzeugende eine beliebige, sie rechtwinklig kreuzende Gerade wählt, deren Rotation um jede Axe das doppelt zu denkende Äussere eines Kreises liefern würde.)

* Der positive Drehungssinn soll dem Gange des Uhrzeigers entgegengesetzt sein.

wählen. Jene beeinträchtigt daher die Allgemeinheit unserer Betrachtung nicht. In der Figur sind die Geraden $a'$ und $b'$ in Rücksicht auf spätere Verwendung (S. 52) mit Pfeilspitzen versehen der Art, dass die hierdurch ausgezeichneten Richtungen den spitzen (beziehungsweise rechten) Winkel $\gamma$ bilden.* Sodann werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\alpha = \sphericalangle\,(\overrightarrow{a', c'}), \quad \beta = \sphericalangle\,(\overrightarrow{c', b'}) \quad \text{und} \quad \gamma = \sphericalangle\,(\overrightarrow{a', b'})$$

mit der Relation: $\alpha + \beta = \gamma$,

sowie: $$p = \overrightarrow{A''C'''}, \quad q = \overrightarrow{C'''B''} \quad \text{und} \quad s = \overrightarrow{A''B''}$$

mit der Relation: $p + q = s$.

Hier bezeichnet $\alpha$, wie durch den hinzugefügten Pfeil näher angedeutet sein soll, den Winkel, durch den man die Gerade $a'$ im positiven Sinne um $A'$ drehen muss, bis sie zum ersten Male mit $c'$ zusammenfällt, $\beta$ den Winkel, durch den man die Gerade $c'$ drehen muss, bis sie zum ersten Male mit $b'$ zusammenfällt, und zwar im positiven oder negativen Sinne, je nachdem $c'$ den Winkel $\gamma$ oder seine Nebenwinkel durchschneidet. Als positiv sei auf der Geraden $d$ die Richtung von $A$ nach $B$ gewählt. Die Strecke $p$ z. B. ist daher positiv oder negativ, je nachdem $C'''$ oberhalb oder unterhalb $A''$ liegt.

Es sei jetzt noch eine beliebige Erzeugende des hyperbolischen Paraboloids hinzugefügt, welche die Geraden $a$, $b$ und $c$ entsprechend in den Punkten $P$, $Q$, $R$ schneiden möge. Da sie die horizontal gelegene Gerade $c$ unter rechtem Winkel schneidet, ist auch in der Projektion $\sphericalangle\, P'R'A'$ gleich $\frac{\pi}{2}\cdot$ Dann gilt:

$$P'R' : R'Q' = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta, \quad P'R' : R'Q' = P''R'' : R''Q'' = A''C''' : C'''B''.$$

Also ist: $$A''C''' : C'''B'' = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta$$
oder

1) $$p : q = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta.$$

Das Verhältnis der Abschnitte, in welche die Berührungserzeugende $c$ den kürzesten Abstand der Axen $a$ und $b$ teilt, ist gleich dem Verhältnisse der Tangenten der Winkel, unter denen sie die Axen kreuzt.

Diese Gleichung bleibt bestehen, auch in Rücksicht auf die Vorzeichenbestimmung der einzelnen Grössen, wie man auch immer neben der Scheitelerzeugenden $c$ eines geeigneten hyperbolischen Paraboloids die Axen $a$ und $b$ aus den Erzeugenden derselben Schar auswählen mag. Man überzeugt sich hiervon am einfachsten, indem man in Figur 2 die Axen $a$ und $b$ unverändert, aber $c'$ mit dem Punkte $R'$ sich um $A'$ drehen lässt. Für jede Lage von $c'$ sind durch $R'$ auch die Punkte $P'$, $Q'$ und $P''$, $Q''$, $R''$ bestimmt und damit auch die zweite

* Natürlich könnte man an Stelle des so ausgezeichneten Winkels auch seinen Scheitelwinkel wählen.

Projektion $c''$. Hierbei wird man schon zur Unterscheidung der drei Fälle geführt, die am Schlusse des nächsten Paragraphen durch ihre Ungleichungen umgrenzt sind.

## § 2.

## Die verschiedenen möglichen Lagen der Berührungserzeugenden für gegebene Axen.

Sind zwei der Geraden $a$, $b$, $c$ gegeben, so bleiben für die dritte noch einfach unendlich viele Lagen möglich, entsprechend der analytischen Thatsache, dass zwischen den Grössen $p$, $q$, $\alpha$, $\beta$ nur eine Bedingungsgleichung besteht. Wir wissen bereits, wenn ausser $c$ noch eine der Axen gegeben ist, so ist die andere auf einem bestimmten hyperbolischen Paraboloid gelegen.

Jetzt seien beide Axen $a$ und $b$ gegeben — und zwar in allgemeiner Lage, indem wir die Betrachtung der speziellen Lagen uns für den § 6 aufsparen —, welche Lagen vermag dann die Berührungserzeugende $c$ anzunehmen? Wir haben diese Frage bereits am Schlusse des vorigen Paragraphen gestreift; ihre anschauliche Beantwortung wird uns durch nähere Diskussion der Gleichung $p:q = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta$ geliefert.

Wir führen ein Cylinderkoordinatensystem $z$, $r$, $\sphericalangle\, \varphi$ ein. Als $z$-Axe sei die Gerade des kürzesten Abstandes $AB$ von $a$ und $b$ gewählt, als ihr Nullpunkt der Mittelpunkt des letzteren, als ihre positive Richtung, wie oben, die von $A$ nach $B$. Ferner sei $\varphi = 0$ diejenige durch die $z$-Axe begrenzte Halbebene, welche einen der spitzen Winkel halbiert, unter dem sich die Axen $a$ und $b$ kreuzen. In demjenigen Drehungssinne sei $\varphi$ positiv gerechnet, der sich dem Gange des Uhrzeigers entgegengesetzt erweist, wenn man von $B$ nach $A$ blickt. Ein beliebiger Punkt $S$ des Raumes ist dann durch die Länge $r$ seines Lotes auf die $z$-Axe, die Koordinate $z$ des Fusspunktes, sowie den Winkel $\varphi$, den die Halbebene durch $S$ und $z$ mit der Halbebene $\varphi = 0$ bildet, bestimmt und demgemäss eine beliebige Lage der auf $AB$ senkrechten Geraden $c$ durch ein solches Wertepaar $z$, $\varphi$. Auch in Rücksicht auf die Vorzeichen gelten stets die folgenden Beziehungen:

$$p = \frac{s}{2} + z, \quad q = \frac{s}{2} - z$$

und

$$\alpha = \frac{\gamma}{2} + \varphi, \quad \beta = \frac{\gamma}{2} - \varphi.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung 1) ein, so ergiebt sich:

$$\left(\frac{s}{2} + z\right) : \left(\frac{s}{2} - z\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2} + \varphi\right) : \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2} - \varphi\right)$$

oder:

$$z = \frac{s}{2 \sin \gamma} \cdot \sin 2\varphi. \tag{2}$$

Führt man die Schnittgeraden der Ebene $z = 0$ mit den Halbebenen $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ als positive $x$- und $y$-Koordinatenaxe ein, so gilt:

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

und unsere letzte Gleichung lässt sich überführen in:

$$2') \qquad z = \frac{s}{2\sin\gamma} \cdot \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Damit man alle Lagen der Berührungserzeugenden $c$ erhält, muss $\varphi$ alle Werte des durch folgende Ungleichung bestimmten Intervalles

$$-\frac{\gamma}{2} \leqq \varphi < \left(\pi - \frac{\gamma}{2}\right)$$

durchlaufen. Für jeden Wert $\varphi$ giebt die Gleichung 2) eindeutig die zugehörige Koordinate des Schnittpunktes $C$ von $c$ mit der $z$-Axe an, während umgekehrt zu jedem Werte $z$ des Intervalles, das durch folgende Ungleichung gegeben ist:

$$-\frac{s}{2\sin\gamma} \leqq z \leqq +\frac{s}{2\sin\gamma}$$

zwei reelle Werte $\varphi$ (beziehungsweise ein solcher in den Grenzen) in dem für diese Grösse angegebenen Intervalle gehören.

Um indes eine anschaulichere Vorstellung von der durch die Gleichung 2) definierten Fläche zu bekommen, denke man um die $z$-Axe den Cylinder mit dem Radius 1 gelegt und seine Schnittkurve mit der Fläche auf eine Ebene abgewickelt. Deutet man $\varphi$ und $z$ als rechtwinklige Koordinaten dieser Ebene, so stellt die Gleichung 2) unmittelbar die Gleichung der abgewickelten Kurve dar, Figur 3 (Tafel II). Sie ist eine sogenannte „Sinusoide" das heisst eine periodische Kurve, die aus der gewöhnlichen Sinuslinie $z = \sin\varphi$ durch Affinität entsteht, wobei die $\varphi$-Axe Affinitätsaxe ist und die Richtung der Affinitätsstrahlen auf dieser senkrecht steht. Für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ bezw. $\frac{3\pi}{4}$ (und für die analogen Werte) erreicht die Kurve ihr Maximum bezw. Minimum

$$z = \pm \frac{s}{2\sin\gamma}.$$

Ist dieselbe jetzt umgekehrt auf den Einheitscylinder aufgewickelt, wie es Figur 4 (Tafel II) im Grund- und Aufriss zeigt, so geben die von allen Punkten der Kurve ausgehenden zur $z$-Axe senkrechten Geraden das gewünschte Bild unserer Fläche. Wir fassen unser Resultat in den Satz zusammen: Die Gesamtheit aller möglichen Lagen der Berührungserzeugenden $c$ für gegebene Axen erfüllt eine geradlinige Fläche dritter Ordnung [gemäss der Gleichung 2')], die sich längs eines Stückes der $z$-Axe selbst durchdringt, das „Cylindroid von Cayley."*

* Man vergleiche Ball, The theory of screws, Dublin 1876, pag. 15, insbesondere auch das Titelbild. Dort ergiebt sich dieselbe Fläche als Ort der Axe einer unendlich kleinen Schraubenbewegung, welche die Resultante zweier beliebiger unendlich kleiner Drehungen um zwei feste Axen $a$ und $b$ darstellt. In der Anmerkung daselbst ist insbesondere der Name „Cylindroid" für diese



Der Schnittpunkt $C$ wird je zweimal in den Punkt $A$ bezw. $B$ hineinfallen, für $\varphi = -\frac{\gamma}{2}$ und $\frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}$, bezw. $\varphi = +\frac{\gamma}{2}$ und $\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$. Für $\varphi = -\frac{\gamma}{2}$ bezw. $+\frac{\gamma}{2}$ ist die Gerade $c$ mit $a$ bezw. $b$ zusammengefallen, während sie für $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}$ bezw. $\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$ die Axe $b$ bezw. $a$ rechtwinklig kreuzt. Diese letztgenannten Lagen der Geraden $c$ sind als gestrichelte Durchmesser $c_2'$ und $c_1'$ im Grundrisse der Figur 4 (Tafel II) hinzugefügt. Ausser diesen speziellen Lagen der Geraden $c$ haben wir die drei Hauptfälle zu unterscheiden, die sich ergeben, je nachdem die erste Projektion $c'$:

I. den Winkel $(\overrightarrow{a', b'})$ oder

II. den Winkel $(\overrightarrow{b', c_1'})$ bezw. $(\overrightarrow{c_2', a'})$,

III. den Winkel $(\overrightarrow{c_1', c_2'})$ durchschneidet.

Im ersten und dritten Falle liegt der Punkt $C$ innerhalb der Strecke $AB$, im zweiten Falle ausserhalb derselben, entweder oberhalb $B$ oder unterhalb $A$, was keinen wesentlichen Unterschied ausmacht. Analytisch sind die drei Fälle durch folgende Ungleichungen charakterisiert:

| | | | |
|---|---|---|---|
| I. Fall: | $0 < \alpha < \gamma$ | und zugleich | $\gamma > \beta > 0$, |
| II. Fall: | $\gamma < \alpha < \frac{\pi}{2}$ | und zugleich | $0 < -\beta < \frac{\pi}{2} - \gamma$, |
| oder: | $\frac{\pi}{2} + \gamma < \alpha < \pi$ | und zugleich | $\frac{\pi}{2} < -\beta < \pi - \gamma$, |
| III. Fall: | $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} + \gamma$ | und zugleich | $\frac{\pi}{2} - \gamma < -\beta < \frac{\pi}{2}$. |

## § 3.

## Diskussion der verschiedenen Arten zusammengehöriger Hyperboloide.

Welche Besonderheiten werden jetzt in den im letzten Paragraphen angegebenen Fällen die verschiedenen Hyperboloide beziehungsweise ihre Ausartungen darbieten, die durch Rotation der Berührungserzeugenden $c$ um die Axen $a$ und $b$ entstehen?

Was zunächst die dort angegebenen speziellen Lagen der Geraden $c$ betrifft, so ergeben sich unmittelbar die folgenden Sätze:

Ist die Gerade $c$ mit der Axe $a$ (bezw. $b$) zusammengefallen $\left(\text{für } \varphi = -\frac{\gamma}{2} \text{ bezw. } +\frac{\gamma}{2}\right)$, so ist das eine Hyperboloid in diese

Fläche auf Grund einer von Cayley gegebenen projektiven Erzeugungsweise erklärt, die indes nicht so anschaulich ist, als die von uns oben besprochene. Letztere liegt auch dem Fadenmodell dieser Fläche zu Grunde, welches Herr H. Wiener im Verlage von L. Brill in Darmstadt hat erscheinen lassen. — Das Cylindroid findet sich zuerst beschrieben bei Plücker, Neue Geometrie des Raumes, S. 97, Leipzig 1868.

Axe selbst ausgeartet, die zugleich eine Erzeugende des anderen nicht singulären Hyperboloids bildet.

Schneidet dagegen die Gerade $c$ die Axe $a$ (bezw. $b$) nur im Punkte $A$ (bezw. $B$), ohne mit ihr zusammenzufallen, ist also

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}\left(\text{bezw. } \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right),$$

so ist das Hyperboloid der Axe $a$ (bezw. $b$) in einen Rotationskegel mit der Winkelöffnung $2\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$, dasjenige der Axe $b$ (bezw. $a$) dagegen in das doppelt zu denkende Äussere eines Kreises ausgeartet, welches den Kegel längs $c$ berührt.

Letzterer liegt daher mit seinen beiden Hälften auf verschiedenen Seiten der Ebene des Kreises. Ein solcher Fall, für $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}$, sei im Grund- und Aufrisse, wobei die zweite Tafel senkrecht zur Axe $b$ gewählt ist, durch Figur 5 (Tafel II) veranschaulicht.

In jedem der drei am Schlusse des vorigen Paragraphen unterschiedenen Hauptfälle ist keines der beiden Hyperboloide ausgeartet. Doch tritt jetzt die Frage in den Vordergrund, ob sie, abgesehen von der Berührungserzeugenden, noch sonst reelle Punkte gemeinsam haben oder nicht. Von vornherein ist klar, wenn überhaupt die Flächen sich noch reell durchdringen, so muss dies notwendig in zwei Erzeugenden derjenigen Schar geschehen, der die Berührungserzeugende nicht angehört. Denn die durch einen beliebigen, etwa noch vorhandenen gemeinsamen Punkt gehende Erzeugende des einen Hyperboloids, welche die Berührungserzeugende schneidet, hat auch mit dem anderen Hyperboloid drei Punkte gemeinsam — von denen zwei freilich unendlich nahe liegen —, muss demnach auch ihm als Erzeugende angehören.

Nun denken wir durch einen beliebigen Raumpunkt $O$ Parallele zu sämtlichen Erzeugenden beider Hyperboloide, sowie zu ihren Axen gelegt. Dann entstehen zwei Rotationskegel, die sich gleichfalls längs einer Erzeugenden berühren. Es gilt der Satz: Stets dann und nur dann werden die beiden Hyperboloide sich noch in zwei reellen Erzeugenden schneiden, wenn das Gleiche für die Rotationskegel statt hat.*

Dass die Rotationskegel sich noch in zwei Erzeugenden durchdringen, falls es die Hyperboloide thun, ist ja sofort klar. Umgekehrt bedingt eine Schnitterzeugende der Kegel auf jedem Hyperboloid eine Erzeugende derselben Richtung in derjenigen Schar, der die Berührungserzeugende nicht angehört. Beide müssen identisch sein, da die Tangentialebenen ihres Schnittpunktes mit der Berührungserzeugenden

* Dieser Satz findet sich kurz angegeben bei Fiedler, Lehrbuch der darstellenden Geometrie Bd. II, S. 302, Nr. 11, Leipzig 1885, und in weiterer Ausführung bei Rohn u. Papperitz, Lehrbuch d. darstellenden Geometrie, Bd. II, S. 49, Leipzig 1896, sowie bei De la Gournerie, Traité de Géométrie descriptive, Art. 754, Paris 1880.



zusammenfallen. In Figur 6, I, II, III, (siehe Tafel II), ist für die drei Hauptfälle der gemeinsame Meridianschnitt beider Kegel dargestellt, der eine Symmetrieebene der räumlichen Figur ist. Unter Bezugnahme auf die am Schlusse des § 2 aufgestellten Ungleichungen überzeugt man sich leicht, dass stets im Falle I beziehungsweise II der eine Meridianschnitt völlig ausserhalb beziehungsweise völlig innerhalb des anderen gelegen ist, im Falle III dagegen jeder Meridianschnitt zum Teil innerhalb, zum Teil ausserhalb des anderen. Diese Beziehung lässt sofort den Satz erkennen:

Im dritten Hauptfalle, und nur in diesem, durchdringen sich die Kegel und also auch die Hyperboloide noch in zwei reellen Erzeugenden.

Da die beiden Hyperboloide durch eine halbe Umdrehung um die Gerade $d$ des kürzesten Abstandes der Axen in sich selbst übergehen, so liegen die beiden Schnitterzeugenden symmetrisch zur Geraden $d$, das heisst ihre Schnittpunkte $S_1$ und $S_2$ mit der Berührungserzeugenden sind vom Punkte $C$ gleichweit entfernt.

Im ersten Hauptfalle liegt jedes der beiden Hyperboloide ganz ausserhalb des anderen; sie berühren sich mit ihren Aussenseiten.*

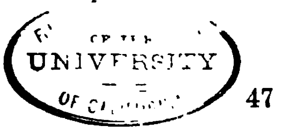
Im zweiten Hauptfalle liegt das Hyperboloid mit kleinerem Kehlkreis — für $\gamma < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ist es das Hyperboloid mit der Axe $b$, für $\frac{\pi}{2} + \gamma < \alpha < \pi$ das mit der Axe $a$ — völlig innerhalb des anderen, jenes berührt daher mit seiner Aussenseite dieses an der Innenseite.

Im dritten Hauptfalle dagegen berühren sich beide Hyperboloide längs der Strecke $S_1 S_2$ mit ihren Innenseiten, längs des übrigen Teiles der Berührungserzeugenden mit ihren Aussenseiten. Denn der dem Berührungspunkte $C$ diametral gegenüberliegende Punkt $C_1$ des Kehlkreises des einen Hyperboloids liegt stets ausserhalb des anderen; zwischen $C_1$ und $C$ befindet sich auf jeder Hälfte des Kehlkreises ein Punkt $T_1$ beziehungsweise $T_2$ der einen oder anderen Schnitterzeugenden, sodass also der den Punkt $C$ enthaltende Teil $T_1$, $T_2$ jedes Kehlkreises notwendig innerhalb des anderen Hyperboloids liegt

Beispiele der drei Hauptfälle geben im Grund- und Aufrisse die Figuren I, II, III der Tafel I.** Die erste Projektion der Berührungs-

* Als Aussenseite des Hyperboloids ist diejenige bezeichnet, welche der Axe nicht zugewandt ist.

** Wegen der Konstruktion der Figuren sehe man den § 7 dieser Arbeit. — Immerhin dürften die Hyperboloide des dritten Falles in ihrem ganzen Verlaufe ohne ein räumliches Modell nur schwer zu überblicken sein. Ein solches und zwar ein Fadenmodell, welches die Verhältnisse deutlich zur Anschauung bringt, habe ich für die Sammlung für darstellende Geometrie an der Technischen Hochschule zu Aachen anfertigen lassen.



erzeugenden ist die eine Asymptote der Umrisshyperbeln des Grundrisses. Nur im dritten Hauptfalle haben letztere gemeinsame Tangenten, eben die ersten Projektionen der Schnitterzeugenden $s_1$ und $s_2$. Die Nebenaxen der Umrisshyperbeln sind, abgesehen vom Vorzeichen, gleich $2p \operatorname{ctg} \alpha$ und $2q \operatorname{ctg} \beta$. Auf Grund der Gleichung 1) ergiebt sich daher der Satz: Die Meridianhyperbeln der Hyperboloide haben gleiche Nebenaxen. Hieraus folgt dann noch weiter, dass die beiden Hyperboloide in den Punkten der Kehlkreise dasselbe Gaussische Krümmungsmass besitzen.*

§ 4.

## Geometrische Eigenschaften entsprechender Segmente der Hyperboloide in Rücksicht auf ihre Verwendung als Reibungsräder.

Ein solcher Teil des Raumes sei als inneres beziehungsweise äusseres Segment des einzelnen Hyperboloids bezeichnet, der durch zwei zur Axe senkrechte Ebenen aus dem Inneren beziehungsweise Äusseren des letzteren ausgeschnitten wird. Ein äusseres Segment möge indes stets durch eine hinreichend grosse, koaxiale Cylinderfläche abgeschnitten und nach aussen begrenzt sein. „Entsprechende“ Segmente beider Hyperboloide sollen dieselbe Strecke der Berührungserzeugenden besitzen. Denken wir diese Segmente irgendwie materiell hergestellt, so werden sie uns die Reibungsräder liefern, deren Eigenart in den einzelnen Fällen wir im folgenden näher betrachten wollen. Während wir das Rad eines inneren Segmentes unmittelbar um seine

---

* Es sei gestattet, auch die analytische Lösung einiger der im Texte berührten Fragen einzuflechten. Dieselbe verdanke ich im wesentlichen einer freundlichen Mitteilung des Herrn Fr. Schur, wie ich überhaupt aus seinen Vorlesungen über darstellende Geometrie an der Technischen Hochschule zu Aachen die Anregung zu dieser Arbeit geschöpft habe.

Wir wählen als $\zeta$-Axe eines neuen rechtwinkligen Koordinatensystems die Gerade des kürzesten Abstandes $AB$ — ihre positive Richtung sei die von $A$ nach $B$ —, als $\xi$-Axe die Berührungserzeugende $c$, als $\eta$-Axe die zu beiden senkrechte Gerade, wobei die positive Richtung der $\xi$-Axe in jene der $\eta$-Axe durch eine dem Uhrzeigergange entgegengesetzte Drehung, von der positiven Seite der $\zeta$-Axe aus betrachtet, übergehen möge. Die Gleichungen der beiden Hyperboloide lauten alsdann:

1) $$\eta^2(1-\operatorname{tg}^2\alpha)+2\xi\eta\operatorname{tg}\alpha+\zeta^2+2\zeta p=0,$$

2) $$\eta^2(1-\operatorname{tg}^2\beta)-2\xi\eta\operatorname{tg}\beta+\zeta^2-2\zeta q=0,$$

wo die Grössen $p, q, \alpha, \beta$, auch hinsichtlich ihres Vorzeichens, die im § 1 definierte Bedeutung haben. Offenbar werden die Erzeugenden der zweiten Schar mit Hilfe des Parameters $\lambda$ entsprechend dargestellt durch die Gleichungspaare:

1') $$\zeta=\lambda\eta$$
$$\eta(1-\operatorname{tg}^2\alpha)+2\xi\operatorname{tg}\alpha+\lambda(\zeta+2p)=0,$$

2') $$\zeta=\lambda\eta$$
$$\eta(1-\operatorname{tg}^2\beta)-2\xi\operatorname{tg}\beta+\lambda(\zeta-2q)=0.$$

Die für den gleichen Wert $\lambda$ definierten drei Ebenen schneiden sich stets in einem Punkte der $\xi$-Axe, wie man auf Grund der Relation $p:q=\operatorname{tg}\alpha:\operatorname{tg}\beta$ leicht

in festen Lagern ruhende Axe sich drehen lassen können, werden wir das Rad eines äusseren Segmentes etwa in einer festliegenden cylindrischen Führung laufend zu denken haben, wie es im Meridianschnitte durch Figur 7 (Tafel II) dargestellt ist.

Im ersten Hauptfalle (Figur I der Tafel I) lassen sich nur entsprechende innere Segmente als Reibungsräder ausführen. Im zweiten Hauptfalle (Figur II der Tafel I) dagegen haben wir bei dem Hyperboloid mit kleinerem Kehlkreise ein inneres, bei dem mit grösserem Kehlkreise ein äusseres Segment zu wählen. Im übrigen kann die den entsprechenden Segmenten gemeinsame Strecke der Berührungserzeugenden beliebig gross sein. Im dritten Hauptfalle (Figur III der Tafel I) endlich hat man die entsprechenden Segmente der Hyperboloide jedenfalls so auszuwählen, dass ihnen nicht gleiche Strecken der Schnitterzeugenden angehören. Legt man durch irgend einen Punkt $P$ der Berührungserzeugenden $c$ Parallelebenen zu den Kehlkreisebenen der Hyperboloide, so treffen diese jede Schnitterzeugende $s_1$ beziehungsweise $s_2$ in zwei Punkten, die auf verschiedenen Seiten ihres Schnittpunktes $S_1$ beziehungsweise $S_2$ liegen. Die Berührungserzeugende liegt nämlich im spitzen Winkel der genannten Parallelebenen, eine Parallele durch $P$ zur einen oder anderen Schnitterzeugenden dagegen im stumpfen Winkel, da das Analoge der Fall ist, wenn man als Punkt $P$ gerade den Punkt $C$ wählt. Man macht sich diese Beziehung am besten am Grundrisse der Figur III der Tafel I klar unter Berücksichtigung der

zeigt. Sollen sie sich aber in derselben Geraden schneiden, so muss eine lineare Relation zwischen ihnen bestehen, das heisst die beiden unteren Gleichungen 1′) und 2′) müssen nach Multiplikation ihrer beiden Seiten mit $\operatorname{ctg}\alpha$ beziehungsweise $\operatorname{ctg}\beta$ und nachheriger Addition bis auf einen Faktor die obere Gleichung ergeben. Als Bedingung hierfür findet man:

$$\lambda^2 = \frac{(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha) + (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{ctg}\beta)}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$$

oder vereinfacht

$$\lambda^2 = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - 1.$$

Setzt man wieder $\alpha = \frac{\gamma}{2} + \varphi$, $\beta = \frac{\gamma}{2} - \varphi$, ein, so kommt schliesslich:

$$\lambda^2 = \frac{\cos\gamma}{\sin^2\varphi - \cos^2\frac{\gamma}{2}}.$$

Der Parameter $\lambda$ wird daher reell sein, wenn $\sin^2\varphi > \cos^2\frac{\gamma}{2}$ ist; diese Bedingung ist aber identisch mit unserem geometrisch gefundenen Resultate.

Die Länge der Strecken $S_1 C = S_2 C = l_0$, welche im dritten Hauptfalle durch die Schnitterzeugenden auf der Berührungserzeugenden abgeschnitten werden, ist gleich der Koordinate $\xi$ in der zweiten Gleichung 1′), wenn man in ihr $\eta = \zeta = 0$ setzt und dem Parameter $\lambda$ den soeben bestimmten Wert giebt. Es wird dann:

$$l_0^2 = \frac{\lambda^2 p^2}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{(\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - 1)\cdot p^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}$$

oder unter Berücksichtigung der Relation $p:q = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta$

$$l_0^2 = pq(1 - \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta).$$

Man vergleiche S. 51 dieser Arbeit, woselbst die gleiche Relation auf geometrischem Wege gefunden wird.

Thatsache, dass die ersten Projektionen der Schnitterzeugenden gemeinsame Tangenten an die Umrisshyperbeln sind. Stets dann und nur dann werden daher entsprechende Segmente der Hyperboloide nicht gleiche Strecken der Schnitterzeugenden besitzen, wenn das ihnen gemeinsame Stück der Berührungserzeugenden entweder ganz innerhalb oder ganz ausserhalb der Strecke $S_1 S_2$ (wobei die Punkte $S_1$ und $S_2$ gleichzeitig zum Inneren und Äusseren der Strecke $S_1 S_2$ hinzugerechnet seien) gelegen ist. Dies ist die einzige Bedingung, die den Segmenten aufzuerlegen ist. Man hat zwei innere Segmente zu wählen, wenn sie dem Äusseren der Strecke $S_1 S_2$, dagegen zwei äussere Segmente, wenn sie der Strecke $S_1 S_2$ selbst angehören sollen. Denn in letzterem Falle werden sich die ihnen angehörenden Zonen der Hyperboloidflächen wie zwei Ringe einer Kette durchschlingen. Die Figur 8 (Tafel II) stellt, genau dem Aufriss in Figur III der Tafel I entsprechend, solche den Kehlkreis in der Mitte enthaltende Zonen der Hyperboloide dar.

Wir fügen im folgenden noch einige geometrische Hilfsbetrachtungen hinzu, die sogleich im nächsten Paragraphen ihre Anwendung finden.

1. Der Abstand $r_a$ bezw. $r_b$ eines beliebigen Punktes $P$ der Berührungserzeugenden von der Axe $a$ bezw. $b$ wird durch den Ausdruck gegeben:

$$r_a = \sqrt{p^2 + l^2 \sin^2 \alpha}, \text{ bezw. } r_b = \sqrt{q^2 + l^2 \sin^2 \beta},$$

wo $l$ die Strecke $PC$ bezeichnet.

2. Um den Neigungswinkel $\varkappa_a$ der Berührungserzeugenden $c$ gegen die durch $P$ gehende Meridianebene des Hyperboloids mit der Axe $a$ zu bestimmen, ist in der im Zweitafelsysteme gezeichneten Figur 9 (Tafel II) die Meridianebene des Punktes $C$ als erste Projektionsebene, die Axe $a$ als trennende Axe $x_{1,2}$ der ersten und zweiten Projektionsebene gewählt. Senkrecht zu letzteren mit den Axen $x_{1,3}$ und $x_{2,3}$ ist noch eine dritte Tafel benutzt und in bekannter Weise seitlich umgelegt. Die durch den Punkt $P$ gehende Meridianebene hat ihre erste und zweite Spur in der Axe $x_{1,2}$, ihre dritte Spur ist $e_3$. Man fälle von $C$ das Lot auf die Meridianebene von $P$, seine wahre Grösse wird durch $C_0 F_0$ gegeben. Es ist jetzt:

$$C_0 F_0 = A C_0 \sin \psi = p \sin \psi \text{ und } \sin \psi = \frac{P''' C_0}{P''' A} = \frac{P'' P_x}{r_a} = \frac{l \sin \alpha}{r_a}.$$

Folglich ist:

$$\sin \varkappa_a = \frac{C_0 F_0}{l} = \frac{p \cdot \sin \alpha}{r_a}$$

oder:

$$\sin \varkappa_a = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{l}{p}\right)^2 \sin^2 \alpha}}.$$

Analog ergiebt sich für den Neigungswinkel $\varkappa_b$ der Berührungserzeugenden $c$ mit der durch $P$ gehenden Meridianebene des Hyperboloids $b$:

$$\sin \varkappa_b = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 + \left(\frac{l}{q}\right)^2 \sin^2 \beta}}.$$

Indem wir noch festsetzen, dass gerade derjenige Winkel mit $\varkappa_a$ beziehungsweise $\varkappa_b$ bezeichnet sein soll, der für $\lim l = 0$ kontinuierlich in den Winkel $\alpha$ beziehungsweise $\beta$ übergeht, haben wir in obigen Ausdrücken den Wurzelzeichen stets ein positives Vorzeichen zu geben. Die geometrische Anschauung sowohl, wie die obigen Formeln zeigen, dass für $\lim l = \infty$ der Winkel $\varkappa_a$ beziehungsweise $\varkappa_b$ sich dem Werte 0 oder $\pm\pi$ nähert, je nachdem $\alpha$ beziehungsweise $\beta$ kleiner oder grösser als $\frac{\pi}{2}$ ist.

3. Wir denken ferner die Tangenten an die durch $P$ gehenden Parallelkreise beider Hyperboloide gezogen. Der Winkel $\varkappa$ zwischen denselben ist gleich dem der beiden Meridianebenen des Punktes $P$. Dieser aber hat den Wert $\varkappa_a + \varkappa_b$. Denn diese Relation stimmt in den drei Hauptfällen zunächst für $l = 0$, folglich gilt sie allgemein, da an Stelle von $\varkappa_a + \varkappa_b$ nur dann $\pm(\varkappa_a - \varkappa_b)$ treten könnte, wenn für irgend einen endlichen Wert von $l$ entweder $\varkappa_a$ oder $\varkappa_b$ verschwinden würde, was nicht der Fall ist. Der Grenzbedingung $0 \leq l < \infty$ entsprechend gilt im ersten und zweiten Hauptfalle: $\gamma > \varkappa \geq 0$, im dritten Hauptfalle: $\gamma \leq \varkappa \leq \pi$.

4. Kann die Tangente in einem Punkte $P$ der Berührungserzeugenden an den Parallelkreis des einen Hyperboloids, etwa desjenigen mit der Axe $a$, die Axe $b$ des anderen schneiden?

Wenn dies der Fall wäre, müsste jene zugleich Tangente an den durch $P$ gehenden Meridian des Hyperboloids mit der Axe $b$ sein. Beide Hyperboloide hätten dann notwendig noch eine zweite Erzeugende gemeinsam, nämlich das Spiegelbild der Geraden $c$ in Bezug auf die Tangente in der gemeinsamen Tangentialebene. Der Punkt $P$ könnte daher nur einer der Punkte $S_1$ und $S_2$ der Hyperboloide des dritten Hauptfalles sein. Umgekehrt überzeugt man sich leicht, dass in der That die Tangente im Punkte $S_1$ oder $S_2$ an den Parallelkreis des einen Hyperboloids stets die Axe des anderen schneidet.* Für die Punkte $S_1$ und $S_2$ ist daher der Winkel $\varkappa$ gleich $\frac{\pi}{2}$. Es gilt demnach:

$$\sin^2\varkappa_a + \sin^2\varkappa_b = 1,$$

oder nach 2):

$$\frac{\sin^2\alpha}{1+\left(\frac{l_0}{p}\right)^2\sin^2\alpha} + \frac{\sin^2\beta}{1+\left(\frac{l_0}{q}\right)^2\sin^2\beta} = 1,$$

indem wir wieder die spezielle Bezeichnung $l_0$ für $l$ setzen. Die einfache Umrechnung ergiebt der Reihe nach:

$$\frac{p^2}{p^2(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)+l_0^2} + \frac{q^2}{q^2(1+\operatorname{ctg}^2\beta)+l_0^2} = 1,$$

$$l_0^4 + l_0^2(p^2\operatorname{ctg}^2\alpha + q^2\operatorname{ctg}^2\beta) = p^2q^2(1-\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta),$$

oder in Rücksicht auf die Fundamentalbeziehung $p\operatorname{ctg}\alpha = q\operatorname{ctg}\beta$:

* Die Gesamtheit der Tangenten an die Parallelkreise des Hyperboloids mit der Axe $a$ (oder $b$) in allen Punkten der Berührungserzeugenden bildet ein hyperbolisches Paraboloid. Nur im dritten Hauptfalle wird dieses von der Axe $b$ (oder $a$) in zwei reellen Punkten geschnitten.

$$(l_0^2 + pq \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta)^2 = p^2 q^2,$$

das heisst:

$$l_0^2 = pq(1 - \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta),$$

wie wir bereits in der Anmerkung S. 48 fanden.

## § 5.

### Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten und der gegenseitige Drehungssinn der Hyperboloidenreibungsräder.

Es sei jetzt irgend ein Paar entsprechender Hyperboloidenreibungsräder, die wir kurz durch ihre Axen $a$ und $b$ bezeichnen wollen, gegeben. Wir denken sie mit einem gewissen Drucke gegeneinander gepresst, so dass sie sich infolge ihrer Deformation in einem schmalen Flächenstreifen längs der Geraden $c$ berühren. Das Rad $a$ sei als treibendes Rad durch äussere Einwirkung in gleichmässige Umdrehung versetzt.

Welches Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten und welchen Drehungssinn werden nun beide Räder darbieten? Wir wollen uns darauf beschränken, die Räder als unendlich dünn, die ihnen gemeinsame Strecke der Berührungserzeugenden als unendlich klein vorauszusetzen.*

Die auf das anfangs in Ruhe befindliche Rad $b$ wirkende Reibungskraft, welche von der Bewegung des Rades $a$ herrührt, wird so lange eine Winkelbeschleunigung des Rades $b$ hervorrufen**, als von den beiden Komponenten der relativen Bewegung*** des Rades $a$ gegen das Rad $b$ an der Berührungsstelle, welche als Richtungen die Tangenten an den Parallelkreis und die Meridianlinie des Rades $b$ besitzen, diejenige in der Richtung der Tangente an den Parallelkreis nicht verschwindet. Mit anderen Worten: Das Rad $b$ wird seine Geschwindigkeit (während der Zeit des sogenannten „Anlaufens") so lange steigern, bis es — was erfahrungsgemäss sehr bald eintritt — eine solche Endgeschwindigkeit erlangt hat, dass das Berührungselement des Rades $a$ sich relativ zu dem des

* Bei Rädern endlicher Dicke würde die Beantwortung der aufgeworfenen Fragen vor allem die Kenntnis von der Verteilung der Reibungskraft in den einzelnen Punkten der Berührungsstrecke fordern, worüber sich indes ohne willkürliche Annahmen nichts aussagen lässt, so dass unsere Beschränkung sich berechtigt erweist.

** Hierbei ist vorausgesetzt, dass die beschleunigende Komponente der Reibungskraft den auf die Berührungsstelle reduzierten Widerstand gegen die Bewegung des Rades $b$ an Grösse übertrifft, weil sonst eine Bewegung überhaupt nicht eintreten würde.

*** Die momentane relative Bewegung des Berührungselementes des Rades $a$ ist identisch mit der absoluten Bewegung, die dadurch hervorgeht, dass man dem Elemente des Rades $a$ ausser seiner eigenen Geschwindigkeit noch eine zweite Geschwindigkeit erteilt, nämlich diejenge, welche der des Berührungselementes des Rades $b$ gleich und entgegengesetzt gerichtet ist.

Rades $b$ in der Richtung der Meridianlinie des letzteren bewegt.*

Es seien mit $v_a$ und $v_b$ die Lineargeschwindigkeiten des Berührungselementes der Räder, mit $\omega_a$ und $\omega_b$ ihre Winkelgeschwindigkeiten bezeichnet; $v_b$ und $\omega_b$ mögen überdies gerade die Endwerte der Geschwindigkeiten sein, die uns allein interessieren. Es gilt zunächst $v_a = \omega_a \cdot r_a$, $v_b = \omega_b \cdot r_b$, wo $r_a$ und $r_b$ die Abstände des Berührungspunktes von den Axen $a$ und $b$ bezeichnen. Das Resultat der obigen Betrachtung drückt sich dann, wenn wir vorerst vom Vorzeichen absehen, in der Gleichung aus: $v_b = v_a \cdot \cos \varkappa$, wo $\varkappa$ der in der Hilfsbetrachtung 3 des vorigen Paragraphen definierte Winkel ist. Denn diese Gleichung ist der analytische Ausdruck dafür, dass die Resultante der Geschwindigkeiten $v_a$ und $-v_b$ die Richtung der Tangente an den Meridianschnitt des Rades $b$ besitzt. Hieraus folgt durch Einsetzung:

$$\frac{\omega_b}{\omega_a} = \frac{r_a}{r_b} \cdot \cos \varkappa.$$

Diese Gleichung beantwortet den ersten Teil unserer Seite 51 aufgeworfenen Frage; sie bestimmt das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten der Räder. Wir sehen, dasselbe ist eine Funktion der Grösse $l$, da $r_a$, $r_b$ und $\varkappa$ von $l$ abhängen. Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten ändert seinen Wert mit der Stelle der Berührungserzeugenden, der die Reibungsräder angehören.

Was den gegenseitigen Drehungssinn der Räder betrifft, so wollen wir diejenige Drehung jedes Hyperboloids als positiv ansehen, welche von der in Figur 2 (Tafel I) durch eine Pfeilspitze ausgezeichneten Richtung der Axe aus gesehen dem Uhrzeigergange entgegengesetzt ist. Zunächst seien jetzt in jedem der drei Hauptfälle die Kehlkreisräder betrachtet. In der für alle drei Fälle gemeinsam giltigen Figur 10 (Tafel II), deren Ebene die Tangentialebene des Punktes $C$ ist, bezeichnen $a_0$ und $b_0$ die Tangenten an die Meridiane. Durch $CP$ und $CQ$ seien die Lineargeschwindigkeiten $v_a$ und $v_b$ der Grösse und Richtung nach dargestellt; die Resultante von $v_a$ und $-v_b$ muss die Richtung der Tangente $b_0$ besitzen. Indem man beachtet, dass der Pnnkt $C$ im ersten und dritten Hauptfalle innerhalb, im zweiten ausserhalb der Strecke $AB$ gelegen ist, ergiebt sich leicht die Richtigkeit der hinsichtlich des Vorzeichens erweiterten Formel:

$$\frac{\omega_b}{\omega_a} = (-1)^{\varepsilon} \cdot \frac{|p|}{|q|} \cdot \cos \gamma,$$

wo im ersten, zweiten oder dritten Hauptfalle $\varepsilon$ beziehungsweise gleich 1, 2 oder 3 zu setzen ist und $|p|$, $|q|$ die absoluten Werte der Grössen $p$, $q$ bezeichnen. Wir behaupten, dass in allen drei Fällen die analoge Formel:

* Ganz ähnliche Verhältnisse bietet das Rädchen eines Polarplanimeters dar, das auf der Zeichenebene zugleich gleitet und rollt.

3) $$\frac{\omega_b}{\omega_a} = (-1)^{\epsilon} \cdot \frac{r_a}{r_b} \cos \varkappa$$

jetzt für beliebige Räder giltig ist. Der Beweis folgt unmittelbar aus unseren Hilfsbetrachtungen 3 und 4 im vorigen Paragraphen. Im ersten und zweiten Hauptfalle muss das Vorzeichen von $\frac{\omega_b}{\omega_a}$ stets dasselbe sein, welcher Stelle der Berührungserzeugenden auch die Räder angehören. Im dritten Hauptfalle dagegen muss das Vorzeichen ein verschiedenes sein, je nachdem die Räder zu dem Inneren oder dem Äusseren der Strecke $S_1 S_2$ gehören, da, wie wir sahen, gerade in den Punkten $S_1$ und $S_2$ die Tangente an den Parallelkreis des einen Hyperboloids die Axe des anderen schneidet. Diese Verhältnisse werden in unserer Formel durch das Vorzeichen von $\cos \varkappa$ in der That richtig dargestellt.

Ausführlich lautet unsere Formel in Rücksicht auf die Hilfsbetrachtungen 1 und 2 des vorigen Paragraphen:

3') $$\left\{ \begin{aligned} \frac{\omega_b}{\omega_a} = (-1)^{\epsilon} \cdot \frac{\sqrt{p^2 + l^2 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{q^2 + l^2 \sin^2 \beta}} \cdot \Bigg[ \pm \sqrt{1 - \frac{p^2 \sin^2 \alpha}{p^2 + l^2 \sin^2 \alpha}} \cdot \sqrt{1 - \frac{q^2 \sin^2 \beta}{q^2 + l^2 \sin^2 \beta}} \\ - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{l}{p}\right)^2 \sin^2 \alpha}} \cdot \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 + \left(\frac{l}{q}\right)^2 \sin^2 \beta}} \Bigg]. \end{aligned} \right.$$

Hier gilt das obere Vorzeichen im ersten und zweiten, das untere im dritten Hauptfalle; für sämtliche Wurzeln sind die positiven Werte zu wählen. Unser Resultat lautet in Worten:

Erteilen wir dem Rade $a$ eine positive Umdrehung, so wird das Rad $b$ im ersten Hauptfalle stets eine negative, im zweiten eine positive Umdrehung ausführen, welcher Stelle der Berührungserzeugenden die beiden Räder auch angehören mögen; im dritten Hauptfalle dagegen eine negative oder eine positive Umdrehung, je nachdem die Räder dem Inneren oder dem Äusseren der Strecke $S_1 S_2$ angehören. (Positiv und negativ ist überall zu vertauschen, wenn wir dem Rade $a$ eine negative Umdrehung erteilen.) Das Verhalten der Reibungsräder im dritten Hauptfalle erweist sich also besonders überraschend.

Wir haben bisher immer angenommen, dass das Rad $a$ das treibende ist. Wenn wir statt dessen das Rad $b$ als das treibende wählen, so haben wir in der Formel (3') die Indices $a$ und $b$ und die Grössen $p, q$ sowie $\alpha, \beta$ miteinander zu vertauschen. Ersichtlich erhalten wir dann allgemein einen anderen Wert für das Verhältnis $\frac{\omega_b}{\omega_a}$. Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten nimmt daher einen verschiedenen Wert an, je nachdem wir bei demselben Räderpaare das eine oder das andere Rad als das treibende ansehen.

Für die im Anfange des § 3 aufgestellten **Übergangsfälle** spezialisiert sich unser Resultat folgendermassen. Es wird das Verhältnis $\frac{\omega_b}{\omega_a}$, wenn wieder das Rad $a$ als das treibende gewählt ist,

a) für $\varphi = -\frac{\gamma}{2}(\alpha = 0)$ gleich 0.

b) für $\varphi = +\frac{\gamma}{2}(\alpha = \gamma)$ gleich $\infty$.

c) für $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ gleich $\frac{1}{\cos\gamma}$.

d) für $\varphi = \frac{\pi}{1} + \frac{\gamma}{2}\left(\alpha = \frac{\pi}{2} + \gamma\right)$ gleich $\frac{l^2 \cos\gamma}{s^2 + l^2}$.

Besonders zu beachten ist, dass nur im letzten Falle $\frac{\omega_b}{\omega_a}$ noch von $l$ abhängig bleibt.

Für $\lim l = \infty$ geht die Formel 3) der vorigen Seite für alle Fälle über in:

$$\lim_{l=\infty} \frac{\omega_b}{\omega_a} = -\frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

das heisst:

**Je weiter von den Kehlkreisen entfernt die Räder gewählt werden, um so mehr nähert sich das Verhältnis ihrer Winkelgeschwindigkeiten dem einfachen Werte $-\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.**

**Zusatz:**

Dasselbe Winkelgeschwindigkeitsverhältnis $-\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ kommt zweien sich längs einer Erzeugenden berührenden Hyperboloiden zu, wenn wir diese als Axoide oder Grundkörper hyperboloidischer Zahnräder ansehen. Ohne dass wir im einzelnen auf diese Verhältnisse eingehen,* sei es gestattet, den hier obwaltenden Unterschied mit wenigen Worten zu beleuchten. Bei Zahnrädern sind es nicht Reibungskräfte, sondern **Druckkräfte**, welche die Bewegung von einem Rade auf das andere übertragen, so dass von vornherein ganz andere Verhältnisse zur Geltung kommen. Obwohl daher im Grenzfalle** die Hyperboloide selbst als „Elementenflächen“ (die allgemein zur Begrenzung der Zähne geeignete Flächen sind) sich ergeben können, besitzen doch, wie wir gesehen haben, beliebige aus ihnen ausgeschnittene Räder, da diese dann als Reibungsräder wirken, nicht das Winkelgeschwindigkeitsverhältnis $-\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ der Axoide.

Um den hier vorliegenden Gegensatz besonders anschaulich zu überblicken, wollen wir ein einfacheres **Beispiel** heranziehen, das analoge Verhältnisse darbietet. Wir denken, wie Figur 11 (Tafel II) in schiefer

* Zur näheren Orientierung sei z. B. auf die Darstellung in Weisbach-Herrmann, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik, III. Teil, 1. Abteilung, Braunschweig 1876, § 46 (S. 228 flg.) und § 86 (S. 418 flg.) verwiesen.

** Wie z. B. in Grashof, Theoretische Maschinenlehre, Band II, Leipzig 1877, § 25 S. 81 gezeigt ist.

Parallelperspektive zeigt, auf einem beliebig langen Parallelstreifen in gleichem Abstande von einander und in schräger Richtung schmale, senkrechte Streifchen angebracht, die den Zähnen eines Rades entsprechen. Zwei derartige, genau gleiche Parallelstreifen $a$ und $b$ („Zahnstangen") mögen dann mit zugekehrten Zähnen aufeinander gelegt sein (Figur 12, Tafel II). Ferner soll, etwa durch prismatische Führungen, dafür gesorgt sein, dass jeder Streifen sich nur in der Richtung seiner ihn begrenzenden Parallelgeraden bewegen kann. Wird dann der Streifen $a$ in der Richtung des hinzugefügten Pfeiles, also von links nach rechts, bewegt, so wird durch den Eingriff der Zähne der Streifen $b$ sich nach unten bewegen. Dieses Verhältnis wird bestehen bleiben, wenn wir auch die Zähne beliebig klein denken, so dass sie fast unsichtbar sind. Werden dagegen zwei Parallelstreifen ohne Zähne in genau derselben Lage mit einem gewissen Drucke aufeinander gepresst (Figur 13, Tafel II) und wieder der Streifen $a$ von links nach rechts bewegt, so wird der Streifen $b$ jetzt sich nach oben bewegen. Dieses Beispiel, bei dem wir nicht länger verweilen wollen, möge man am besten vergleichen mit zwei hyperbolischen Zahnrädern beziehungsweise Reibungsrädern des dritten Hauptfalles, deren zugehörige Hyperboloidenzonen den Kehlkreis in ihrer Mitte enthalten (vergl. Figur 8, Tafel II).

## § 6.

### Die speziellen Fälle $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = 0$ und $s = 0$.

Jetzt gilt es für die zu Anfang des § 2 ausgeschlossenen besonderen Lagen der Axen $a$ und $b$ unsere bisherigen Betrachtungen zu spezialisieren.*

1. Ist der Winkel $\gamma$ der beiden Axen gleich $\frac{\pi}{2}$, so geht die Gleichung 2) über in:

$$2^*) \qquad z = \frac{s}{2} \cdot \sin 2\varphi,$$

oder

$$z = \frac{s}{2} \cdot \cos 2\beta.$$

Die hierdurch dargestellte Fläche dritter Ordnung unterscheidet sich in ihrer Gestalt nicht von jener des allgemeinen Falles, nur ist die Axe $a$ bezw. $b$ jetzt ihre tiefste bezw. höchste Erzeugende, wenn man die $z$-Axe wieder vertikal annimmt. Der Punkt $C$ ist dementsprechend für jeden Wert $\alpha$ oder $\varphi$ niemals ausserhalb der Strecke $AB$ gelegen.

Fällt die Berührungserzeugende $c$ mit einer der Axen $a$ oder $b$ selbst zusammen, so ist das eine Hyperboloid in das doppelt zu denkende

* Die trivialen Grenzfälle, dass entweder beide Axen zusammengefallen sind, oder aber eine von ihnen ins Unendliche gerückt ist, seien hier nur erwähnt.

Äussere eines Kreises, das andere in eine Tangente desselben ausgeartet, ein Grenzfall, von dem wir weiterhin absehen wollen. Da im allgemeinen Falle die beiden durch denselben Punkt $C$ gehenden Berührungserzeugenden entgegengesetzt gleichen Werten $\beta$ entsprechen, also zu den Ebenen $(a, C)$ und $(b, C)$ symmetrisch liegen, so folgt unmittelbar, dass ihre Rotation um die Axen $a$ und $b$ dasselbe Hyperboloidenpaar liefert. Die beiden Hyperboloide berühren sich stets in zwei Erzeugenden. (Figur 14, Tafel II.) Nur dann sind entsprechende Segmente der Hyperboloide — und zwar stets innere — als Reibungsräder verwendbar, wenn die ihnen gemeinsame Strecke der Berührungserzeugenden nicht den Punkt $C$ im Inneren enthält. Das in derselben Weise wie im § 5 bestimmte Verhältnis $\frac{\omega_b}{\omega_a}$ der Winkelgeschwindigkeiten wird durch den Ausdruck gegeben:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\omega_b}{\omega_a} = -\dfrac{\sqrt{p^2+l^2\sin^2\alpha}}{\sqrt{q^2+l^2\sin^2\beta}}\\ \cdot\left[\pm\sqrt{1-\dfrac{p^2\sin^2\alpha}{p^2+l^2\sin^2\alpha}}\cdot\sqrt{1-\dfrac{q^2\sin^2\beta}{q^2+l^2\sin^2\beta}}-\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\left(\dfrac{l}{p}\right)^2\sin^2\alpha}}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{1+\left(\dfrac{l}{q}\right)^2\sin^2\beta}}\right];\end{array}\right.$$

alle Wurzelzeichen sind mit positivem Vorzeichen zu nehmen, es gilt das obere beziehungsweise untere Zeichen in der Klammer, je nachdem die den Rädern zugehörige Berührungserzeugende $e_1$ oder $e_2$ einem positiven oder negativen Werte $\beta$ entspricht. Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten ist negativ oder positiv, je nachdem $\beta$ positiv oder negativ ist.

2. Im Grenzfalle $\gamma = 0$, das heisst bei paralleler Lage der Axen, giebt uns wieder am besten die Gleichung 2) Auskunft. Für $\varphi = 0$ oder $\frac{\pi}{2}$ wird $z$ völlig unbestimmt, für alle übrigen Werte von $\varphi$ dagegen unendlich gross. Unsere Fläche dritter Ordnung ist daher in die unendlich ferne Ebene, die für unseren Zweck nicht weiter in Betracht kommt, und in zwei sich längs der Geraden $AB$ rechtwinklig schneidende Ebenen zerfallen, deren eine die Axen $a$ und $b$ enthält. Dem Werte $\varphi = 0$ entspricht der gewöhnliche Fall zweier Cylinder, die sich äusserlich oder innerlich längs einer Erzeugenden berühren. Für das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten gilt die von $l$ unabhängige Formel:

$$\frac{\omega_b}{\omega_a} = -\frac{a}{b}.$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ dagegen sind die beiden Hyperboloide in jedem Falle in das doppelt zu denkende Äussere zweier sich berührender Kreise ausgeartet. Wenn $C$ innerhalb $AB$ liegt, haben dieselben überdies noch zwei Tangenten gemeinsam, die den Schnitterzeugenden $s_1$ und $s_2$ des dritten Hauptfalles des § 3 entsprechen.

3. Wenn endlich $s = 0$ ist, das heisst die Axen $a$ und $b$ sich schneiden, so zerfällt die Gleichung 2′) in $x^2 + y^2 = 0$ und $z = 0$. Der reelle Teil der Fläche dritter Ordnung besteht also aus der $z$-Axe, die nicht weiter für uns in Betracht kommt, und der Ebene der Axen $a$ und $b$. In letzterer kann die Berührungserzeugende $c$ zunächst mit einer der Axen $a, b$ selbst oder mit einer ihrer Senkrechten $c_1, c_2$ zusammen fallen (Figur 15, Tafel II). Von den durch ihre Rotation um die Axen $a$ und $b$ entstehenden Flächen ist dann stets die eine entweder in die Axe $a$ oder $b$ selbst oder in die zu einer von ihnen senkrechte Ebene ausgeartet, während die andere einen Kegel darstellt. Ausser diesen speziellen Lagen haben wir wieder die drei Hauptfälle zu unterscheiden, dass die Gerade $c$ in einem der Winkelräume I, II oder III liegt. In diesen Fällen entstehen durch Rotation der Geraden $c$ um die Axen stets zwei Kegel (Doppelkegel). Im ersten und dritten Hauptfalle berühren sich dieselben mit ihren Aussenseiten, im zweiten Hauptfalle berührt der grössere Kegel mit seiner Innenseite den kleineren an der Aussenseite. Die Kegel des dritten Hauptfalles haben indes noch zwei Schnitterzeugende gemeinsam, dementsprechend sind nur dann entsprechende Segmente als Reibungsräder verwendbar, wenn die ihnen gemeinsame Strecke der Berührungserzeugenden den Schnittpunkt der Axen nicht im Inneren enthält. Den beiden Kegeln gemeinsamen Meridianschnitt der drei Hauptfälle geben die Figuren 6, I, II, III (Tafel II). Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten wird, auch in Rücksicht auf das Vorzeichen, durch den Ausdruck $\frac{\omega_b}{\omega_a} = -\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ gegeben, der wieder von $l$ unabhängig ist.

Ist insbesondere noch $\gamma = \frac{\pi}{2}$, so werden die beiden Kegel sich stets doppelt berühren. Die den Reibungsrädern angehörende Strecke der einen oder anderen Berührungserzeugenden darf den Schnittpunkt der Axen nicht im Inneren enthalten.

## § 7.

### Die zeichnerische Darstellung der drei allgemeinen Hauptfälle.

Die Darstellung der beiden Hyperboloide im Zweitafelsysteme (Figuren I, II, III, Tafel I) lässt bei zweckmässiger Anordnung ihre symmetrische Lage in Bezug auf die Gerade $AB$ klar hervortreten; sie besitzt daher vor der (orthogonalen) axonometrischen Darstellung (Figur IV, Tafel I) zweifellos den Vorzug grösserer Anschaulichkeit. Immerhin dürfte auch die letztere als eine gute Übungsaufgabe der axonometrischen Methode einer näheren Betrachtung wert sein. Wir

wollen im folgenden uns auf die Angabe der wesentlichen Punkte beschränken, die bei der Konstruktion zu beachten sind.*

Gegeben seien stets die Axen $a$ und $b$ und der Punkt $C$. Bei der Darstellung im Zweitafelsysteme wird man das Gebilde gegen die beiden Tafeln wie in Figur 2 (Tafel II) so anordnen, dass die Gerade $AB$ auf der ersten Tafel senkrecht steht. Bei der axonometrischen Darstellung, die wir zunächst näher betrachten wollen, sei als $z$-Axe die Gerade $AB$, als $x$-Axe die Axe $a$ gewählt; $XYZ$ sei das Spurendreieck der Zeichenebene (Figur 16, Tafel II). Man klappe die $xz$-Ebene um $XZ$ in die Zeichenebene um; es wird dann $A^*C^* = p$ und $C^*B^* = q$. Ebenso werde auch die $xy$-Ebene um $XY$ in die Zeichenebene umgelegt. Es gilt jetzt zunächst die Projektion unseres Gebildes auf die $xy$-Ebene in der Umklappung zu zeichnen. Diese Konstruktion verläuft genau wie jene in der Grundrissebene bei der Darstellung im Zweitafelsysteme; nur stimmt der positive Drehungssinn infolge der Umlegung mit dem Gange des Uhrzeigers überein. Wir werden unsere weitere Betrachtung, die dann auch für die Zeichnung des Grundrisses im Zweitafelsysteme gültig ist, an Figur 16 (Tafel II) anknüpfen. Um einen beliebigen Punkt $R_0$ der umgelegten Projektion $c_0$ der Berührungserzeugenden $c$ auf die $xy$-Ebene zu finden, beachte man, dass, wie in Figur 2 (Tafel II), einmal $\sphericalangle P_0 R_0 A_0 = \frac{\pi}{2}$, sodann:

$$P_0 R_0 : R_0 Q_0 = p : q = P_0 S : S A_0$$

ist, wo $R_0 S \parallel b_0$ sei. Nimmt man daher $P_0$ beliebig an, so ist durch diese Beziehungen $R_0$ zweideutig bestimmt, wie es sein muss. Die weitere Konstruktion in der umgelegten $xy$-Ebene bietet keine Schwierigkeit, da einmal $c_0$ die eine Asymptote für beide Umrisshyperbeln ist, anderseits die Halbaxen derselben durch $p$ und $q$ gegeben sind. Die Hyperboloide selbst seien beiderseits durch zu ihrer Axe senkrechte Ebenen begrenzt, deren Schnitte wir als Grundkreise bezeichnen wollen. In Figur 16 (Tafel II) führt der Punkt $R_0$ zu zwei Hyperboloiden des ersten Hauptfalles (Figur IV, Tafel I), der Punkt $(R_0)$ zu solchen des dritten Hauptfalles. Letzteres ist in Figur 17 (Tafel II) weiter ausgeführt. Im dritten Hauptfalle hat man ja noch die Schnitterzeugenden zu zeichnen, deren Projektionen gemeinsame Tangenten $HK$ beziehungsweise $H_1 K_1$ an die Umrisshyperbeln sind. Es besteht die Proportion:

$$\Delta HJA_0 : \Delta KJA_0 = HJ : JK.$$

Nun ist jedes dieser Dreiecke bezüglich gleich demjenigen, welches durch die Asymptoten und die Scheiteltangente der zugehörigen

* Ausführlich wird diese Konstruktion behandelt bei De la Gournerie l. c. Art. 729—738, sowie bei Rohn und Papperitz l. c. Art. 561. Meine Angaben im Texte erheben nicht den Anspruch, irgendwie Neues zu geben, wenn auch vielleicht hier und da eine kleine Vereinfachung erzielt sein mag.



Hyperbel begrenzt wird. Und da beide Hyperbeln dieselbe imaginäre Axe haben, so verhält sich schliesslich:

$$HJ : JK = q : p.$$

Diese Gleichung liefert die Richtung der parallelen Tangenten $HK$ und $H_1K_1$ und damit diese selbst.

Um jetzt die axonometrische Projektion selbst beziehungsweise den Aufriss der Hyperboloide zu zeichnen, beachte man noch folgende Sätze. Die Axe $a$ beziehungsweise $b$ (oder ihre zweite Projektion) ergiebt allemal die Symmetrielinie ihres Hyperboloids. In ihr liegen die kleinen Axen der die Grundkreise darstellenden Ellipsen; deren grosse Axen sind gleich den Durchmessern der Kreise. Da noch die Schnittpunkte der Ellipsen mit der Geraden $c$ bekannt sind, so lassen sich diese unmittelbar zeichnen. Gehört zu dem einen oder anderen Hyperboloid dann eine Umrissellipse, wie z. B. zu dem Hyperboloid mit der Axe $b$ im Aufrisse der Figur I der Tafel I, so ist ihre grosse Axe gleich dem bekannten Durchmesser des Kehlkreises. Sie ist vollends bestimmt bei axonometrischer Darstellung durch die eine Tangente bildende Berührungserzeugende $c$, bei der Darstellung im Zweitafelsysteme durch die vertikalen Tangenten der Umrisshyperbel des Grundrisses, welche dann zugleich die Tangenten in den Endpunkten der kleinen Axe sind. Die reelle Axe einer etwa vorkommenden Umrisshyperbel der axonometrischen Projektion beziehungsweise des Aufrisses aber ist ebenfalls gleich dem Durchmesser des Kehlkreises. Die Asymptoten ferner sind die Tangenten an die Ellipse, welche einen der Grundkreise des zugehörigen Asymptotenkegels darstellt. Letztere ist ihrerseits zu der den entsprechenden Grundkreis des Hyperboloids darstellenden Ellipse ähnlich und ähnlich gelegen, und ihre grosse Axe ist gleich einer Sehne des letztgenannten Grundkreises im Abstande des Kehlkreisradius vom Mittelpunkte. Zugleich findet man die Berührungspunkte der Umrisshyperbel mit jeder Grundellipse des Hyperboloids als Schnitt der letzteren mit derjenigen Parallelen, die man zu ihrer grossen Axe durch die bekannten Berührungspunkte der die Asymptoten darstellenden Tangenten an die entsprechende Grundellipse des Asymptotenkegels legt. Schliesslich mag man noch in beliebiger Zahl Erzeugende beider Hyperboloide hinzufügen. Dies geschieht am zweckmässigsten, indem man jedes Hyperboloid in seitlicher Ansicht darstellt und die hier leicht einzuzeichnenden Erzeugenden dann überträgt, wie es z. B. in der umgelegten $xy$-Ebene der Figur IV (Tafel I) ausgeführt ist.

## Zerlegung der Gleichung vierten Grades.

Von Dr. **Heilermann** in Godesberg.

Um die allgemeine Gleichung vierten Grades

$$1)\qquad F = ax^4 + 4bx^3 + bcx^2 + 4dx + e = 0$$

in zwei quadratische Gleichungen zu zerlegen, nehme man an, dass die Summe $F$ zunächst in eine sehr allgemeine leicht zerlegbare Form verwandelt worden sei, nämlich in:

$$2)\quad \begin{cases} F = m(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)^2 + 2n(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)(\alpha_1 x^2 + 2\beta_1 x + \gamma_1)^2 \\ \qquad + (\alpha_1 x^2 + 2\beta_1 x + \gamma_1)^2. \end{cases}$$

Demnach müssen die neun neuen Koeffizienten $m$, $n$, $p$, $\alpha$ etc. folgenden fünf Bedingungen genügen:

$$3)\quad \begin{cases} m\alpha^2 + 2n\alpha\alpha_1 + p\alpha_1^2 = a, \quad m\alpha\beta + n(\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1) + p\alpha_1\beta_1 = b, \\ m\gamma^2 + 2n\gamma\gamma_1 + p\gamma_1^2 = e, \quad m\beta\gamma + n(\beta\gamma_1 + \gamma\beta_1) + p\beta_1\gamma_1 = d, \\ \quad m(\alpha\gamma + 2\beta^2) + n(\alpha\gamma_1 + \gamma\alpha_1 + 4\beta\beta_1) + p(\alpha_1\gamma_1 + 2\beta_1^2) = 3c. \end{cases}$$

Um die letzte Bedingung den vorangehenden ähnlicher zu gestalten, setze man an ihre Stelle die zwei Gleichungen:

$$3^*)\quad m\beta^2 + 2n\beta\beta_1 + p\beta_1^2 = c - \lambda, \quad m\alpha\gamma + n(\alpha\gamma_1 + \gamma\alpha_1) + p\alpha_1\gamma_1 = c + 2\lambda,$$

in denen vorläufig $\lambda$ eine unbekannte Zahl bezeichnet.

Dann kann man diese Bedingungen in folgende Gruppen zu je dreien ordnen:

$$\begin{cases} \alpha(m\alpha + n\alpha_1) + \alpha_1(p\alpha_1 + n\alpha) - a = 0, \\ \beta(m\alpha + n\alpha_1) + \beta_1(p\alpha_1 + n\alpha) - b = 0, \\ \gamma(m\alpha + n\alpha_1) + \gamma_1(p\alpha_1 + n\alpha) - (c + 2\lambda) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(m\beta + n\beta_1) + \alpha_1(p\beta_1 + n\beta) - b = 0, \\ \beta(m\beta + n\beta_1) + \beta_1(p\beta_1 + n\beta) - (c - \lambda) = 0, \\ \gamma(m\beta + n\beta_1) + \gamma_1(p\beta_1 + n\beta) - d = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(m\gamma + n\gamma_1) + \alpha_1(p\gamma_1 + n\gamma) - (c + 2\lambda) = 0, \\ \beta(m\gamma + n\gamma_1) + \beta_1(p\gamma_1 + n\gamma) - d = 0, \\ \gamma(m\gamma + n\gamma_1) + \gamma_1(p\gamma_1 + n\gamma_1) - e = 0. \end{cases}$$

Wenn man danach aus diesen Gruppen die zweigliedrigen Summen $m\alpha + n\alpha_1$, $p\alpha_1 + n\alpha$ etc. eliminiert, so erhält man eine neue Gruppe von drei Gleichungen, nämlich:

$$4)\quad \begin{cases} a(\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1) + b(\gamma\alpha_1 - \alpha\gamma_1) + (c + 2\lambda)(\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1) = 0, \\ b(\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1) + (c - \lambda)(\gamma\alpha_1 - \alpha\gamma_1) + d(\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1) = 0, \\ (c + 2\lambda)(\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1) + d(\gamma\alpha_1 - \alpha\gamma_1) + e(\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1) = 0. \end{cases}$$

Da in diesen Gleichungen nur die zwei Verhältnisse von den Verbindungen der neuen Koeffizienten als Unbekannte anzusehen sind, so können die drei Gleichungen nur unter der Bedingung nebeneinander bestehen, wenn die Determinante aus ihren Koeffizienten Null ist. Also muss die bisher unbekannte Zahl $\lambda$ der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a & b & c+2\lambda \\ b & c-\lambda & d \\ c+2\lambda & d & e \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$5)\quad 4\lambda^3 - (ae - 4bd + 3c^2)\lambda + ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3 = 0$$

Genüge leisten und kann daher drei verschiedene Werte annehmen.

Nachdem durch diese Gleichung, die unter dem Namen der **kubischen Resolvente** bekannt ist, die Hilfsgrösse $\lambda$ ermittelt ist, erhält man für die Diskriminante der Gleichung 2) folgende Werte aus den Gleichungen 3):

$$6)\left\{\begin{aligned} n^2-mp &= \frac{b^2-ac+a\lambda}{(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)^2} = \frac{d^2-ce+e\lambda}{(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)^2} = \frac{(c+2\lambda)^2-ae}{(\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)^2} \\ &= \frac{(c-\lambda)(c+2\lambda)-bd}{(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)(\beta\gamma_1-\gamma\alpha_1)} = \frac{be-cd-2d\lambda}{(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)(\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)} = \frac{ad-bc-2b\lambda}{(\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)}. \end{aligned}\right.$$

Wenn diese Grösse der Kürze wegen mit $D$ bezeichnet, so ist:

$$mF = [(m\alpha + n\alpha_1)x^2 + 2(m\beta + n\beta_1)x + m\gamma + n\gamma_1]^2 - D(\alpha_1 x^2 + 2\beta_1 x + \gamma_1)^2,$$

und daher zerfällt die Gleichung 1) in die quadratischen Gleichungen:

$$7)\left\{\begin{aligned} &(m\alpha + n\alpha_1 - \alpha_1\sqrt{D})x^2 + 2(m\beta + n\beta_1 - \beta_1\sqrt{D})x \\ &\qquad + m\gamma + n\gamma_1 - \gamma_1\sqrt{D} = 0, \\ &(m\alpha + n\alpha_1 + \alpha_1\sqrt{D})x^2 + 2(m\beta + n\beta_1 + \beta_1\sqrt{D})x \\ &\qquad + m\gamma + n\gamma_1 + \gamma_1\sqrt{D} = 0. \end{aligned}\right.$$

Multipliziert man die erste von diesen beiden Gleichungen mit

$$\frac{m\alpha + n\alpha_1 + \alpha_1\sqrt{D}}{m}, \text{ die andere mit } \frac{m\alpha + n\alpha_1 - \alpha_1\sqrt{D}}{m},$$

so wird das erste Glied in beiden rational, und sie gehen über in:

$$8)\left\{\begin{aligned} ax^2 + 2(b - \sqrt{b^2 - ac + a\lambda})x + c + 2\lambda - \sqrt{(c+2\lambda)^2 - ae} = 0, \\ ax^2 + 2(b + \sqrt{b^2 - ac + a\lambda})x + c + 2\lambda + \sqrt{(c+2\lambda)^2 - ae} = 0. \end{aligned}\right.$$

Das Produkt beider ist:

$$aF = (ax^2 + 2bx + c + 2\lambda)^2 - (2x\sqrt{b^2 - ac + a\lambda} + \sqrt{(c+2\lambda)^2 - ae})^2 = 0.$$

Wenn man aber in den Gleichungen 7) aus den mittleren Gliedern die Wurzeln durch entsprechende Multiplikationen wegschafft, so erhält man:

$$9)\left\{\begin{aligned} (b + \sqrt{b^2 - ac + a\lambda})x^2 + 2(c-\lambda)x + d - \sqrt{d^2 - ce + e\lambda} = 0, \\ (b - \sqrt{b^2 - ac + a\lambda})x^2 + 2(c-\lambda)x + d + \sqrt{d^2 - ce + e\lambda} = 0 \end{aligned}\right.$$

und als deren Produkt:

$$(c-\lambda)F = (bx^2 + 2(c-\lambda)x + d)^2 - (x^2\cdot\sqrt{b^2 - ac + a\lambda} - \sqrt{d^2 - ce - e\lambda})^2.$$

In gleicher Weise lassen sich auch aus dem absoluten Gliede der Gleichungen 7) die Wurzeln entfernen; dadurch erscheinen sie in der Form:

$$10)\left\{\begin{aligned} (c + 2\lambda - \sqrt{(c+2\lambda)^2 - ae})x^2 + 2(d + \sqrt{d^2 - ce + e\lambda})x + e = 0, \\ (c + 2\lambda + \sqrt{(c+2\lambda)^2 - ae})x^2 + 2(d - \sqrt{d^2 - ce + e\lambda})x + e = 0, \end{aligned}\right.$$

und ihr Produkt ist:

$$eF = [(c+2\lambda)x^2 + 2dx + e]^2 - (x^2\cdot\sqrt{(c+2\lambda)^2 - ae} - 2x\cdot\sqrt{d^2 - ce + e\lambda})^2 = 0.$$

Aus jedem dieser drei Paare von Gleichungen erhält man die beiden anderen, wenn man die Wurzelgrössen aus einem Gliede durch die geeignete Multiplikation entfernt und dabei die obigen Werte 6) beachtet.

In der vorstehenden Umformung und Zerlegung ist ausser anderen auch diejenige enthalten, die ich im Programm der Realschule zu Trier 1855 mitgeteilt habe. Setzt man nämlich $\alpha = \alpha_1 = 1$, $\gamma = \beta^2$, $\gamma_1 = \beta_1^2$, so ist nach 2):

$$F = m(x+\beta)^4 + 2n(x+\beta)^2\cdot(x+\beta_1)^2 + p(x+\beta_1)^4,$$

und daraus folgt wie oben:

$$mF = [m(x+\beta)^2 + n(x+\beta_1)^2]^2 - (n^2 - mp)(x+\beta_1)^4.$$

Daher kann die Gleichung $F = 0$ ersetzt werden durch die quadratischen Gleichungen:

$$(m+n+\sqrt{D})x^2 + 2(m\beta + n\beta_1 + \beta_1\sqrt{D})x + m\beta^2 + n\beta_1^2 + \beta_1^2\cdot\sqrt{D} = 0,$$
$$(m+n-\sqrt{D})x^2 + 2(m\beta + n\beta_1 - \beta_1\sqrt{D})x + m\beta^2 + n\beta_1^2 - \beta_1^2\cdot\sqrt{D} = 0;$$

und diese gehen ebenso, wie die Gleichungen 7), in eines der dort folgenden Paare über, wenn man den ersten, zweiten oder dritten Koeffizienten rational macht. Nach diesen Umformungen ist die Auflösung der Gleichung 1) zweckmässig folgende.

Bezeichnet man ihre Wurzeln mit $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ und die der kubischen Resolvente mit $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, so ist nach den Gleichungen 8):

$$x_1 + x_2 = -\frac{2}{a}\left(b - \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1}\right),$$
$$x_3 + x_4 = -\frac{2}{a}\left(b + \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1}\right),$$
$$x_1 + x_3 = -\frac{2}{a}\left(b - \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_2}\right),$$
$$x_2 + x_4 = -\frac{2}{a}\left(b + \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_2}\right),$$
$$x_1 + x_4 = -\frac{2}{a}\left(b - \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_3}\right),$$
$$x_2 + x_3 = -\frac{2}{a}\left(b + \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_3}\right).$$

Wenn man diese Werte paarweise verbindet, so entsteht:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{4}{a}\cdot b,$$
$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = \frac{4}{a}\cdot\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1},$$
$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = \frac{4}{a}\cdot\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_2},$$
$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = \frac{4}{a}\cdot\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_3},$$

und daraus erhält man durch Addition und Subtraktion als Werte der Wurzeln:

$$x_1 = \frac{1}{a}\left(-b + \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1} + \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_2} + \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_3}\right),$$
$$x_2 = \frac{1}{a}\left(-b + \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1} - \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_2} - \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_3}\right),$$
$$x_3 = \frac{1}{a}\left(-b - \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1} + \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_2} - \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_3}\right),$$
$$x_4 = \frac{1}{a}\left(-b - \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1} - \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_2} + \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_3}\right).$$

In dem Produkte aus diesen vier Werten ist neben rationalen Gliedern auch $\sqrt{a^2 - ac + a\lambda_1} \cdot \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_2} \cdot \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_3}$ enthalten, daher muss auch dieses rational sein; die Rechnung ergiebt:

$$\sqrt{b^2 - ac + a\lambda_1} \cdot \sqrt{a^2 - ac + a\lambda_2} \cdot \sqrt{b^2 - ac + a\lambda_3} = -\frac{2b^3 - 3abc + a^2 d}{2}.$$

Das Entsprechende gilt wegen der Gleichung 10), wenn man die reziproken Werte von den obigen Werten als ihre Wurzeln auffasst, auch von dem entsprechenden Produkte, nämlich von

$$\sqrt{d^2 - ce + e\lambda_1} \cdot \sqrt{d^2 - ce + e\lambda_2} \cdot \sqrt{d^2 - ce + e\lambda_3} = -\frac{2d^3 - 3cde + b^2 e}{2}.$$

---

## Bemerkung zu den Bemerkungen über doppeltzentrische Vierecke.*

Von Dr. **Chr. Beyel** in Zürich.

Herr Dr. Holzmüller macht mich darauf aufmerksam, dass in der erwähnten kleineren Mitteilung Zeile 10 von oben der Satz: „weil im Kreisviereck..." als Begründung nicht genügt.** Ich teile daher noch mit, dass mich ein anderer Gedanke zu der ganzen Überlegung führte. Durch die Konstruktion der Linien $q$, $s$ wird der Strahlenbüschel zweiter Ordnung $q$ den Linien $s$ eindeutig zugeordnet. In dieser Zuordnung entsprechen sich die Gegenseiten $g$, $h$; $e$, $f$ des Vierecks $ABCD$ vertauschbar. Also ist die Korrespondenz involutorisch. $s$ muss $q$ vertauschbar entsprechen und $J^2$ berühren. Ich suchte damals — und suche also auch jetzt noch einen einfachen, rein geometrischen Beweis, der nicht wie der obige Gedanke eine Untersuchung der erwähnten Korrespondenz voraussetzt.

Sind die Kreise $J^2$, $U^2$ konzentrisch, so springt die Richtigkeit der Sätze sofort in die Augen.

---

## Aufgabe 1.***

Von **S. Finsterwalder** in München.

Das Netz eines Kugelballons besteht aus einer sehr grossen Anzahl (96 und mehr auf dem Umfange) rhombischer Maschen mit Winkeln von $60^0$ und $120^0$, deren kurze Diagonalen nach Parallelkreisen und deren lange nach Meridianen angeordnet sind. Ihre Dimensionen wachsen regelmässig vom

---

* Vergl. Band 40 S. 372 dieser Zeitschrift.

** Was Poncelet (traité I, No. 566) zum Beweise beibringt, ist weitläufig und scheint mir nicht zwingend zu sein. Dr. Holzmüller giebt im dritten Teile seines methodischen Lehrbuches der Elementar-Mathematik (B. G. Teubner 1895) S. 11 und 12 einen gerechneten Beweis und macht mich auf einen Beweis von Dr. Junker (Schulprogramm, Crefeld 1892) aufmerksam.

*** Wir beabsichtigen, versuchsweise von jetzt an derartige aus der Praxis stammende Aufgaben in der Zeitschrift zu bringen und empfehlen dieselben den Mathematikern zur Lösung. D. Red.

oberen Ventilringe bis zum Äquator. Das Netz reicht in dieser Form etwas unter den Äquator. Die Figur desselben ist demnach genähert durch zwei Scharen von Kugelloxodromen gebildet, die sich unter einem Winkel von 60° schneiden.

Ein solches, für einen Ballon von bestimmtem Radius konstruiertes Netz soll nun für einen grösseren Kugelballon, oder auch für einen Ballon von anders geformtem Meridian benützt werden. Welche Figur bildet dann das Netz? Bis zu welchem Kugelradius lässt sich dasselbe noch verwenden? Welche Erscheinung tritt auf, wenn der Radius grösser wird? Welche Form hat das Netz in dem speziellen Falle eines unendlich grossen Radius, wenn also das Netz symmetrisch im Kreise herum in eine Ebene ausgebreitet wird?

## Druckfehler in S. Gundelfinger-A. M. Nell's Tafeln zur Berechnung neunstelliger Logarithmen.

(Darmstadt 1891, A. Bergsträsser.)

Gefunden von **Joseph Blater** in Baden-Baden.

**Corrigenda zu Tafel I** (Seite 2—37).

| Seite: | Logarithmen: | Statt: | Soll stehen: | Seite: | Logarithmen: | Statt: | Soll stehen: |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1574 | 7428 | 4728 | 22 | 6002 | 5991 | 5991 |
| 6 | 2360 | 2093 | 2003 | 24 | 6824 | 9108 | 9018 |
| 6 | 2502 | 838 | 828 | 26 | 7264 | 6836 | 5836 |
| 8 | 2552 | 00670 | 0670 | 31 | 8216 | 0431 | 0481 |
| 8 | 2593 | 480 | 380 | 31 | 8256 | 9984 | 9684 |
| 10 | 3024 | 1587 | 1787 | 32 | 8704 | 8882 | 8882 |
| 12 | 3532 | 0795 | 0695 | 32 | 8873 | 0382 | 0482 |
| 14 | 4130 | 0752 | 0052 | 34 | 9323 | 6842 | 5684 |
| 18 | 5051 | 6369 | 7369 | 35 | 9237 | 533 | 553 |
| 18 | 5492 | 0529 | 0529 | | | | |

# Über Beziehungen zwischen den Determinanten einer Matrix.

Von

Dr. W. Ahrens

in Antwerpen.

## § 1.

In einer früheren Note* ist von mir die Frage untersucht worden, unter welchen Umständen in einer Matrix von $m$ Zeilen und $n$ Kolonnen ($m < n$) das Verschwinden einiger Determinanten $m^{\text{ten}}$ Grades das aller Determinanten dieses Grades nach sich zieht. Die vorliegende Arbeit bezweckt nun eine Erweiterung jener, insofern als jetzt die betreffende Frage nicht bloss mit Bezug auf die Determinanten des höchst möglichen ($m^{\text{ten}}$) Grades, sondern für die Determinanten beliebigen Grades in der Matrix behandelt werden soll.

Das damals erhaltene Resultat ist kurz folgendes: Es sei die betrachtete Matrix:

$$1)\qquad M = \left| \begin{matrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{matrix} \right| \quad (m < n);$$

unter $|i_1, i_2 \dots i_m|$ werde, wenn die $i$ irgend welche Indices aus der Reihe $1 \dots n$ sind, die aus den Kolonnen $i_1, i_2 \dots i_m$ gebildete Determinante $m^{\text{ten}}$ Grades verstanden. Wenn alsdann von allen $\binom{n}{m}$ Determinanten $m^{\text{ten}}$ Grades $n - m + 1$ verschwinden, d. h. also, wenn wir in der angegebenen Bezeichnung ein Gleichungssystem von der Form:

$$2)\qquad \begin{cases} |i_{11}, \; i_{12} \dots i_{1m}| = 0 \\ |i_{21}, \; i_{22} \dots i_{2m}| = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ |i_{s1}, \; i_{s2} \dots i_{sm}| = 0 \end{cases}$$

haben, wo $s$ zur Abkürzung für $n - m + 1$ gesetzt ist, so verschwinden unter gewissen weiteren Bedingungen alle Determinanten dieses Grades.

---

* Diese Zeitschrift, 1895, S. 177.

Der Beweis hierfür wurde geführt durch successive Anwendung des Schlusses, dass aus dem Bestehen von zwei Gleichungen:

$$3)\quad \begin{cases} A = | i_1,\ i_2 \dots i_{m-1},\ i_m \quad | = 0 \\ B = | i_1,\ i_2 \dots i_{m-1},\ i_{m+1} \ = 0 \end{cases}$$

unter bekannter Bedingung folgt, dass jede aus irgend $m$ dieser $m+1$ Kolonnen gebildete Determinante verschwindet, was wir jetzt bezeichnen wollen durch das Symbol:

$$4)\quad {}_{m}| i_1,\ i_2 \dots i_m,\ i_{m+1} | = 0.$$

Von den Determinanten $A$ und $B$, welche in $m-1$ ihrer $m$ Kolonnen übereinstimmen,* wollen wir sagen, sie bilden zusammen die Gruppe

$$G(i_1,\ i_2 \dots i_m,\ i_{m+1}) = G(A,\ B),$$

und wollen die rein formale Operation, welche zur Bildung dieser Gruppe aus den beiden Determinanten $A$ und $B$ führt, kurz als Operation $G$ bezeichnen. Genau dieselbe Bezeichnung wenden wir an, wenn es sich nicht nur um zwei, sondern beliebig viele solcher Determinanten handelt, also sagen wir: die Determinanten

$$5)\quad \begin{cases} A_0 \equiv | i_1,\ i_2 \dots i_{m-1},\ i_m \quad | \\ A_1 \equiv | i_1,\ i_2 \dots i_{m-1},\ i_{m+1} | \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ A_k \equiv | i_1,\ i_2 \dots i_{m-1},\ i_{m+k} | \end{cases}$$

bilden zusammen die Gruppe

$$G(A_0,\ A_1 \dots A_k) \equiv G(i_1,\ i_2 \dots i_m,\ i_{m+1} \dots i_{m+k})$$

und schreiben das aus den Gleichungen:

$$A_0 = 0,\ \ A_1 = 0 \dots A_k = 0$$

unter der bekannten weiteren Bedingung abzuleitende, der Gleichung 4) entsprechende Resultat in der Form:

$$6)\quad {}_{m}| i_1,\ i_2 \dots i_m,\ i_{m+1} \dots i_{m+k} | = 0.$$

Eine solche aus $k+1$ Determinanten abgeleitete Gruppe wollen wir als vom Range $k$ bezeichnen, also die einfachste aus zwei Determinanten hergeleitete vom Range 1.

Damit nun durch successive Anwendung dieser Operation $G$ aus den Determinanten des Systems 2) leicht alle Determinanten $m^{\text{ten}}$ Grades der Matrix hergeleitet werden konnten, war angenommen, dass sich in dem System 2) eine solche Anordnung treffen liess, dass von den Indices jeder Zeile in 2) gerade $m-1$ in den vorhergehenden Zeilen schon vorkommen. Nimmt man an, dass in dem obigen

---

* In dem allgemeinen, weiterhin zu behandelnden Falle, wo nicht alle betrachteten Determinanten denselben Zeilen angehören, tritt hierzu natürlich als weitere Bedingung für eine Gruppe, dass die Zeilen beider Determinanten dieselben sind resp. die Kolonnen, wenn $m-1$ der Zeilen übereinstimmen.

Schema diese Anordnung bereits getroffen ist, und ferner, dass die neu hinzutretenden Indices in jeder Zeile an erster Stelle stehen, so sieht man, dass alsdann in der ersten Horizontal- und der ersten Vertikalreihe von 2) alle $n$ Indices vorkommen.

Die Bedingung, dass in jeder Reihe des Systems 2) jedenfalls ein neuer Index zu den früheren hinzutritt, involviert, dass, wie wir sagen wollen, das System „unabhängig" ist, d. h., dass es nicht möglich ist, eine der Determinanten 2) aus den anderen durch Anwendung der Operation $G$ herzuleiten. Eine unmittelbare Konsequenz dieser ersten Bedingung ist alsdann, dass in dem System 2) in jeder Zeile auch höchstens ein neuer Index hinzutritt, so dass die successive Anwendung der Operation $G$ dort überall möglich ist und alle Determinanten $m^{\text{ten}}$ Grades liefert. Ein solches System nun von einer Matrix $M$ angehörenden Determinanten eines bestimmten Grades, aus dem sich durch successive Anwendung der Operation $G$ alle Determinanten dieses Grades herleiten lassen, wollen wir „vollständig" und ein solches, bei dem dies nicht möglich ist, „unvollständig" nennen.

Schliesslich muss noch bemerkt werden, dass, damit nicht bloss die rein formale Operation $G$ alle Determinanten liefert, sondern sich auch das Verschwinden derselben ergiebt, bei jeder Anwendung der Operation $G$ die weitere Bedingung hinzutritt, dass unter den $m$ Determinanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades, welche aus den dem System 5) gemeinsamen $m-1$ Kolonnen gebildet werden können, wenigstens eine nicht verschwindet.

## § 2.

Wir stellen uns jetzt die Frage: Wie viele Determinanten von einem beliebigen, $r^{\text{ten}}$ Grade in einer Matrix müssen mindestens verschwinden, damit dies das Verschwinden aller Determinanten desselben Grades nach sich zieht? oder, was dasselbe ist: Welches ist die Minimalzahl von Determinanten, welche ein vollständiges unabhängiges System bilden können?

Die Indices der Zeilen resp. Kolonnen der vorgelegten Matrix seien durch $1 \ldots m$ resp. $1 \ldots n$ bezeichnet; repräsentieren

$$i_1, i_2 \ldots i_r$$

irgend $r$ dieser Zeilen- und $k_1, k_2 \ldots k_r$ irgend $r$ dieser Kolonnen-Indices, so bezeichnen wir die aus den betreffenden Zeilen und Kolonnen gebildete Determinante $r^{\text{ten}}$ Grades mit

$$|i_1, i_2, \ldots i_r;\; k_1, k_2 \ldots k_r|.$$

Die $\binom{m}{r} \cdot \binom{n}{r}$ verschiedenen Determinanten $r^{\text{ten}}$ Grades der Matrix $M$ denken wir uns in der Weise angeordnet, dass die denselben Zeilen der Matrix $M$ angehörenden Determinanten in derselben Horizontal-, und die denselben Kolonnen von $M$ angehörenden in derselben Ver-

tikalreihe stehen, so zwar, dass unter den verschiedenen Horizontal- und Vertikalreihen die Reihenfolge nach steigenden Indices erfolgt, so dass z. B. für den Fall

$$m = 3, \quad n = 4, \quad r = 2$$

sich die Anordnung ergiebt:

$$\begin{array}{cccccc} |1,2;1,2|; & |1,2;1,3|; & |1,2;1,4|; & |1,2;2,3|; & |1,2;2,4|; & |1,2;3,4| \\ |1,3;1,2|; & |1,3;1,3|; & |1,3;1,4|; & |1,3;2,3|; & |1,3;2,4|; & |1,3;3,4| \\ |2,3;1,2|; & |2,3;1,3|; & |2,3;1,4|; & |2,3;2,3|; & |2,3;2,4|; & |2,3;3,4|. \end{array}$$

Wir denken uns nun ein beliebiges vollständiges System, dessen Determinanten gleichfalls in dieser Weise geordnet sein mögen; alsdann muss es nach dem Begriffe der Vollständigkeit möglich sein, die bei dieser Anordnung frei bleibenden Plätze durch successive Anwendung der Operation $G$ auf die ursprünglichen Determinanten zu füllen, wobei die Operation $G$ natürlich auf Determinanten derselben Horizontal- wie derselben Vertikalreihen anzuwenden ist. Da das System vollständig sein soll, so müssen jedenfalls mindestens zwei Determinanten in demselben vorkommen, welche zusammen eine Gruppe bilden. Wendet man die Operation $G$ auf alle eine Gruppe bildenden Determinanten an, so erhält man, je nachdem es sich um eine Gruppe ersten, zweiten ... $k^{\text{ten}}$ Grades handelt:

$$\binom{r+1}{1} - 2, \quad \binom{r+2}{2} - 3 \ldots \binom{r+k}{k} - (k+1)$$

neue Determinanten hinzu. Diese bilden dann wieder Gruppen mit anderen, und so ergeben sich durch successive Anwendung der Operation $G$ schliesslich alle $\binom{m}{r} \cdot \binom{n}{r}$ Determinanten vom Grade $r$.

Um die zu Anfang dieses Paragraphen aufgeworfene Frage beantworten zu können, wollen wir zunächst zeigen, dass sich jedes vollständige System durch ein ihm äquivalentes von besonders übersichtlicher Bildung, seine „Normalform", ersetzen lässt, und machen zu diesem Zwecke zunächst folgende Vorbemerkung: Die aus den Determinanten $A$ und $B$ gebildete Gruppe $G(A, B)$ würde sich auch aus irgend zwei von einander verschiedenen Determinanten der Gruppe ergeben und wir können uns daher die Gruppe vollständig repräsentiert denken durch irgend zwei von ihren Determinanten, können uns also offenbar in einem System irgend zwei Determinanten, welche zusammen eine Gruppe bilden, ersetzt denken durch irgend zwei Determinanten dieser Gruppe, ohne dass hierdurch an dem Charakter des ganzen Systems hinsichtlich der Vollständigkeit oder Unabhängigkeit etwas geändert wird.

Hiernach beginnen wir nun die beabsichtigte Reduktion des vollständigen Systems auf die Normalform und suchen auf Grund der eben gemachten Bemerkung zunächst die Determinanten der letzten Horizontalreihe zu ersetzen durch solche, welche den früheren Reihen

angehören. Fassen wir irgend eine Determinante $X$ der letzten Reihe ins Auge, so können wir, wenn in derselben Vertikalreihe mit dieser bereits eine resp. mehrere der $r(m-r)$ Determinanten, welche mit ihr eine Gruppe bilden können, stehen, nach der obigen Bemerkung $X$ ersetzen durch eine der Determinanten, welche die Anwendung der Operation $G$ liefern würde, und welche notwendig einer der früheren Zeilen angehört. Haben wir dagegen in der betreffenden Vertikalreihe eine solche mit $X$ eine Gruppe bildende Determinante ursprünglich noch nicht, so ist es wegen der Vollständigkeit des Systems jedenfalls möglich, durch Anwendung der Operation $G$ eine solche herzuleiten, und sind hierfür zwei Fälle denkbar: Entweder wird diese Herleitung einer solchen Determinante bewerkstelligt mit Benutzung von $X$ oder ohne dieselbe. Im letzteren Falle erhalten wir also aus gewissen Determinanten $A, B, C \dots$ des ursprünglichen Systems durch die Operation $G$ eine Determinante $Y$, welche mit $X$ eine Gruppe bildet. Alsdann können wir nach der obigen Bemerkung $X$ offenbar ersetzen durch eine Determinante $Z$, welche der durch $X$ und $Y$ repräsentierten Gruppe angehört und notwendig in einer der früheren Zeilen steht; denn das System $A, B, C \dots X$ ist völlig äquivalent mit $A, B, C \dots Z$, weil das erstere zunächst $Y$ und dieses mit $X$ zusammen $Z$, das letztere dagegen zunächst gleichfalls $Y$ und dieses dann mit $Z$ zusammen $X$ liefert. Dies geht jedoch nicht mehr an, wenn die Herleitung von $Y$ nur mit Benutzung von $X$ möglich ist; eine solche Herleitung ist nur in folgender Weise denkbar: Da nach unserer Annahme $X$ in diesem Falle mit keiner Determinante derselben Vertikalreihe verbunden werden kann, so kann es nur in der Weise benutzt werden, dass es mit einer Determinante derselben Horizontalreihe zusammen eine Gruppe liefert. Dann können wir uns $X$ ersetzt denken durch eine andere Determinante dieser Gruppe und das Verfahren geht dann so weiter. Wir haben diese Determinante dann eventuell wieder zu ersetzen durch eine solche derselben Horizontalreihe etc., schliesslich aber müssen wir aus dieser Horizontalreihe herausgeführt werden, da dies Verfahren ja eben diente zur Herleitung einer einer früheren Zeile angehörenden Determinante. So vermindert sich hierdurch also jedenfalls die Zahl der Determinanten der letzten Horizontalreihe um eine. Man sieht, dass es auf diese Weise gelingt, das ursprüngliche System zu ersetzen durch ein ihm hinsichtlich der Vollständigkeit und Unabhängigkeit völlig äquivalentes, in dem keine Determinante der letzten Horizontalreihe mehr vorkommt. In diesem neuen System suchen wir nun die Determinanten der nunmehr letzten Horizontalreihe zu ersetzen durch solche, welche früheren Reihen angehören. Hier ergeben sich wieder dieselben verschiedenen Fälle wie oben und führt in jedem derselben ein dem betreffenden obigen genau analoges Verfahren zum Ziele; in dem zuletzt betrachteten Falle ist es denkbar, dass man benötigt ist, wieder Determinanten der vorher schon aus-

gemerzten letzten Horizontalreihe einzuführen, doch muss die successive Anwendung der Operation $G$ ja, wie ersichtlich, wieder aus dieser Reihe herausführen und verschwinden somit diese Determinanten wieder aus dem System. Wir erhalten somit ein neues äquivalentes System, in dem die beiden letzten Horizontalreihen fehlen und dies geht offenbar so lange fort, bis wir ein System haben, in dem nur noch Determinanten der ersten $m-r+1$ Horizontalreihen vorkommen. Würde man da nämlich auf zwei Determinanten derselben Vertikalreihe die Operation $G$ anwenden, so würde man nur Determinanten erhalten, welche späteren Horizontalreihen angehören, während bis dahin dies offenbar stets wenigstens eine einer früheren Horizontalreihe angehörende Determinante liefern musste, und zwar musste auch bis dahin, was wesentlich ist, in jeder Vertikalreihe mindestens noch ein Platz frei sein, da nicht mehr als die ersten $m-r+1$ Determinanten derselben Vertikalreihe in dem System vorkommen dürfen, wenn dasselbe unabhängig sein soll, was wir voraussetzen wollen. Wir haben damit das Resultat gewonnen, dass jedes unabhängige vollständige System sich ersetzen lässt durch ein ihm äquivalentes, dessen Determinanten sämtlich den $m-r+1$ ersten Horizontalreihen angehören.

In diesem System, das ja auch vollständig ist, muss es nun möglich sein, die einzelnen Horizontalreihen zu vervollständigen und wir können daher mit Bezug auf diese offenbar dasselbe Verfahren anwenden wie vorher auf die Vertikalreihen. Dabei ist zu beachten, dass hierbei keinerlei Veranlassung vorliegt, wieder Determinanten der bereits ausgemerzten Horizontalreihen einzuführen. Denn zunächst müssten schon mindestens zwei eine Gruppe bildende Determinanten eingeführt werden, damit aus ihnen etwas Neues hergeleitet werden könnte, sagen wir etwa die Determinanten:

$$|i_1, i_2 \dots i_s, i_{s+1} \dots i_r;\ k_1, k_2 \dots k_{r-1}, k|$$

und

$$|i_1, i_2 \dots i_s, i_{s+1} \dots i_r;\ k_1, k_2 \dots k_{r-1}, k'|,$$

wobei die Indices $i_1, i_2 \dots i_s$ in der Reihe $1, 2 \dots r-1$ enthalten sein mögen. Diese Determinanten können in dem vorliegenden System aber nur gewonnen werden aus den Gruppen:

$$G(1, 2 \dots r-1, i_{s+1}, i_{s+2} \dots i_r;\ k_1, k_2 \dots k_{r-1}, k)$$

resp.

$$G(1, 2 \dots r-1, i_{s-1}, i_{s+2} \dots i_r;\ k_1, k_2 \dots k_{r-1}, k').$$

Haben wir diese aber bereits, so können wir ja schon in einer der ursprünglichen Reihen, etwa in

$$1, 2 \dots r-1, i_{s+1} \quad \text{oder} \quad 1, 2 \dots r-1, i_{s+2} \text{ etc.}$$

jede der gewünschten Kombinationen der Indices $k_1, k_2 \dots k_{r-1}, k, k'$ herleiten, und sind somit nicht gezwungen, aus den ersten $m-r+1$ Horizontalreihen herauszugehen.

So können wir offenbar dieses System ersetzen durch ein ihm äquivalentes, dessen Determinanten alle den ersten $n - r + 1$ Vertikalreihen angehören, und dieses nennen wir die „Normalform". Wir haben also das Resultat gewonnen:

„Jedes unabhängige vollständige System lässt sich auf ein ihm äquivalentes reduzieren, in dem alle in derselben Horizontal-, wie auch alle in derselben Vertikalreihe stehenden Determinanten eine Gruppe bilden."

## § 3.

Auf Grund des im vorigen Paragraphen erhaltenen Resultats ist nun die Frage nach der Minimalzahl von Determinanten eines vollständigen Systems sehr leicht zu beantworten. Denn da ein System in der dort eingeführten Normalform offenbar nur dann vollständig ist, wenn es alle den $m - r + 1$ ersten Horizontal- und den $n - r + 1$ ersten Vertikalreihen angehörenden Determinanten enthält, so folgt, dass ein vollständiges System mindestens aus

$$p = (m - r + 1)(n - r + 1)$$

Determinanten bestehen muss. Dagegen ist es sehr wohl möglich, dass ein System $p$ oder mehr Determinanten enthält, ohne vollständig oder abhängig zu sein. Fügt man einem solchen System diejenigen Determinanten hinzu, welche erforderlich sind, um dasselbe zu einem vollständigen zu machen, so erhält man ein abhängiges System.

## § 4.

Es entsteht nun die Frage, für welche Werte der Grössen $m, n, r$ ein unabhängiges System von

$$p = (m - r + 1)(n - r + 1)$$

Determinanten stets vollständig ist resp. ob solche Wertsysteme überhaupt existieren. Wir beantworten diese Frage, indem wir umgekehrt zeigen, wann es unabhängige unvollständige Systeme von $p$ Determinanten giebt, und wann nicht. Hierfür ist folgende Bemerkung wesentlich: Existiert für gewisse Werte der Grössen $m, n, r$ ein unabhängiges unvollständiges System von $p$ Determinanten, so existiert auch für $m' = m + d, \quad n' = n + d, \quad r' = r + d,$

wo $d$ eine beliebige positive ganze Zahl ist, ein unabhängiges unvollständiges System von

$$p' = (m' - r' + 1)(n' - r' + 1)$$

Determinanten. Es ist nämlich $p' = p$ und wir brauchen in dem ursprünglichen unabhängigen unvollständigen System zu allen Kombinationen der Zeilen- und Kolonnen-Indices nur die $d$ neuen Zeilen- resp. Kolonnen-Indices hinzuzufügen, um so ein den neuen Werten $m'$, $n'$, $r'$ entsprechendes unabhängiges unvollständiges System von $p'$ Determinanten zu erhalten.

Auf Grund dieser Vorbemerkung untersuchen wir die oben aufgeworfene Frage nach der Existenz unabhängiger unvollständiger Systeme von $p$ Determinanten nur für den Fall $r = 3$, wo alsdann

$$p = (m - 2)(n - 2)$$

ist, und zwar wollen wir zunächst den Fall $m = n$ ins Auge fassen. Die $m$ Zeilen-Indices liefern $\binom{m}{3}$ Kombinationen zu je drei; fügen wir zu jeder derselben die gleiche Kombination der $n = m$ Kolonnen-Indices hinzu, so erhalten wir für $m > 3$ offenbar ein unabhängiges unvollständiges System von $\binom{m}{3}$ Determinanten, und da, wenn

$$m \geqq 4 \text{ ist, } \binom{m}{3} \geqq (m-2)^2 \text{ ist,}$$

so hat dieses System auch die gewünschte Anzahl von $p$ Determinanten. Dieses System, welches wir im folgenden kurz als System $A$ bezeichnen wollen, besitzt also in den $\binom{m}{3}$ verschiedenen Reihen bei der Anordnung des § 2 je eine Determinante. Wir wollen nun übergehen zu einer Matrix von $m' = m$ Zeilen und $n' = n + 1$ Kolonnen, an die Stelle von $p$ tritt dann offenbar

$$p' = p + m - 2.$$

Wollen wir nun aus dem System $A$ ein solches von $p'$ Determinanten für diesen neuen Fall herleiten, so müssen wir also noch $m - 2$ Determinanten zu dem alten System hinzufügen. Dies kann nun in folgender Weise geschehen: Es sei zunächst $m \geqq 6$. Wir wählen alsdann irgend zwei Horizontalreihen des Systems $A$, sagen wir kurz: $R_1$ und $R_2$, oder was dasselbe ist, irgend zwei Indiceskombinationen zu je drei aus; dieselben enthalten zusammen sechs verschiedene Indices resp. weniger, im letzteren Falle fügen wir so viele andere hinzu, dass wir sechs haben, was bei der Annahme $n \geqq 6$ natürlich möglich ist. Alsdann setzen wir in jede dieser beiden Reihen $R_1$ und $R_2$ je drei Kombinationen dieser sechs Indices zu je zwei Elementen, so zwar, dass die in einer Reihe stehenden drei Kombinationen jedes der sechs Elemente nur einmal und auch nur diejenigen kombiniert enthalten, welche in der betreffenden Kombination der drei Indices noch nicht zusammen vorkommen, oder schematisch dargestellt: Die ausgewählten Indiceskombinationen können

1. von der Form:
$$R_1: 1, 2, 3$$
$$R_2: 1, 2, 4$$

sein; alsdann treffen wir folgende Anordnung:

$$\text{zu } R_1: 1, 4;\ 2, 5;\ 3, 6$$
$$\text{zu } R_2: 1, 5;\ 2, 3;\ 4, 6.$$



Haben wir 2.:

$R_1: 1, 2, 3$

$R_2: 1, 4, 5,$

so ordnen wir an:

zu $R_1: 1, 4;\ 2, 5;\ 3, 6$

zu $R_2: 1, 2;\ 4, 3;\ 5, 6.$

Haben wir 3.:

$R_1: 1, 2, 3$

$R_2: 4, 5, 6,$

so schreiben wir:

zu $R_1: 1, 4;\ 2, 5;\ 3, 6$

zu $R_2: 4, 3;\ 5, 1;\ 6, 2.$

Die übrigen der $n$ Kolonnen-Indices ausser diesen sechs teilen wir in zwei gleiche Teile (I und II), zu welchem Zwecke wir bei ungeradem $n$ einen beliebigen fortlassen, schreiben diese beiden Teile untereinander und verbinden je zwei untereinander stehende Indices mit einander und fügen diese Kombinationen dann der ersten der obigen zwei Zeilen ($R_1$) hinzu. Sodann führen wir in der Reihe II eine cyklische Vertauschung aller Elemente aus* und verbinden dann wieder die unter einander stehenden Indices von I und II mit einander und fügen diese Kombinationen dann der Reihe $R_2$ hinzu. Alsdann fügen wir zu allen diesen Kombinationen zu je zwei Elementen in den Reihen $R_1$ und $R_2$ noch den dem System $A$ noch nicht angehörenden $(n+1)^{\text{ten}}$ Kolonnen-Index hinzu, so dass wir alsdann lauter Kombinationen zu je drei haben; auch wenn wir hierzu noch die in der betreffenden Reihe des Systems $A$ schon vorkommende Kombination zu drei Elementen rechnen, so haben wir in keiner der Reihen ein Paar von Kombinationen, das in mehr als einem Index übereinstimmt, und ferner haben die Reihen $R_1$ und $R_2$ keine Kombination gemein. Fügen wir diesen Kombinationen von Kolonnen-Indices dann die Zeilenkombinationen der Reihen $R_1$ und $R_2$ des Systems $A$ bei, so erhalten wir offenbar nach Hinzuziehung der Determinanten $A$ wieder ein unabhängiges unvollständiges System $B$ und zwar enthält dies, wenn $n$ gerade ist, $n$ und wenn $n$ ungerade ist, $n-1$ Determinanten mehr als $A$; es enthält $B$ also jedenfalls $p'$ Determinanten, wie verlangt war. Von diesem Systeme $B$ können wir nun durch Hinzunahme eines weiteren Kolonnen-Index ein neues unabhängiges unvollständiges System $C$ von den Konstanten

$$m'' = m', \quad n'' = n' + 1, \quad p'' = p' + (m' - 2) = p' + m - 2$$

in genau analoger Weise herleiten, indem wir statt der Reihen $R_1$ und $R_2$ zwei andere $R_3$ und $R_4$ nehmen und dies geht offenbar so weiter,

* Diese cyklische Vertauschung wird für $n \leq 9$ zwar illusorisch, doch liefern in diesen Fällen die übrigen Operationen schon die erforderliche Anzahl neuer Determinanten.

bis alle Reihen von $A$ verbraucht sind. Dieser Fall wird eintreten, wenn zum Systeme $A$ bereits $\left[\frac{1}{2}\binom{m}{3}\right]$ neue Kolonnen-Indices hinzugefügt sind, wo durch die eckige Klammer angedeutet werden soll, dass die nächst kleinere ganze Zahl zu $\frac{1}{2}\cdot\binom{m}{3}$ zu nehmen ist. Die Anzahl dieser so neu hinzugetretenen Kolonnen-Indices ist aber, wie man leicht sieht, $\geqq m$ für $m \geqq 5$. Wir wählen nun irgend $m$ dieser neuen Kolonnen-Indices aus und schreiben die $m$ Indices von $A$ darunter, bilden sodann alle $\binom{m}{3}$ Kombinationen dieser neuen $m$ Indices zu je drei und verbinden jede dieser Kombinationen von Kolonnen-Indices mit der Kombination der darunter stehenden alten Indices und sehen letztere als Zeilen-Kombinationen an; wir erhalten so $\binom{m}{3}$ neue Determinanten, welche wir dem zuletzt erhaltenen unabhängigen unvollständigen System anfügen können, ohne dass dessen Unabhängigkeit oder Unvollständigkeit dadurch aufgehoben wird. Hierbei erhält dann jede Reihe offenbar eine Determinante hinzu; nehmen wir nun wieder einen Kolonnen-Index hinzu, so können wir mit diesem in Bezug auf die jetzt erst neu hinzugetretenen Determinanten des letzt erhaltenen Systems dieselben Operationen vornehmen wie beim Übergange vom System $A$ zu $B$ und so geht dies offenbar immer fort.

Für $m = 5$ lässt sich im wesentlichen dieselbe Methode anwenden.

Alsdann ist $p' = p + 3$ und diese drei Determinanten, welche das System $B$ hier mehr als $A$ enthalten muss, ergeben sich in folgender Weise:

Während $A$ das System:

$$
\begin{array}{l}
|1, 2, 3;\; 1, 2, 3| \\
|1, 2, 4;\; 1, 2, 4| \\
|1, 2, 5;\; 1, 2, 5| \\
|1, 3, 4;\; 1, 3, 4| \\
|1, 3, 5;\; 1, 3, 5| \\
|1, 4, 5;\; 1, 4, 5| \\
|2, 3, 4;\; 2, 3, 4| \\
|2, 3, 5;\; 2, 3, 5| \\
|2, 4, 5;\; 2, 4, 5| \\
|3, 4, 5;\; 3, 4, 5|
\end{array}
$$

ist, treten für $B$ hierzu noch die Determinanten:

$$\begin{array}{l} |1,2,3;\ 1,4,6| \\ |1,2,3;\ 2,5,6| \\ |1,2,4;\ 1,3,6| \end{array}$$

etwa hinzu und im übrigen geht es dann so weiter, wie oben. Damit haben wir jedenfalls folgendes Resultat gewonnen:

Wenn $r \geqq 3$ und $\frac{m}{n} \geqq r + 2$ sind, so giebt es stets mindestens ein unabhängiges unvollständiges System von

$$p = (m - r + 1)(n - r + 1)$$

Determinanten.

Es bleiben jetzt noch die Fälle, wo von den Grössen $m$ oder $n$ wenigstens eine $= r$ oder $r + 1$ $(r > 3)$ ist und schliesslich der Fall

$$r = 2.$$

Es sei $m \leqq n$. Wir haben zunächst den Fall

$$m = r$$

zu betrachten; ist auch $n = r$, so haben wir den trivialen Fall einer Determinante, welche für sich natürlich stets ein unabhängiges vollständiges System bildet.

Der Fall $n = r + 1$, $p = 2$ liefert natürlich auch nur unabhängige vollständige Systeme von zwei Determinanten, im Falle $n = r + 2$ giebt es jedoch für $r > 3$ ein unabhängiges vollständiges System von $p = 3$ Determinanten, nämlich folgendes:

$$1) \qquad \begin{cases} |1, 2 \ldots r;\ 1, 2 \ldots r-2,\ r-1,\ r| \\ |1, 2 \ldots r;\ 1, 2 \ldots r-2,\ r+1,\ r+2| \\ |1, 2 \ldots r;\ 1, 2 \ldots r-4,\ r-1,\ r,\ r+1,\ r+2|, \end{cases}$$

dagegen ist für $r = 3$, $m = 3$, $n = 5$ jedes unabhängige System von drei Determinanten vollständig. In den drei Determinanten des Systems 1) kommen offenbar $3r$ Kombinationen der $r + 2$ Kolonnen zu je $r - 1$ vor und zwar sind alle verschieden, es kommen also noch nicht vor
$$\binom{r+2}{r-1} - 3r = \frac{(r+2)(r+1)r}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 3r,$$
ein Ausdruck, der, wenn $r > 3$ ist, $> 1$ ist. Wir können also jedenfalls noch eine in 1) noch nicht vorkommende Kombination von $r - 1$ Kolonnen-Indices auswählen; fügen wir zu diesen dann einen $(r + 3)^{\text{ten}}$ neuen Index hinzu und bilden mit dieser Kolonnen- und Zeilen-Kombination von 1) eine Determinante, so bildet diese mit den drei Determinanten von 1) ein unabhängiges unvollständiges System von $p = 4$ Determinanten. Dies Verfahren lässt sich offenbar fortsetzen und wir haben somit das Resultat gewonnen: Für $m = r$, $n \geqq r + 2$, $r > 3$ giebt es stets unabhängige unvollständige Systeme von

$$p = (m - r + 1)(n - r + 1)$$

Determinanten.

Während wir für $r = 3$, $m = 3$, $n = 5$ bei $p = 3$ Determinanten noch kein unabhängiges unvollständiges System haben, so tritt dies jedoch schon bei $r = 3$, $m = 3$, $n = 6$, $p = 4$ ein, es ist nämlich das System:

$$2)\qquad \begin{cases} |1,2,3;\ 1,2,3|;\ \ |1,2,3;\ 1,4,5| \\ |1,2,3;\ 2,4,6|;\ \ |1,2,3;\ 3,5,6|. \end{cases}$$

In diesem System kommen zwölf Kombinationen von je zwei Kolonnen-Indices vor, es fehlen also noch drei, nämlich hier:

$$1,6;\ \ 2,5;\ \ 3,4.$$

Wählen wir eine von diesen aus und fügen zu ihr einen siebenten Kolonnen-Index hinzu, so erhalten wir durch Hinzufügung einer solchen Determinante zu dem System 2) ein unabhängiges unvollständiges System von $p = 5$ Determinanten und dies geht offenbar so fort. Wir haben damit das Resultat gewonnen: Für

$$m = r = 3,\quad n \geq 6$$

existiert stets ein unabhängiges unvollständiges System von $p$ Determinanten.

Ist nun ferner $m = r + 1$ und zunächst $m = n$, so ist $p = 4$. Wir können nun die $r + 1$ Zeilen- wie Kolonnen-Indices zu je $r + 1$ verschiedenen Kombinationen von je $r$ vereinigen; bilden wir nun aus den übereinstimmenden Kombinationen von Zeilen- und Kolonnen-Indices Determinanten, so erhalten wir offenbar ein unabhängiges unvollständiges System und zwar ist die Anzahl der Determinanten desselben $= r + 1$, also, wenn $r > 3$ ist, $\geq p$. Man sieht sofort, dass wir jetzt, um auch für grössere Werte von $n$ unabhängige unvollständige Systeme von $p$ Determinanten zu erhalten, diese aus dem eben erhaltenen successive in genau analoger Weise, wie oben schon mehrfach auseinandergesetzt, erhalten können und haben damit das Resultat: Für

$$m = r + 1,\quad n \geq m,\quad r > 3$$

giebt es stets ein unabhängiges unvollständiges System von $p$ Determinanten.

Zusammenfassend haben wir also das Resultat gewonnen:

Für $r \geq 3$ existiert stets ein unabhängiges unvollständiges System von $p$ Determinanten, ausgenommen den trivialen Fall $m = n = r$, sowie die Fälle $m = r$, $n = r + 1$, und den vereinzelten Fall $m = r = 3$, $n = 5$.

## § 5.

In allen diesen Fällen haben wir Gewicht darauf gelegt, eine Methode anzugeben, welche zur Bildung unvollständiger unabhängiger Systeme von $p$ Determinanten ohne jede Gruppe (nach der Terminologie des § 1) führt. Es giebt nämlich auch unabhängige Systeme von $p$ Deter-

minanten, welche eine ein- oder mehrmalige Anwendung der Operation $G$ gestatten, ohne jedoch dabei vollständig zu sein. Dies mag beispielsweise an dem Falle

$$m = 4, \quad n = 6, \quad r = 3, \quad p = 8$$

erläutert werden.

Während das System:

$$\begin{array}{ll} |1,2,3;\ 1,2,3|, & |1,2,3;\ 4,5,6| \\ |1,2,4;\ 1,2,4|, & |1,2,4;\ 3,5,6| \\ |1,3,4;\ 1,3,4|, & |1,3,4;\ 2,5,6| \\ |2,3,4;\ 2,3,4|, & |2,3,4;\ 1,5,6| \end{array}$$

die Anwendung der Operation $G$ gar nicht gestattet, ist eine einmalige Anwendung dieser Operation dagegen möglich bei dem System:

$$\begin{array}{ll} |1,2,3;\ 1,2,3|, & |1,2,3;\ 1,2,5| \\ |1,2,4;\ 1,2,4|, & |1,2,4;\ 3,5,6| \\ |1,3,4;\ 1,3,4|, & |1,3,4;\ 2,5,6| \\ |2,3,4;\ 2,3,4|, & |2,3,4;\ 1,5,6| \end{array}$$

eine zweimalige Anwendung der Operation $G$ würde ermöglicht, wenn die zweite Reihe des eben angegebenen Systems ersetzt würde durch:

$$|1,2,4;\ 1,2,4|, \quad |1,2,4;\ 1,2,6|$$

und eine dreimalige, wenn ausserdem die dritte Reihe durch:

$$|1,3,4;\ 3,4,5|, \quad |1,3,4;\ 3,4,6|$$

ersetzt würde.

Das System:

$$\begin{array}{lll} |1,2,3;\ 1,2,3|, & |1,2,3;\ 1,2,4|, & |1,2,3;\ 1,5,6| \\ |1,2,4;\ 1,2,3|, & |1,2,4;\ 1,2,4|, & |1,2,4;\ 2,5,6| \\ |1,3,4;\ 3,5,6| & & \\ |2,3,4;\ 4,5,6| & & \end{array}$$

lässt sogar eine viermalige Anwendung der Operation $G$ in Bezug auf die ursprünglichen Determinanten und sodann noch eine zweimalige auf die bereits derivierten zu, so dass man im ganzen 20 Determinanten erhält, ohne dass das System vollständig ist.

## § 6.

Nunmehr wenden wir uns dem in § 4 noch unbehandelt gebliebenen Falle $r = 2$ zu und machen zu diesem Zwecke zunächst folgende Vorbemerkung: Die $\binom{2t}{2}$ Kombinationen von $2t$ Elementen zu je zwei lassen sich stets in $2t-1$ Gruppen einteilen, so dass jede

Gruppe von $t$ Kombinationen jedes Element ein-, aber auch nur einmal enthält.*

Wir nehmen zunächst an, $m$ und $n$ seien gerade, also etwa

$$m = 2\mu, \quad n = 2\nu, \quad n \geqq m.$$

Alsdann denken wir uns die $m$ Zeilen-Indices wie die $n$ Kolonnen-Indices in dem Sinne der eben angegebenen Vorbemerkung angeordnet und verbinden dann je eine solche Gruppe von Kombinationen der Zeilen-Indices mit je einer von Kombinationen der Kolonnen-Indices, wodurch also jedesmal $\mu\nu$ Determinanten entstehen. Da dies für alle $2\mu - 1$ Gruppen ($m \leqq n$) gemacht werden kann, so erhalten wir auf diese Weise ein offenbar unabhängiges unvollständiges System ($D$) von Determinanten, deren Anzahl

$$= \mu\nu(2\mu - 1), \quad \text{also} > (2\mu - 1)(2\nu - 1),$$

d. h. $> p$ ist, wenn $\mu > 2$, $m \geqq 4$ ist. Dabei bleiben dann von den $2\nu - 1$ Gruppen, in die die Kombinationen der Kolonnen-Indices eingeteilt sind, noch $2\nu - 2\mu$, jede $\nu$ Kombination enthaltend, übrig. Damit ist gezeigt, dass für gerade Werte von $m$ und $n (m, n \geqq 4)$ jedenfalls stets ein unabhängiges unvollständiges System von $p$ Determinanten existiert; ja es ist hieraus weiter sofort zu sehen, dass dies auch noch für andere Fälle gilt.

Die Anzahl $\mu\nu(2\mu - 1)$ von Determinanten unseres Systems ist nämlich für $\mu \geqq 3$ auch noch grösser als die zu den Werten:

$$1. \begin{cases} m = 2\mu + 1 \\ n = 2\nu, \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} m = 2\mu \\ n = 2\nu + 1, \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} m = 2\mu + 1 \\ n = 2\nu + 1 \end{cases}$$

gehörigen Werte von $p$, deren grösster $4\mu\nu$ ist, so dass damit für alle geraden und ungeraden Werte von $m, n \geqq 6$ die Frage erledigt ist.

Hiernach haben wir jetzt nur noch die Fälle $m = 2, 3, 5$ zu untersuchen; in allen anderen Fällen existierte für $r = 2$ ein unabhängiges unvollständiges System von $p$ Determinanten. Für $m = 5$ können wir die zehn Kombinationen der fünf Zeilen-Indices zu je zwei so zu Paaren anordnen, dass in keinem Paare ein Index zweimal vorkommt, etwa in der Weise:

* Eine einfache Lösung dieser Aufgabe findet sich bei Lucas, Récréations mathématiques, tome II, 1896, p. 177.

$$3)\qquad \left\{\begin{array}{l} 1,2;\ \ 3,5 \\ 1,3;\ \ 4,5 \\ 1,4;\ \ 2,3 \\ 1,5;\ \ 2,4 \\ 2,5;\ \ 3,4. \end{array}\right.$$

Nehmen wir nun zunächst $n$ als gerade, etwa $= 2\nu$ an, so können wir nach der oben gemachten Vorbemerkung die $\binom{n}{2}$ Kombinationen der Kolonnen-Indices in $2\nu - 1$ Gruppen von je $\nu$ ordnen, so zwar, dass in jeder Gruppe jeder Index gerade einmal vorkommt. Alsdann können wir die in 3) in je einer Reihe stehenden Zeilen-Kombinationen verbinden mit allen Kolonnen-Kombinationen je einer solchen Gruppe, wodurch wir jedesmal $2\nu$ Determinanten, im ganzen also deren $10\nu$ erhalten und zwar ist dies stets möglich, wenn

$$2\nu - 1 \geqq 5, \quad n \geqq 6$$

ist. So erhält man offenbar ein unvollständiges unabhängiges System; die Anzahl der Determinanten desselben ist $= 5n$, also $> p$, da

$$p = 4(2\nu - 1),$$

ja diese Anzahl ist auch noch grösser als der zu

$$m = 5, \quad n = 2\nu + 1$$

gehörige Wert von $p$, nämlich $8\nu$, so dass damit auch für die ungeraden Werte von $n$, welche $\geqq 7$ sind, die Frage erledigt ist. Für den noch übrig bleibenden Fall $m = n = 5$, $p = 16$ erhält man ein unabhängiges unvollständiges System von sogar 20 Determinanten, wenn man oben in 3) aus den Kombinationen je einer Reihe vier Determinanten bildet, indem man jede der beiden Kombinationen zweimal zur Zeilen- und zweimal zur Kolonnenkombination nimmt.

Für $m = 2$ giebt es, wie man sofort sieht, kein unabhängiges unvollständiges System von $p$ Determinanten, ebensowenig für $m = n = 3$, dagegen ist für $m = 3$, $n = 4$, $p = 6$ das System:

$$\begin{array}{ll} |1,2;\ 1,2|; & |1,2;\ 3,4| \\ |1,3;\ 1,3|; & |1,3;\ 2,4| \\ |2,3;\ 1,4|; & |2,3;\ 2,3| \end{array}$$

unabhängig und unvollständig.

Die Fälle $m = 3$, $n > 4$ nehmen nun eine Sonderstellung ein, insofern als hier zwar auch noch überall unabhängige unvollständige Systeme von $p$ Determinanten existieren, jedoch nicht mehr, wie dies sonst stets der Fall war, solche ohne jede Gruppe, sondern nur solche mit Gruppen. Wir nehmen zunächst an: $m = 3$, $n = 2\nu$. Alsdann können wir die $\binom{n}{2}$ Kombinationen der $n$ Kolonnen-Indices zu je zwei

in $2\nu - 1$ Gruppen teilen, so dass in jeder Gruppe jeder Index gerade einmal vorkommt. Verbinden wir nun jede der drei Kombinationen der drei Zeilen mit je einer dieser Gruppen, so erhalten wir $3\nu$ Determinanten, welche offenbar ein unabhängiges unvollständiges System bilden und zwar ohne jede Gruppe, jedoch ist die Zahl $3\nu < p$, welches den Wert $2(2\nu - 1)$ hat, ausser für den schon besprochenen Fall $\nu = 2$, $n = 4$. Wir erhalten daher für $m = 3$, $n \geqq 5$ kein unabhängiges unvollständiges System von $p$ Determinanten ohne Gruppen, dagegen wohl solche mit Gruppen, und zwar ergiebt sich für $m = 3$, $n = 5$, $p = 8$ ein solches, indem wir in dem oben für $m = 3$, $n = 4$ angegebenen Systeme von 6 Determinanten zu den beiden ersten Reihen die Kombination 1, 5 etwa hinzufügen. Tritt dann noch eine sechste Kolonne hinzu, so geht dies offenbar in derselben Weise so fort.

Man sieht somit, dass, abgesehen von den wenigen angegebenen Fällen, nämlich:

$$m = n = r; \quad m = r,\ n = r + 1; \quad m = r = 3,\ n = 5;$$
$$m = r = 2; \quad r = 2,\ m = n = 3$$

der Schluss, dass ein unabhängiges System von $p$ Determinanten auch vollständig ist, nicht berechtigt ist, vielmehr in jedem einzelnen Falle eine diesbezügliche Untersuchung stattfinden muss.

# Die Transformation und Auflösung der Gleichung fünften Grades in elementarer Darstellung.

Von

Dr. W. Heymann

in Chemnitz.

## 1. Einleitende Bemerkungen.

Die Auflösung der Gleichungen fünften Grades ist durch das vereinte Vordringen der hervorragendsten Forscher seit Mitte dieses Jahrhunderts derartig gefördert und zu einem gewissen Abschluss gebracht worden, dass es beinahe gewagt erscheint, wenn dieser Gegenstand nochmals einer Bearbeitung unterzogen wird. Aber es ist wohl nicht zu verkennen, dass die moderne Auflösung der Gleichung fünften Grades zur Zeit nur als gelegentliche, wenn auch tiefgehende Anwendung höherer Prinzipien erscheint, und das ist in der transzendenten Natur jener Lösung historisch wie sachlich wohl begründet. Die von Jacobi überlieferten Modulargleichungen sechsten Grades der elliptischen Funktionen wurden für Hermite, Kronecker und Brioschi einerseits, die von Schwarz und Klein konstruierte Ikosaedergleichung für Gordan und Klein anderseits die Quelle, aus welcher späterhin all' die bemerkenswerten Resultate geschöpft worden sind, welche eine „Konstruktion“ jener lange gesuchten Lösung ermöglicht haben. Das soll heissen: Die Elemente, welche die Lösung zusammensetzen, wie z. B. das Ikosaeder, sind nicht aus der Gleichung fünften Grades selbst gewonnen worden; man hat vielmehr diese Hilfsmittel an die Spitze gestellt, aber ihr Ursprung liegt auf anderem Gebiet.

Es dürfte daher wohl berechtigt sein, einer Transformationstheorie nachzugehen, welche aus sich selbst heraus alles erschliesst, was zur Lösung einer Gleichung fünften Grades nötig ist, welche dabei nur mit der Gleichung selbst operiert und nach keiner Seite hin spezifische Voraussetzungen macht, beziehentlich fertige Resultate von irgend welcher Seite übernimmt, abgesehen natürlich von einer Transzendenten, wie die elliptische oder hypergeometrische Funktion, ohne welche die Algebra hier eine definitive Lösung bewiesenermassen nicht zu geben vermag.

Eine solche Theorie soll nun folgen; sie wird der Anlage nach durchaus elementar ausfallen. Wir werden zeigen, dass eine beliebige Gleichung fünften Grades auf die spezielle Resolvente

$$h\eta^5 - 10\eta^2 + 15\eta - 6 = 0$$

zurückgeführt werden kann, welche fortan $\eta$-Resolvente heissen soll, und welche thatsächlich in unserer Darstellung eine wesentliche Rolle spielt. Auf die besonderen Vorzüge, welche gerade diese Resolvente besitzt, können wir erst in den betreffenden Abschnitten eingehen, sie zeigen sich aber dort ganz evident.

Die hier auftretenden Fragen haben wir bereits in einer früheren Arbeit* berührt, aber die dortigen Entwickelungen bewegen sich infolge Anlehnung an die Gordan-Kleinsche Theorie zum Teil in anderer Richtung und erscheinen dementsprechend nicht durchweg selbständig. — Diese Selbständigkeit ist dagegen in der vorliegenden Abhandlung vollkommen gewahrt; ohne Voreingenommenheit dürfte man sie leicht erkennen. Inzwischen möchte Verfasser ausdrücklich hervorheben, dass er nur auf Grund seiner ersten Arbeit und somit insbesondere durch das Studium der einschlägigen Arbeiten von Gordan und Klein zu der neuen Darstellung gelangt ist.

Manche Resultate der Ikosaedertheorie erscheinen nun geradezu „arithmetisiert“; die elementare Algebra ist wieder in ihr Recht eingesetzt. Daher wird sich die Arbeit vielleicht nicht allerorts Freunde erwerben. — Aber es steht ja nichts im Wege, unserer Darstellung sogleich die Theorie des Ikosaeders respektive der Modulfunktionen anzuschliessen. Durch eine solche Behandlung wird die Gleichung fünften Grades aus ihrer Sonderstellung herausgehoben und direkt neben ihre Schwestern, die Gleichungen niederen Grades gestellt. Auch bei diesen wird bei einer ersten Inangriffnahme der Aufgabe die Lösung direkt aus der Gleichung abgeleitet, erst dann folgt eine Diskussion, und diese Behandlungsweise lässt sich didaktisch nur zu gut rechtfertigen.

Aber auch sonst hat die erwähnte Arithmetisierung, welche im allgemeinen keineswegs überschätzt werden soll, gerade für die Gleichung fünften Grades und verwandte Probleme Berechtigung, denn man muss unbedingt verlangen, dass alle Keime der Lösung in einer solch fundamentalen Aufgabe selbst enthalten sind. Die Fruchtbarkeit dieses Prinzipes zeigt sich dann unter anderem auch darin, dass unsere $\eta$-Resolventen in allen Graden $2n+1$; $n = 2, 3, \ldots$ auftreten und zu einer bemerkenswerten Transformation verwandter Gleichungen Anlass geben, während die entsprechenden geometrischen Hilfsmittel

* Zeitschrift für Mathematik und Physik, 39. Jahrgang: „Über die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.“ — Diese Arbeit werde in der Folge kurz durch (A) zitiert.

vom siebenten Grade ab versagen. Durch diese einleitenden Bemerkungen dürften die nun folgenden weiteren Ausführungen vielleicht hinreichend motiviert sein.

### 2. Die allgemeine Gleichung.

Die Auflösung der Gleichung fünften Grades

$$x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0 \tag{1}$$

zerfällt in zwei wesentlich getrennte Teile. Der eine besteht in der Transformation der allgemeinen Gleichung in speziellere, welche möglichst wenig Parameter enthalten. Der Vorgang ist hier ein rein algebraischer; er führt zu Gleichungen mit nur einem absoluten Parameter, welche Resolventen genannt werden. Der zweite Teil hat alsdann die Auflösung dieser Resolventen in Angriff zu nehmen, und dieses kann nur durch transzendente Prozesse geschehen; es müssen hypergeometrische Reihen oder elliptische Modulfunktionen herbeigezogen werden.

Eine erste und tiefgehende Transformation der Gleichung 1) besteht in der Reduktion auf die Form

$$y^5 + 5ay^2 + 5by + c = 0, \tag{2}$$

welche Hauptgleichung genannt wird. In jener Reduktion liegt etwas Unbestimmtes, denn man kann eine unbegrenzte Anzahl von Tschirnhaus-Transformationen angeben, die solches leisten. Die Beseitigung des Koeffizienten von $y^3$ führt zu einer quadratischen Gleichung, und diese belastet nun die weitere Rechnung mit einer Quadratwurzel („accessorische Irrationalität"), welche je nach der Transformation verschieden ausfällt, keinesfalls aber ganz vermieden werden kann (vergl. A. 14 und 15).

Wir verfolgen diesen merkwürdigen Umstand hier nicht weiter, weil sich unsere Betrachtungen nur auf die Hauptgleichung 2) beziehen sollen, die wir von jetzt ab als gegeben voraussetzen.

### 3. Die Resolventen der $\eta$.

Die Hauptgleichung selbst giebt Anlass zur Bildung einer Resolvente mit nur einem Parameter. Wir fragen: Wie müssen die Koeffizienten der Gleichung 2) beschaffen sein, wenn ihre Form durch die noch zu motivierende Substitution

$$yz = y + z$$

nicht geändert werden soll? Die neue Gleichung in $z$ lautet:

$$\left.\begin{array}{l}(1+5a+5b+c)z^5 - 5(3a+4b+\phantom{2}c)z^4 + 5(3a+6b+2c)z^3 \\ \qquad\qquad - 5(a\phantom{3}+4b+2c)z^2 + 5(b+c)z - c\end{array}\right\} = 0,$$

und setzen wir:

$$\left.\begin{aligned} 3a + 4b + \phantom{2}c &= 0 \\ 3a + 6b + 2c &= 0 \end{aligned}\right\},$$

so ergiebt sich

$$a = \frac{1}{3}c, \quad b = -\frac{1}{2}c,$$

weshalb die Gleichungen für $y$ und $z$ übergehen in

$$\left.\begin{aligned} -6c^{-1}y^5 - 10y^3 + 15y - 6 &= 0 \\ (1 + 6c^{-1})z^5 - 10z^3 + 15z - 6 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Nun möge von jetzt ab die Bezeichnung:

$$y = \eta_1, \quad z = \eta_2; \quad -6c^{-1} = h_1, \quad 1 + 6c^{-1} = h_2$$

gewählt werden, dann entsteht:

$$3) \qquad \begin{cases} \alpha) & h_1\eta_1^5 - 10\eta_1^3 + 15\eta_1 - 6 = 0, \\ \beta) & h_2\eta_2^5 - 10\eta_2^3 + 15\eta_2 - 6 = 0. \end{cases}$$

Diese in der Form übereinstimmenden Gleichungen nennen wir die „Resolventen der $\eta$.“ Sie sind durch die Substitution:

$$4) \qquad \eta_1\eta_2 = \eta_1 + \eta_2$$

aneinander geknüpft, und ihre Parameter genügen der Bedingung:

$$5) \qquad h_1 + h_2 = 1,$$

weshalb der eine das „Komplement“ des anderen genannt werde.

Es ist gelegentlich vorteilhaft die $\eta$ durch ihre reziproken Werte zu ersetzen. Für $\eta_i = \zeta_i^{-1}$ entstehen die „Resolventen der $\zeta$“, nämlich:

$$6) \qquad h_i = 10\zeta_i^3 - 15\zeta_i^4 + 6\zeta_i^5, \qquad (i = 1, 2)$$

wobei einfach

$$7) \qquad \zeta_1 + \zeta_2 = 1.$$

Bemerkenswert ist die Beziehung:

$$8) \qquad \frac{dh_i}{d\zeta_i} = 30\zeta_i^2(1 - \zeta_i)^2$$

durch das vollständige Quadrat auf der rechten Seite. Diese Eigenschaft, welche auch bei der bekannten Resolvente von Brioschi stattfindet, weist darauf hin, dass unsere Resolventen der $\eta$ und $\zeta$ durch das Verschwinden der Invariante „B“ charakterisiert sind. Man kann deshalb die Resolvente des $\zeta_1$ in der konzisen Form:

$$9) \qquad h_1 = 30\int_0^{\zeta}[\zeta_1(1 - \zeta_1)]^2 d\zeta_1$$

geben und übersieht hierdurch die Transformation mittelst

$$\zeta_1 = 1 - \zeta_2$$

in die Resolvente der $\zeta_2$ auf sehr bequeme Weise. — Es würde sich jetzt auch Gelegenheit bieten, von einer Gattung Gleichungen zu sprechen, welche 9) als speziellen Fall in sich fasst; man brauchte nur an Stelle des Quadrats im Integral eine $n^{\text{te}}$ Potenz zu setzen. Wir verschieben dieses jedoch bis an den Schluss unserer Darlegungen.

### 4. Simultane Resolventen der $\eta$.

Unter simultanen Resolventen der $\eta$ verstehen wir solche rationale Gleichungen, welche $\eta_1$ und $\eta_2$ gleichzeitig enthalten. Der einfachste Fall hierfür ist die Beziehung:

$$4)\qquad \eta_1\eta_2 = \eta_1 + \eta_2,$$

und diese giebt nun in Verbindung mit den Originalresolventen $3\alpha, \beta$) eine unbegrenzte Anzahl von Gleichungen, welche eben die $\eta$ gemischt enthalten. Im allgemeinen lässt sich eine beliebige rationale Funktion $\Phi$ der beiden $\eta$ in die Form:

$$10)\qquad \Phi = A\eta_1^2 + B\eta_2^2 + D\eta_1 + E\eta_2 + F$$

bringen, worin das Glied mit $\eta_1\eta_2$ zufolge 4) nicht vorkommt. Denn führt man sowohl in das gegebene $\Phi$ als auch in die rechte Seite von 10) den Wert von $\eta_2$ aus 4) ein, schafft die Nenner fort und bringt alle Glieder auf eine Seite, so entsteht eine ganze Funktion des $\eta_1$, welche identisch verschwinden muss. Aber diese Funktion lässt sich mittelst der Resolvente $3\alpha$) successive auf den vierten Grad herabdrücken und kann also durch die fünf Konstanten $A$ bis $F$, welche nur linear auftreten, thatsächlich zum Verschwinden gebracht werden. So die Methode im allgemeinen; im speziellen kommt man meist leichter zum Ziele, wie sogleich zu zeigen sein wird.

Wir betrachten einen Augenblick die lineare Verbindung:

$$11)\qquad y = p\eta_1 + q\eta_2,$$

in welcher $p$ und $q$ disponible Konstanten sein mögen. Jener Ausdruck genügt, weil das eine $\eta$ vom anderen eindeutig abhängt, einer Gleichung fünften Grades, deren Koeffizienten mit drei Parametern, nämlich $p$, $q$ und $h_1$, respektive $h_2$ ausgestattet sein werden. Aber diese Gleichung kommt mit einer Hauptgleichung überein, denn es ist bei Summation von je fünf Wurzelpotenzen:

$$\Sigma y = 0, \quad \Sigma y^2 = 0,$$

weil einzeln $\Sigma\eta_1 = 0, \quad \Sigma\eta_2 = 0, \quad \Sigma\eta_1^2 = 0, \quad \Sigma\eta_2^2 = 0$

und weil ausserdem mit Rücksicht auf 4):

$$\Sigma\eta_1\eta_2 = 0.$$

Hiermit rechtfertigt sich insbesondere die Substitution 4); es ist ersichtlich, dass in selbiger eine additive Konstante zweckwidrig, faktorielle Konstanten aber überflüssig sein würden.

Wenn wir die betreffende Hauptgleichung wirklich bilden wollen, bedürfen wir noch der aus der fünften Potenz von $y$ entspringenden $\eta$-Verbindungen: $\eta_1^4\eta_2, \quad \eta_1^3\eta_2^2, \quad \eta_1^2\eta_2^3, \quad \eta_1\eta_2^4,$

was offenbar auf die Berechnung von vier gewissen simultanen $\eta$-Resolventen hinausläuft. Schreiben wir die Resolvente $3\alpha$) wie folgt:

$$h_1\eta_1^5 = 10\eta_1^2 - 15\eta_1 + 6,$$

die Gleichung 4) dagegen

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \eta_2 - 1,$$

multiplizieren sodann die entsprechenden Seiten und berücksichtigen, dass

$$\eta_1^2\eta_2 = \eta_1(\eta_1 + \eta_2) = \eta_1^2 + \eta_1 + \eta_2,$$

so entsteht

$$h_1\eta_1^4\eta_2 = 10\eta_1 + \eta_2 - 6.$$

Genau auf dieselbe Weise gewinnt man:

$$h_1\eta_1^3\eta_2^2 = \eta_2^2 + 3\eta_2 + 6,$$

und die übrigen folgen durch Vertauschung von $\eta_1$ mit $\eta_2$ und $h_1$ mit $h_2$. Wir stellen nun die Resultate zusammen, wie wir sie im nächsten Abschnitt gebrauchen:

$$12)\quad \left\{\begin{aligned} h_1\eta_1^5 &= 10\eta_1^2 - 15\eta_1 + 6,\\ h_1\eta_1^4\eta_2 &= 10\eta_1 + \eta_2 - 6,\\ h_1\eta_1^3\eta_2^2 &= \eta_2^2 + 3\eta_2 + 6,\\ h_2\eta_1^2\eta_2^3 &= \eta_1^2 + 3\eta_1 + 6,\\ h_2\eta_1\eta_2^4 &= \eta_1 + 10\eta_2 - 6,\\ h_2\eta_2^5 &= 10\eta_2^2 - 15\eta_2 + 6.\end{aligned}\right.$$

Ausser diesen giebt es noch eine simultane Resolvente des fünften Grades, welche **homogen** sowohl in den $\eta$ als in den $h$ ist und sich durch ihre symmetrische Gestalt besonders auszeichnet. Wir erhalten selbige, wenn wir in die Resolvente $3\alpha$) die Substitution 4) in der Form:

$$\eta_1 = \frac{\eta_1}{\eta_2} + 1$$

einführen; es entsteht:

$$13)\quad h_1(\eta_1^5 + 5\eta_1^4\eta_2 + 10\eta_1^3\eta_2^2) - h_2(10\eta_1^2\eta_2^3 + 5\eta_1\eta_2^4 + \eta_2^5) = 0,$$

und die auftretenden Binomialkoeffizienten lassen sofort erkennen, nach welcher Richtung hier eine Erweiterung möglich sein wird.

## 5. Konstruktion einer Hauptgleichung.

Jene Hauptgleichung, welcher die Verbindung:

$$11)\quad y = p\eta_1 + q\eta_2$$

genügt, kann so erhalten werden, dass man letzteren Ausdruck in:

$$2)\quad y^5 + 5ay^2 + 5by + c = 0$$

einführt und die linke Seite mittelst der Resolventen 12) auf die Form:

$$M\eta_1^2 + N\eta_2^2 + P\eta_1 + Q\eta_2 + R$$

bringt. Da eine solche Verbindung der $\eta$ einer weiteren Reduktion nicht mehr unterliegt, so müssen die Koeffizienten $M$ bis $R$ einzeln verschwinden. Es ergiebt sich aber ohne Mühe:

$$M = 5p^2(\ 2h_2p^3 + \ 2h_1q^3 \ + \ ah_1h_2),$$
$$N = 5q^2(\ 2h_1q^3 + \ 2h_2p^3 \ + \ ah_1h_2),$$
$$P = 5p\,(-3h_2p^4 + 10h_2p^3q + \ 6h_1pq^3 + \ \ h_1q^4 \ + 2ah_1h_2q + bh_1h_2),$$
$$Q = 5q\,(-3h_1q^4 + 10h_1pq^3 + \ 6h_2p^3q + \ \ h_2p^4 \ + 2ah_1h_2p + bh_1h_2),$$
$$R = 6\ (\ \ h_2p^5 - \ 5h_2p^4q + 10h_2p^3q^2 + 10h_1p^2q^3 - 5h_1pq^4 \ + \ h_1q^5) + ch_1h_2,$$

und hieraus ersieht man folgendes: Die Klammergrössen des $M$ und $N$ sind nicht verschieden und führen, gleich Null gesetzt, zur Bestimmung von $a$. Trägt man dieses $a$ in die Klammergrössen des $P$ und $Q$ ein, so werden auch diese einander gleich und führen, gleich Null gesetzt, zur Bestimmung von $b$. Endlich ergiebt die Forderung $R = 0$ einen Ausdruck für $c$. Wir gelangen somit zu folgenden Ausdrücken:

$$\text{14)}\quad \begin{cases} p^3h_1^{-1} + q^3h_2^{-1} = -\frac{1}{2}a, \\ p^3h_1^{-1}(p-2q) - q^3h_2^{-1}(2p-q) = \frac{1}{3}b, \\ p^3h_1^{-1}(p^2 - 5pq + 10q^2) + q^3h_2^{-1}(10p^2 - 5pq + q^2) = -\frac{1}{6}c, \end{cases}$$

und mittelst derselben lässt sich die zu konstruierende Hauptgleichung (Hauptresolvente der $y$) ohne weiteres angeben.

### 6. Reduktion der Hauptgleichung auf die Resolventen der $\eta$.

Wir fragen jetzt, ob eine beliebig vorgelegte Hauptgleichung auf eine $\eta$-Resolvente zurückgeführt werden kann, das heisst, ob sich die Transformationskoeffizienten $p$, $q$ und der Resolventenparameter $h_1$, respektive $h_2$ durch die Koeffizienten $a$, $b$, $c$ ausdrücken lassen. Dieses ist in der That möglich, und man bedarf hierzu nur einer quadratischen Gleichung, deren Quadratwurzel unter allen Umständen dieselbe wird, also nicht der Unbestimmtheit unterliegt, welche wir in Abschnitt 2 erwähnten.

Um nun die in Aussicht genommene Berechnung durchzuführen, wende man sich an das Gleichungssystem 14) und bestimme aus den ersten beiden Gleichungen:

$$\text{15)}\qquad h_1 = -\frac{18p^3(p-q)}{3a(2p-q)-2b}, \quad h_2 = -\frac{18q^3(p-q)}{3a(p-2q)+2b}.$$

Trägt man dieses in die dritte Gleichung ein und setzt zur Abkürzung:

$$\text{16)}\qquad p - q = \sqrt{r}, \quad p + q = s,$$

so entsteht:

$$\text{17)}\qquad 12ar + 6bs - c = 0.$$

Verbindet man die Ausdrücke 15) mit der in Abschnitt 3 aufgestellten Bedingungsgleichung:

5) $$h_1 + h_2 = 1,$$

und berücksichtigt zugleich die Beziehung 17), so gelangt man zu einer quadratischen Gleichung für $r$, nämlich:

18) $$\left\{ \begin{array}{l} (a^4 + abc - b^3)(12r)^2 - (2a^3c + 11a^2b^2 + bc^2)(12r) \\ \qquad\qquad + (ac - 8b^2)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Endlich ergiebt sich aus 15) unter steter Berücksichtigung der bereits aufgestellten Gleichungen:

19) $$h_1 h_2 = \frac{3 \cdot 12^2 b p^3 q^3}{12(ac - b^3)r - c^2},$$

ein Ausdruck, der im Vereine mit Gleichung 5) eine Berechnung der Parameter $h_1$ und $h_2$ vermittelt.

Bemerken wir noch, dass die Gleichung für $r$ auf eine Quadratwurzel führt, deren Radikand:

20) $$\Delta = 108a^5c - 135a^4b^2 + 90a^2bc^2 - 320ab^3c + 256b^5 + c^4,$$

abgesehen von einem numerischen Faktor, mit der Diskriminante der vorgelegten Hauptgleichung zusammenfällt, und dass also jene Quadratwurzel eine rationale Funktion der Wurzeln genannter Gleichung 2) darstellt.

### 7. Die Resolventen der $\eta$ als Sonderfälle der Hauptgleichung.

Wir haben in Abschnitt 3 die Koeffizienten einer Hauptgleichung dahin spezialisiert, dass die $\eta$-Resolventen in einer gewissen Normalform mit einem absoluten Parameter erscheinen; wir fanden ohne Rücksicht auf die beiden Indices:

$$h\eta^5 - 10\eta^2 + 15\eta - 6 = 0.$$

Setzen wir $k\eta = y$, unter $k$ eine unbestimmte Zahl verstanden, so entsteht:
$$hy^5 - 10k^3y^2 + 15k^4y - 6k^5 = 0,$$

und vergleichen wir dies mit der Hauptgleichung:

2) $$y^5 + 5ay^2 + 5by + c = 0,$$

so haben wir

21) $$a = -2k^3h^{-1}, \quad b = 3k^4h^{-1}, \quad c = -6k^5h^{-1}.$$

Die Elimination von $k$ ergiebt:

22) $$3ac - 4b^2 = 0,$$

und letztere Bedingung ist es nun, welche die Hauptgleichung als $\eta$-Resolvente charakterisiert.

Eine $\eta$-Resolvente besitzt sonach zwei Parameter; letztere lassen sich aber rational auf einen einzigen absoluten Parameter $h$ reduzieren. Selbiger wird gefunden, wenn man $k$ aus irgend zwei der Gleichungen 21) eliminiert, und es ergiebt sich in Übereinstimmung mit 22):

$$23)\quad \begin{cases} h = \dfrac{16b^3}{27a^4} = \dfrac{3c^4}{16b^5}, \\ k = -\dfrac{2b}{3a} = -\dfrac{c}{2b}. \end{cases}$$

Die Unbestimmtheit, welche den $\eta$-Resolventen solchergestalt anhaftet, wird indessen völlig beseitigt, wenn man verlangt, dass die verbindende Substitution die ausgesucht einfache Gestalt:

$$4)\quad \eta_1 \eta_2 = \eta_1 + \eta_2$$

annehme; es wird dann $k = 1$.

Mit Beziehung auf die vorigen beiden Abschnitte können wir jetzt sagen: Jede Hauptgleichung 2) kann durch die Substitution:

$$24)\quad y = y_1 + y_2$$

in zwei andere gespalten werden, so zwar, dass die Koeffizienten der neuen Gleichungen für $y_1$ und $y_2$ die Bedingung 22) erfüllen und jene Gleichungen also auf die $\eta$-Resolventen hinauskommen.

### 8. Eine quadratische Transformation der Hauptgleichung.

Zwei Hauptgleichungen mögen verwandt heissen, wenn ihre $\eta$-Resolventen ein und denselben absoluten Parameter $h_1$ respektive $h_2$ besitzen. Die Substitutionen, welche jene Hauptgleichungen in die betreffenden $\eta$-Resolventen überführen, sind nach dem früheren:

$$11)\quad y = p\eta_1 + q\eta_2 \quad \text{und} \quad y' = p'\eta_1 + q'\eta_2,$$

wobei $p$, $q$ nur von den Koeffizienten der einen, $p'$, $q'$ nur von jenen der anderen Hauptgleichung abhängen. Löst man die Substitutionen rückwärts nach $\eta_1$ und $\eta_2$ auf, so entsteht:

$$11\text{a})\quad \eta_1 = my + m'y' \quad \text{und} \quad \eta_2 = ny + n'y',$$

und dieses giebt in

$$4)\quad \eta_1 \eta_2 = \eta_1 + \eta_2$$

eingetragen eine gewisse quadratische Gleichung zwischen $y$ und $y'$, vermöge welcher zwei verwandte Hauptgleichungen ineinander transformiert werden können. Die hier berührte quadratische Transformation ist nicht die allgemeinste ihrer Art, aber wir kommen mit ihr aus, wenn wir unserem Programme gemäss nicht über Hauptgleichungen hinausgehen.

Aus den Lösungen $y$ und $y'$ zweier verwandter Hauptgleichungen, welche indessen speziell sein können und nur einen Parameter zu enthalten brauchen (Resolventen), lässt sich stets die Lösung $Y$ einer allgemeinen Hauptgleichung zusammensetzen und zwar mittelst der Substitution:

$$Y = Py + Qy',$$

denn diese reduziert sich vermöge der Ausdrücke 11) auf

$$Y = P'\eta_1 + Q'\eta_2,$$

wobei $P$, $Q$ respektive $P'$ $Q'$ disponible Konstanten sind.

In der Auswahl der die allgemeine Hauptgleichung konstituierenden Resolventen herrscht daher eine gewisse Willkür, und in der That, bei Gordan und Klein wird die Hauptgleichung aus zwei Resolventen zusammengesetzt, die aus den $\eta$-Resolventen vermittelst

$$y = \eta_1 + \eta_2 \quad \text{und} \quad y' = \eta_1 - \eta_2$$

hervorgehen. Jene Resolventen sind ebenda durch die Theorie des Ikosaeders und zugehörigen Oktaeders wohl motiviert (vergl. A. 6). Indessen kann vom Standpunkte einer blossen Transformationstheorie aus nicht bezweifelt werden, dass die $\eta$-Resolventen die einfacheren Elemente sind. Denn letztere sind durch die eindeutige und symmetrische Substitution 4) aneinander geknüpft, während die vorigen $y, y'$ offenbar in dem Zusammenhange:

$$y^2 - y'^2 - 4y = 0$$

stehen.

Unter den Hauptgleichungen giebt es gewisse spezielle, wie z. B. die Bring-Jerrardsche Form, welche eine transzendente Auflösung direkt zulassen; diese erscheinen jetzt vermöge der Transformation ebenfalls als Resolventen der allgemeinen Hauptgleichung. Inzwischen ist es aber nicht nötig, auf die letztere zurückzugehen; an ihre Stelle setzen wir die $\eta$-Resolventen, aus denen sie ja zusammengesetzt wird. Unsere Aufgabe wird: Wie transformiert man die $\eta$-Resolventen in andere, welche eine transzendente Auflösung unmittelbar gestatten? — Den historischen Vorgängen folgend skizzieren wir zuerst den Übergang zur Bring-Jerrardschen Form, obwohl die dann folgende Transformation in die Ikosaedergleichung zweckmässiger ist und den wichtigeren Teil unserer Untersuchung ausmacht.

### 9. Die Bring-Jerrardsche Form.

Wir haben es hier mit der speziellen Hauptgleichung zu thun, in welcher $a = 0$ und können ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit ausserdem $b = 1$ wählen, dann verbleibt:

$$25)\qquad y^5 + 5y + c = 0.$$

Soll nun die Verbindung zwischen dieser Gleichung und den $\eta$-Resolventen hergestellt werden, so ist zunächst das Gleichungssystem 14) zu berücksichtigen. Die erste der betreffenden Gleichungen liefert:

$$26)\qquad p = \mu \sqrt[3]{h_1}, \quad q = -\mu \sqrt[3]{h_2},$$

unter $\mu$ einen Proportionalitätsfaktor verstanden; die anderen beiden Gleichungen gehen damit über in:

$$27)\qquad \mu^4 \left(\sqrt[3]{h_1} + \sqrt[3]{h_2}\right) = \frac{1}{9},$$

$$28)\qquad \mu^5 \left(\sqrt[3]{h_1^2} - \sqrt[3]{h_2^2}\right) = \frac{1}{54}\, c.$$

Um sonach die $\eta$-Resolventen mittelst der Bring-Jerrardschen Form aufzulösen, berechne man $\mu$ aus 27) und $c$ aus 28), wobei die $h$ als gegeben gelten. Die $\eta$ selbst folgen aus den Beziehungen 4) und 11), das heisst aus

$$29)\qquad y = \mu\left(\eta_1 \sqrt[3]{h_1} - \eta_2 \sqrt[3]{h_2}\right),$$

$$4)\qquad \eta_1 \eta_2 = \eta_1 + \eta_2,$$

wobei $y$ jede der fünf Lösungen von 25) bedeutet, welche bekanntlich in Gestalt von elliptischen Funktionen oder hypergeometrischen Reihen vierter Ordnung erscheinen. Diese Art der Auflösung ist die älteste, aber nicht die zweckmässigste.

Da bereits gezeigt wurde, dass jede Gleichung fünften Grades in die $\eta$-Resolventen transformierbar ist, so haben wir hiermit auch eine successive Transformation der allgemeinen Gleichung in die trinomische Form erreicht. Es sei besonders hervorgehoben, dass die kubische Hilfsgleichung, welche niemals vermieden werden kann, bei Verwendung von $\eta$-Resolventen die denkbar einfachste, eine binomische wird.

Man bemerke noch, dass von jener kubischen Gleichung nur die reelle Wurzel verwendet zu werden braucht. Berücksichtigt man auch die beiden komplexen Wurzeln, so erlangt $c$ drei verschiedene Werte, und man hat demgemäss drei Bring-Jerrardsche Formen, welche natürlich „verwandt“ sind. Bezeichnet man ihre entsprechenden Lösungen durch $y$, $y'$ und $y''$, so besteht zwischen je zwei Lösungen die in Abschnitt 8 auseinandergesetzte quadratische Transformation; alle drei Lösungen dagegen erfüllen, wie leicht zu sehen, die lineare Bedingungsgleichung:

$$30)\qquad gy + g'y' + g''y'' = 0,$$

wobei $g$; $g'$ und $g''$ bestimmte von $h_1$ und $h_2$, nicht aber von $\eta_1$ und $\eta_2$ abhängige Konstanten bedeuten.

Was endlich die Vierdeutigkeit des $\mu$ nach Gleichung 27) betrifft, so hängt diese damit zusammen, dass in der trinomischen Form 25) $b = 1$ gesetzt wurde, was eben die Adjunktion einer vierten Wurzel bedingt. Lassen wir $b$ frei veränderlich bestehen, so können wir umgekehrt $\mu = 1$ wählen, und dann kommt jene Irrationalität zunächst überhaupt nicht in Frage.

### 10. Die Ikosaedergleichung.

Unter den Hauptgleichungen fünften Grades

$$2)\qquad y^5 + 5ay^2 + 5by + c = 0$$

giebt es eine sehr einfache, welche schon Euler im neunten Teile der „neuen Kommentarien der St. Petersburgischen Akademie der Wissenschaften“, vom Jahre 1764 betrachtet hat; es ist die Gleichung, welcher einfach:

$$y = \varepsilon y_1 - \varepsilon^2 y_2$$

genügt,* und für welche sonach:

31) $$a = -y_1 y_2^2, \quad b = y_1^3 y_2, \quad c = -(y_1^5 - y_2^5)$$

wird. Die $\varepsilon$ bezeichnen irgend eine fünfte Wurzel der Einheit; indessen kommt für unseren Ansatz nur die relle Lösung:

32) $$y = y_1 - y_2$$

in Frage, und wir wollen daher weniger von der Eulerschen Gleichung sprechen, als vielmehr von einer gewissen Identität, welche die Gestalt einer Hauptgleichung besitzt.

Erörtern wir jetzt den Zusammenhang zwischen dieser Identität und den $\eta$-Resolventen. Es ist nicht zu erwarten, dass ein so trivialer Ansatz zu einer definitiven Lösung wie im vorigen Abschnitte führt, es tritt uns vielmehr ein Formenproblem der $y_1, y_2$ entgegen, durch welches eine neue und höchst charakteristische Irrationalität definiert wird; wir gelangen zur Ikosaedergleichung.

Bei den nun folgenden Ausführungen wolle man durchgängig die Resultate des Abschnittes 6 zu Grunde legen. Zunächst ist wegen 31):

33) $$a^4 + abc - b^3 = 0$$

die einzige und wesentliche Bedingung unseres Spezialfalles. Die Gleichung 18) liefert jetzt nur eine brauchbare Wurzel, nämlich

34) $$r = y_2^4 (7 y_1^5 + y_2^5)^2 : 12 f,$$

wobei

35) $$f = y_1 y_2 (y_1^{10} + 11 y_1^5 y_2^5 - y_2^{10}),$$

und sodann ergiebt sich nach 17):

36) $$s = y_1^3 (-y_1^{10} + 39 y_1^5 y_2^5 + 26 y_2^{10}) : 6 f.$$

Nun ist noch der Ausdruck 19) zu bilden, und man findet nach gehöriger Reduktion:

37) $$h_1 h_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{12^3 f^5}{H^3},$$

wobei

38) $$H = -(y_1^{20} + y_2^{20}) + 228 (y_1^{15} y_2^5 - y_1^5 y_2^{15}) - 494 y_1^{10} y_2^{10}.$$

Zur Einzelbestimmung von $h_1$ und $h_2$ hat man die Beziehung:

5) $$h_1 + h_2 = 1$$

und ausserdem, mit Rücksicht auf 37):

39) $$h_1 - h_2 = \frac{\sqrt{12^3 f^5 - H^3}}{24 f^2 \sqrt{3 f}}.$$

---

* Euler setzt eine Summe an; wir haben eine Differenz gewählt, weil wir damit genau auf die Ikosaederformen kommen, wie sie sich bei Gordan und Klein finden. Mit einer Summe ($y = y_1 + y_2$) gelangt man zu den Ausdrücken von Schwarz, die sich von den erstgenannten bekanntlich nur ganz unwesentlich unterscheiden.

Aber die Quadratwurzel im Zähler lässt sich ausziehen und liefert:

40) $$\begin{cases} T = (y_1^{30} + y_2^{30}) + 522(y_1^{25}y_2^5 - y_1^5y_2^{25}) \\ \qquad\qquad - 10005(y_1^{20}y_2^{10} + y_1^{10}y_2^{20}), \end{cases}$$

sodass also:

39a) $$h_1 - h_2 = \frac{T}{24f^2\sqrt{3f}}.$$

Man kann dieses Resultat übrigens auch direkt erhalten, wenn man auf die Ausdrücke 15) zurückgeht und selbige vermöge 16) in $r$ und $s$ schreibt; sie lauten dann

41) $$\begin{cases} h_1 = -\dfrac{9(s+\sqrt{r})^3\sqrt{r}}{6a(s+3\sqrt{r})-8b}, \\ h_2 = +\dfrac{9(s-\sqrt{r})^3\sqrt{r}}{6a(s-3\sqrt{r})-8b}, \end{cases}$$

und es wird ersichtlich, dass der Parameter $h_1$ seinem Komplement $h_2$ konjugiert ist, das heisst, der Übergang vom einen zum anderen ist durch einen Vorzeichenwechsel der Irrationalität $\sqrt{r}$ bedingt. Infolgedessen wird:

42) $$h_1 - h_2 = \varkappa\sqrt{r},$$

wobei $\varkappa$ das $r$ nur rational enthält; jene Differenz muss daher, abgesehen von $\sqrt{f}$, durchaus rational in $y_1$, $y_2$ und in der That führt die weitere Berechnung genau zum Ausdruck 39a), sodass der nachträgliche Vergleich mit 39) die wichtige Identität:

43) $$T^2 = 12^3 f^5 - H^3$$

abermals erschliesst.

Hiermit haben wir die drei Formen gewonnen, welche den bekannten Formenkreis des Ikosaeders bilden, nämlich die eigentliche Ikosaederform $f$, deren Hessesche Determinante $H$ und die Funktionaldeterminante beider, die Form $T$. Dass die Formen $H$ und $T$ invariantentheoretisch auf die Grundform $f$ zurückkommen, geht aus unserem elementaren Ansatz zunächst noch nicht hervor. Ziehen wir aber den Differentialbegriff herbei und fragen nach der Differentialresolvente, das heisst nach jener linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche die $y_1$ und $y_2$ zu Fundamentalintegralen besitzt, so wird sich diese Angelegenheit von selbst erledigen. Vergleiche Abschnitt 15. Das Formenproblem, welches eben dort seinen definitiven Abschluss findet, wird darin bestehen, die $y_1$ und $y_2$ aus 35) und 38) bei festgegebenen Werten von $f$ und $H$ zu berechnen oder, was den Kernpunkt ausmacht, das Verhältnis der beiden $y$ aus der sogenannten Ikosaedergleichung 37) bei vorgelegtem $h_1$ respektive $h_2$ zu bestimmen. — Bevor wir hierzu übergehen, erörtern wir den Zusammenhang zwischen der Ikosaedergleichung und einigen wichtigen Resolventen fünften Grades, insbesondere den $\eta$-Resolventen.

### 11. Zurückführung der $\eta$-Resolventen auf die Ikosaedergleichung.

Der Zusammenhang ist sofort durch die Beziehungen:

$$44)\quad \begin{cases} y = p\eta_1 + q\eta_2 = y_1 - y_2, \\ \qquad\qquad \eta_1\eta_2 = \eta_1 + \eta_2 \text{ (vergl. 4, 11 und 32)} \end{cases}$$

hergestellt, wo $p = \frac{1}{2}(s + \sqrt{r}),\quad q = \frac{1}{2}(s - \sqrt{r})$ (vergl. 16),

speziell durch die Werte 34) und 36) auszudrücken sind. Da die zweite Gleichung in 44) quadratisch ist, so werden sich die $\eta$ zunächst in Form einer Quadratwurzel ergeben. Trotzdem muss das Resultat rational werden, denn man könnte, wenn auch weniger einfach, die Rechnung eindeutig durchführen, indem man eine der $\eta$-Resolventen, z. B. die von $\eta_1$ hinzuzieht und $\eta_1$ als gemeinsame Wurzel zweier Gleichungen ansieht, deren Koeffizienten, abgesehen von $\sqrt{f}$, durchaus rational in den $y_1$, $y_2$ sind.

Obige Gleichungen liefern nun:

$$45)\quad \frac{1}{\eta_1} = \frac{1}{2} + \frac{y_2^2(7y_1^5 + y_2^5) \pm \sqrt{Y}}{4(y_1 - y_2)\sqrt{3f}},\quad \frac{1}{\eta_2} = 1 - \frac{1}{\eta_1},$$

wobei:

$$46)\quad \begin{cases} \sqrt{Y} = 2y_1^7 + 2y_1^6y_2 - 7y_1^5y_2^2 + 10y_1^4y_2^3 - 10y_1^4y_2^3 \\ \qquad\qquad + 6y_1^2y_2^5 + 6y_1^6y_2^6 - y_2^7. \end{cases}$$

Nehmen wir diese Wurzel negativ, so wird 45) durch $(y_1 - y_2)$ teilbar; mithin entsteht:

$$47)\quad \frac{1}{\eta_1} = \frac{1}{2} - \frac{t}{2\sqrt{3f}},\quad \frac{1}{\eta_2} = \frac{1}{2} + \frac{t}{2\sqrt{3f}},$$

oder

$$48)\quad \eta_1 = -\frac{2\sqrt{3f}}{t - \sqrt{3f}},\quad \eta_2 = \frac{2\sqrt{3f}}{t + \sqrt{3f}},$$

und die neu auftretende Grösse $t$ kommt mit einer Oktaederform überein, welche mit dem Ikosaeder innig verwandt ist, nämlich:

$$49)\quad t = y_1^6 + 2y_1^5y_2 - 5y_1^4y_2^2 - 5y_1^2y_2^4 - 2y_1y_2^5 + y_2^6.$$

Beachten wir, dass die Ikosaederformen $f$, $H$, $T$ in keiner Weise verändert werden, wenn $y_1$, respektive $y_2$ mit $\pm y_1\varepsilon^{3\nu}$, respektive $\pm y_2\varepsilon^{2\nu}$ vertauscht wird, unter $\varepsilon$ die fünfte Einheitswurzel:

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$$

verstanden, dass hingegen die Oktaederform übergeht in:

$$49\text{a})\quad \begin{cases} t_\nu = \varepsilon^{3\nu}y_1^6 + 2\varepsilon^{2\nu}y_1^5y_2 - 5\varepsilon^{\nu}y_1^4y_2^2 - 5\varepsilon^{4\nu}y_1^2y_2^4 \\ \qquad\qquad - 2\varepsilon^{3\nu}y_1y_2^5 + \varepsilon^{2\nu}y_2^6 \end{cases}$$

und für $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$ fünfwertig wird, dann ergiebt sich folgendes:

Die Ausdrücke 48), welche von der nullten Dimension in den $y$ sind, vermitteln die vollständige Auflösung der $\eta$-Resolventen, sobald das Verhältnis der $y$ aus der Ikosaedergleichung:

37) $$\frac{H^3}{12^3 f^5} = 4h_1 h_2, \quad (h_1 + h_2 = 1)$$

berechnet ist.

Weil nach 48):

50) $$\eta_1 + \eta_2 = \eta_1 \eta_2 = -\frac{12f}{t^2 - 3f},$$

so können die $\eta_1$ und $\eta_2$ als Wurzeln der quadratischen Gleichung:

51) $$(t^2 - 3f)\eta^2 + 12f\eta - 12f = 0,$$

und $h_1$, $h_2$ mit Rücksicht auf 37) als Wurzeln von

52) $$h^2 - h + \frac{1}{4}J = 0$$

angesehen werden, wobei

53) $$J = \frac{H^3}{12^3 f^5}$$

den sogenannten Ikosaederparameter bezeichnet. Durch die letzten Gleichungen ist der Zusammenhang zwischen den $\eta$-Resolventen und der Ikosaedergleichung in sehr konziser Weise dargestellt.

### 12. Die Resolvente von Brioschi.

Wenn wir den Ausdruck für $\eta_1$ oder $\eta_2$ aus 48) in die betreffende $\eta$-Resolvente $3\alpha$) oder $3\beta$) eintragen, so muss eine neue Resolvente erscheinen, deren Lösung durch 49) respektive 49a) gegeben ist. Wir erhalten in beiden Fällen die Brioschische Normalform:

54) $$t^5 - 10ft^3 + 45f^2 t - T = 0,$$

welche, in den $y_1$, $y_2$ geschrieben, eine Identität vorstellt und als solche eine Kontrolle liefert, dass das Vorzeichen der Quadratwurzeln in 39) und 45) richtig gewählt wurde. Die Gleichung 54) bildete in unserer früheren Arbeit (A. 1 und 10) den Ausgangspunkt; in der vorliegenden Transformationstheorie besitzt sie trotz ihrer Wichtigkeit nur sekundäre Bedeutung.

Am bequemsten verfolgt man die Transformation an den entsprechenden Integralformen (vergl. Abschnitt 3, Nr. 9), das heisst an:

$$h_1 = 30\int_0^{\zeta_1}[\zeta_1(1-\zeta_1)]^2 d\zeta_1, \quad \text{resp. } h_2 = 30\int_0^{\zeta_2}[\zeta_2(1-\zeta_2)]^2 d\zeta_2,$$

welche die Resolventen der reziproken $\eta$ vorstellen. Setzt man:

$$\zeta_1 = \frac{1}{2}(1-v), \quad \text{resp. } \zeta_2 = \frac{1}{2}(1+v),$$

so entsteht:

$$h_1 = -\frac{15}{16}\int_1^v [1-v^2]^2 dv, \quad \text{resp. } h_2 = \frac{15}{16}\int_{-1}^v [1-v^2]^2 dv,$$

oder:

$$3v^5 - 10v^3 + 15v - 8(1 - 2h_1) = 0,$$

respektive

$$3v^5 - 10v^3 + 15v - 8(2h_2 - 1) = 0.$$

Nun ist aber mit Bezug auf 39a):

$$1 - 2h_1 = 2h_2 - 1 = \frac{T}{24f^2\sqrt{3f}},$$

folglich haben wir in beiden Fällen:

$$3v^5 - 10v^3 + 15v - \frac{T}{3f^2\sqrt{3f}} = 0,$$

eine Gleichung, welche für

$$v = \frac{t}{\sqrt{3f}}$$

in die Brioschische Resolvente übergeht. — Die angeführten Integrale lassen eine schon in Abschnitt 3 erwähnte Verallgemeinerung zu.

### 13. Die Resolventen von Gordan und Klein.

Die betreffenden Resolventen sind gewisse Hauptgleichungen, welche durch $r = 0$ und $s = 0$ charakterisiert werden; wir betrachten nur die erstgenannte, die am einfachsten und von fundamentaler Bedeutung ist (vergl. A. 6). Wenn $r = 0$, so wird $p = q$, und also geht das System 14) über in:

$$a = -\ \ 2p^3(h_1h_2)^{-1},$$

$$b = -\ \ 3p^4(h_1h_2)^{-1},$$

$$c = -36p^5(h_1h_2)^{-1},$$

sodass folgende Gleichung vorliegt:

$$h_1h_2y^5 - 10p^3y^2 - 15p^4y - 36p^5 = 0,$$

welcher nach 48) den Ausdruck:

$$y = p(\eta_1 + \eta_2) = p\eta_1\eta_2 = -\frac{12pf}{t^2 - 3f}$$

genügen muss. Trägt man weiter aus 37):

$$h_1h_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{H^3}{12^3f^5}$$

ein, wählt:

$$p = -\frac{H}{12f}$$

und schreibt $W$ statt $y$, so entsteht die gewünschte Resolvente:

$$W^5 + 40f^2W^2 - 5fHW + H^2 = 0 \tag{55}$$

mit der Lösung:

$$W = \frac{H}{t^2 - 3f}. \tag{56}$$

Ersetzt man noch $f$, $H$, $t$ durch die Ausdrücke 35), 38), 49) und dividiert aus, so ergiebt sich die Form des „Würfels“:

$$57)\quad \begin{cases} W = -y_1^8 + y_1^7 y_2 - 7y_1^6 y_2^2 - 7y_1^5 y_2^3 + 7y_1^3 y_2^5 \\ \qquad - 7y_1^2 y_2^6 - y_1 y_2^7 - y_2^8, \end{cases}$$

oder allgemeiner, durch die bereits beim Oktaeder benutzte Vertauschung,

$$57a)\quad \begin{cases} W_\nu = -\varepsilon^{4\nu} y_1^8 + \varepsilon^{3\nu} y_1^7 y_2 - 7\varepsilon^{2\nu} y_1^6 y_2^2 - 7\varepsilon^{\nu} y_1^5 y_2^3 + 7\varepsilon^{4\nu} y_1^3 y_2^5 \\ \qquad - 7\varepsilon^{3\nu} y_1^2 y_2^6 - \varepsilon^{2\nu} y_1 y_2^7 - \varepsilon^{\nu} y_2^8. \end{cases}$$

Dieses ist neben dem Oktaeder die einfachste fünfwertige Form, welche aus den $y$ zusammengesetzt werden kann. Zwischen den $\eta$ und $W$ besteht die Beziehung [vergl. 50)]:

$$58)\qquad \eta_1 + \eta_2 = \eta_1 \eta_2 = -\frac{12 f W}{H},$$

weshalb die $\eta$ als Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$59)\qquad H\eta^2 + 12 f W \eta - 12 f W = 0$$

angesehen werden können.

Man bemerke auch, dass die Resolvente 55), als spezielle Hauptgleichung aufgefasst, durch die Bedingung:

$$60)\qquad ac - 8b^2 = 0$$

charakterisiert wird. Es ergiebt sich dieses sowohl aus den anfangs für $a, b, c$ aufgeschriebenen Werten als auch aus der Forderung, dass die quadratische Gleichung 18) die Lösung $r = 0$ besitzen soll. Wenn auch umgekehrt infolge der Bedingung 60) nur die Lösung $r = 0$ in Betracht kommen soll, so darf die Quadratwurzel, auf welche die Gleichung 18) führt, nur mit dem Minuszeichen versehen werden (vergl. Klein „Ikosaeder“, S. 194).

Die Unterscheidung des Vorzeichens jener Wurzel führt auch sonst zu eigentümlichen Resultaten, die hier kurz gestreift werden mögen (vergl. A. 13). Zunächst sei an die Gordansche Auflösung der Gleichung fünften Grades durch „doppelt binäre Formen mit zwei Reihen unabhängiger Variabelen“ erinnert. Dort können beide Wurzeln $r_1$ und $r_2$ der Gleichung 18) gebraucht werden; man kann aber auch nur eine derselben herausgreifen, womit dann eine Reihe der Variabelen bevorzugt ist. — Wenn man dagegen die Transformationstheorie betonen will, wie es unserer Darstellung durchweg entspricht, so hat man eine Transformation der einfachsten Resolventen genau nach dem Schema einer Hauptgleichung wie in Abschnitt 6, und zwar unter Berücksichtigung der Zweideutigkeit des $r$, durchzuführen. Von den hier in Frage kommenden Resolventen, greifen wir nur die der $\eta$ heraus und setzen demgemäss:

$$\begin{aligned} a &= -2h^{-1}, \\ b &= \quad 3h^{-1}, \\ c &= -6h^{-1}; \\ y &= \eta, \end{aligned}$$

wodurch die Hauptgleichung 2) die Gestalt:

$$h\eta^5 - 10\eta^3 + 15\eta - 6 = 0 \tag{61}$$

erlangt. Die Gleichung 18) ergiebt jetzt:

$$r_1 = 1, \quad r_2 = \frac{25}{16 + 9h},$$

und folglich wird nach 17):

$$s_1 = 1, \quad s_2 = \frac{28 - 3h}{16 + 9h}.$$

Des weiteren haben wir nach 4), 11) und 16):

$$\left\{\begin{aligned} \eta &= p\eta_1 + q\eta_2, \\ \eta_1\eta_2 &= \eta_1 + \eta_2, \\ p &= \tfrac{1}{2}(s + \sqrt{r}), \\ q &= \tfrac{1}{2}(s - \sqrt{r}), \end{aligned}\right. \tag{62}$$

und benutzen wir zuerst die Lösung $r_1$ sowie $s_1$, so finden wir mit Hinblick auf 15) $\eta = \eta_1$, $h = h_1$, das heisst, die Gleichung 61) fällt zusammen mit der Resolvente für $\eta_1$. Ebenso würden wir durch Vertauschung der Vorzeichen von $\sqrt{r}$ auf die Resolvente für $\eta_2$ kommen. Verwenden wir dagegen die Lösung $r_2$ sowie $s_2$, so erhalten wir aus 19) den Ausdruck:*

$$h_1 h_2 = \frac{27h(1-h)^2(128 - 3h)^3}{16(16 + 9h)^5}, \tag{63}$$

welcher, mit der Bedingung:

$$h_1 + h_2 = 1 \tag{5}$$

verknüpft, zu den neuen Parametern führt.

In den vereinigten Gleichungen 62) endlich haben wir eine quadratische Transformation gewonnen, vermöge welcher eine $\eta$-Resolvente 61) mit dem absoluten Parameter $h$ in eine andere für $\eta_1$ oder $\eta_2$ verwandelt werden kann, deren absolute Parameter $h_1$ oder $h_2$ in der eben geschilderten Weise von $h$ abhängen. — Man vergleiche die Transformation zwischen verwandten Gleichungen in Abschnitt 8, von welcher obige ein Spezialfall ist.

---

* Substituiert man in 63):

$$h = -\frac{16(x + 8)}{3(3x - 1)},$$

so entsteht:

$$J = 4h_1 h_2 = \frac{x^3(x + 5)^2(x + 8)}{64(3x - 1)},$$

ein Wert, zu welchem Herr Klein von ganz anderer Seite her gelangt ist (vergl. Math. Annalen XII. Bd. S. 176: „Über lineare Differentialgleichungen"), und welcher als Nr. XII in die Schwarz-Brioschische Tabelle (Math. Annalen XI. Bd. S. 401) einzuordnen wäre.

(Schluss folgt.)

## Über das Einstellen der dreiteiligen Fluchtpunktschiene.

Von **R. Mehmke** in Stuttgart.

Unter den wenigen praktisch brauchbaren und in keinem Falle versagenden Hilfsmitteln, welche man hat, um nach unzugänglichen Punkten gerade Linien zu ziehen, ist ohne Frage die dreiteilige Fluchtpunktschiene* das einfachste. Dass die Verbreitung dieses nützlichen Werkzeuges keine so grosse ist, als man erwarten sollte, mag wohl an einigen Vorurteilen liegen, die gegen dasselbe zu bestehen scheinen. So wird in der „Anleitung zur Perspektive" von Frangenheim und Posern (Handbuch der Baukunde, Abteilung I, Heft 2) auf S. 380 gesagt: „... die dreiteilige Schiene kann zur Benützung nicht empfohlen werden, weil das Einstellen sehr langsam zu bewerkstelligen ist, zwei Schienen für „rechts" und „links" notwendig sind und ausser dem Horizonte noch eine Linie gegeben sein muss, welche nach dem Verschwindepunkte geht." Dem letzten Einwande ist kein Gewicht beizulegen, da in manchen Fällen ein unzugänglicher Fluchtpunkt von vornherein durch zwei nach ihm gehende Linien bestimmt ist und man sich andernfalls leicht und ohne nennenswerten Zeitaufwand solche Linien verschaffen kann. Der mit Recht gerügte Übelstand, dass früher eine Schiene nicht für alle Fälle ausreichte, ist von K. W. Ellersdorfer durch Änderung des Schlosses** und auf andere Weise — allerdings nur unter Aufgeben der geometrischen Richtigkeit und unbedingten Anwendbarkeit — von Schupmann*** beseitigt worden; eine von mir

---

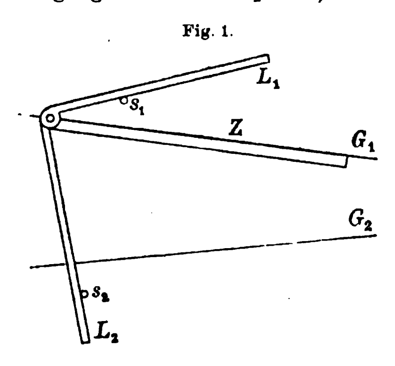
* Die Erfindung derselben schreibt man gewöhnlich Streckfuss zu. Streckfuss giebt in seinem Lehrbuche der Perspektive, zweite Auflage, S. 54, 1874, an, er habe die fragliche Schiene zuerst in dem Kunstblatte „Die Dioskuren" im Jahre 1865 bekannt gegeben, bald darauf aber das Werk „Practical geometry, linear perspective and projection, London by Bradley 1834" kennen gelernt, in welchem ein ähnliches Instrument beschrieben und abgebildet sei, als dessen Erfinder John Farey genannt werde. Einer gütigen Mitteilung des Herrn geh. Regierungsrat Prof. Dr. Hauck in Berlin verdanke ich die Kenntnis der Thatsache, dass bedeutend früher dieselbe Erfindung bereits von Peter Nicholson gemacht worden ist, dem sie 1814 die silberne Medaille der Society of Arts eingetragen hat. Diese Angabe ist mit einer Beschreibung und Abbildung des vom Erfinder Centrolineal genannten Instrumentes in dessen Werk „The rudiments of practical perspective, London 1822" enthalten. In dem Kataloge von Zeichengeräten der Firma W. F. Stanley in London ist (unter Nr. 2451 der Ausgabe von 1891) „Nicholsons Centrolinead" aufgeführt und abgebildet; dasselbe war auch von genannter Firma zur mathematischen Ausstellung in München, Herbst 1893, geschickt worden. Die Benennung „Fluchtpunktschiene" rührt, wie es scheint, von Streckfuss her.

** Mit diesem abgeänderten Schlosse versehene Schienen liefert die mathematisch-mechanische Werkstätte von Eduard Preisinger in München seit 1883.

*** L. Schupmann, Vereinfachung des perspektivischen Lineals, Deutsche Bauzeitung, S. 228, 1885.

angegebene Konstruktion ist ebenfalls von demselben frei.* Es bleibt also nur der, schon öfters erhobene Vorwurf, dass die Einstellung auf einen bestimmten Fluchtpunkt schwierig und zeitraubend sei, zu entkräften. Streckfuss giebt (a. a. O. S. 55) eine zur Einstellung dienende geometrische Konstruktion an, bemerkt aber dazu, dass das Einstellen durch Probieren vorzuziehen sei. In den Gebrauchsanweisungen, die seitens der Händler den Fluchtpunktschienen beigegeben werden, ist nur vom Probieren die Rede. Da der Erfolg eines derartigen Verfahrens unsicher ist und sehr von der Übung und Geschicklichkeit des Einzelnen abhängt, so können die lautgewordenen Klagen nicht Wunder nehmen. Ich will nun eine seit vielen Jahren von mir benützte Methode zur Einstellung der in Rede stehenden Fluchtpunktschiene mitteilen, die ohne jede Vorbereitung und ohne dass besondere Vorrichtungen an der Schiene vorhanden sein müssten, in allen Fällen sicher und so schnell, als man verlangen kann, zum Ziele führt. Ferner soll gezeigt werden, wie mittelst einer Teilung, die ein jeder auf der Zeichenschiene selbst anbringen kann, die Einstellung auf einen unzugänglichen Fluchtpunkt, der in gegebener Richtung und Entfernung von irgend einem Punkte der Zeichnung liegt, sich sehr rasch und bequem bewerkstelligen lässt.

Fig. 1.

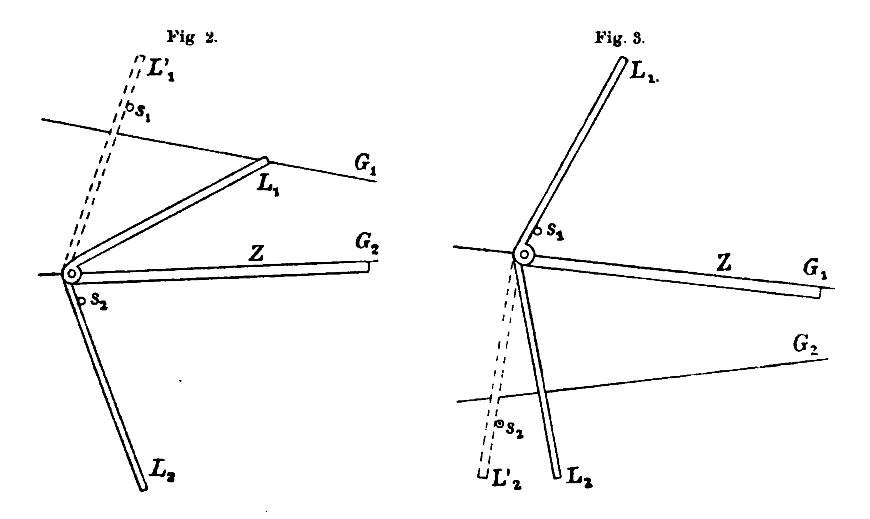



1. Der unzugängliche Punkt, auf welchen die Schiene einzustellen ist, möge der Schnittpunkt der beiden Geraden $G_1$ und $G_2$ sein. Nachdem ausserhalb der Fläche, die von der Schiene soll bestrichen werden können (jedenfalls ausserhalb der von $G_1$ und $G_2$ begrenzten), in zwei beliebigen Punkten, die jedoch mindestens um eine Linealbreite von $G_1$ respektive $G_2$ entfernt sein müssen, die beiden Führungsstifte $s_1$ und $s_2$ befestigt worden sind, bringe man bei gelöster Schraube das Instrument auf beliebige Weise** in solche Lage, dass die Zeichenkante $Z$ (obere Kante des mittleren, auf der Zeichenfläche ruhenden Lineals) mit $G_1$ zusammenfällt und die äusseren Lineale oder Leitschienen $L_1$ und $L_2$ sich an die Stifte lehnen (siehe Fig. 1). Hierauf stelle man durch Anziehen

* Siehe Katalog mathematischer Modelle, Apparate und Instrumente, im Auftrage der Deutschen Mathematiker-Vereinigung herausgegeben von W. Dyck, S. 227, München 1892. Ich bin im Jahre 1890 auf diese Konstruktion durch den Wunsch geführt worden, eine Fluchtpunktschiene zu haben, die sowohl für rechts, als für links liegende Fluchtpunkte anwendbar wäre, aber im Gegensatze zu Schupmanns perspektivischen Lineal geometrisch richtig zeichnete.

** Es wird allerdings zur Beschleunigung des Verfahrens dienen, wenn man schon anfangs der richtigen Einstellung so nahe wie möglich zu kommen sucht, indem man in Gedanken durch die Mittelpunkte der Stifte und den, seiner Lage nach geschätzten unzugänglichen Punkt einen Kreis zieht und den Zapfen, der die drei Lineale verbindet, ungefähr auf diesen Kreis bringt.

der Schraube die drei Lineale gegeneinander fest und bewege sie, ohne die Berührung zwischen dem Stifte $s_2$ und der zugehörigen Leitschiene $L_2$ aufzugeben, bis die Zeichenkante an der Geraden $G_2$ anliegt (siehe Fig. 2). Wenn nicht etwa infolge eines glücklichen Zufalls die gegenseitige Stellung der Lineale schon die richtige ist, so wird jetzt das Lineal $L_1$ den Stift $s_1$ nicht mehr berühren. Man drücke nun mit einer Hand gleichzeitig auf die Zeichenschiene und die Leitschiene $L_2$, damit sie ihre Lage nicht ändern können, löse dann mit der anderen Hand die Schraube, drehe die Leitschiene $L_1$, bis sie am Stift $s_1$ anliegt (gestrichelt gezeichnete Lage $L'_1$ in Fig. 2), und ziehe die Schraube wieder an. Wird hierauf das Instrument




zurückbewegt, die Schiene $L_1$ leicht gegen den Stift $s_1$ gedrückt, und die Zeichenkante mit $G_1$ zur Deckung gebracht, und zeigt es sich, dass dann auch $L_2$ den Stift $s_2$ berührt, so ist die Einstellung fertig. Wenn es noch nicht der Fall ist, so halte man mit einer Hand $Z$ und $L_1$ fest, löse mit der anderen Hand die Schraube, bringe das Lineal $L_2$ zur Berührung mit dem Stifte $s_2$ (Lage $L'_2$, in Fig. 3 gestrichelt) und schraube wieder zu. Wenn alsdann unter Andrücken der Leitschienen an die Führungsstifte das Instrument bewegt wird, so fällt die Zeichenkante $Z$ meistens schon genau genug mit $G_2$ zusammen. Sollte das noch nicht zutreffen, so hat man zu verschieben, bis $Z$ die Linie $G_2$ deckt und $L_2$ in Berührung mit $s_2$ kommt, dann unter Festhalten von $Z$ und $L_2$ die Lage von $L_1$ zu verbessern etc.

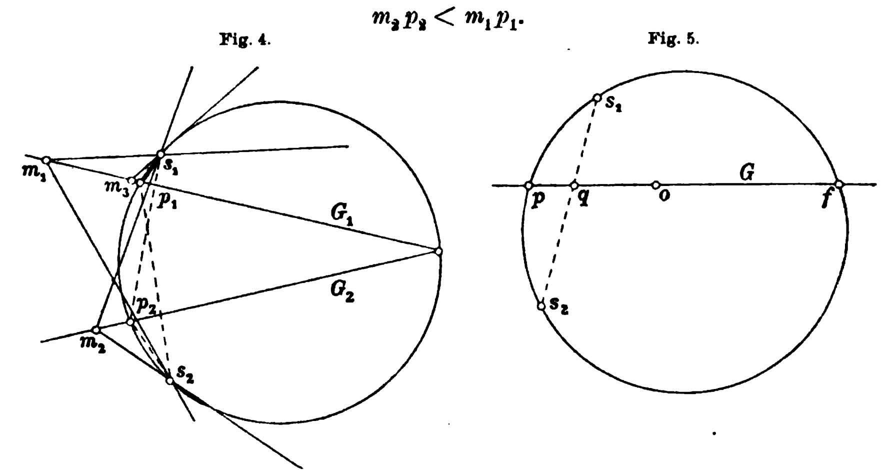
Es muss bewiesen werden, dass man durch Anwendung des obigen Verfahrens unter allen Umständen bei jedem Schritte der richtigen Stellung näher kommt. Letztere wird vorhanden sein, wenn der Mittelpunkt $m$ des Zapfens auf dem Kreise liegt, welcher durch die Mittelpunkte der Führungsstifte und den Schnittpunkt von $G_1$ mit $G_2$ gezogen werden kann. Befindet sich nun $m$ (siehe Fig. 4, in welcher die Stifte als Punkte, die Lineale als blosse Linien dargestellt sind) anfangs in $m_1$, dann in $m_2$,

hierauf in $m_3$ etc., bezeichnet man ferner durch $p_1$ und $p_2$ die Schnittpunkte von $G_1$ und $G_2$ mit dem genannten Kreise, so sind vermöge des angewendeten Verfahrens die Winkel $p_1 m_1 s_2$ und $p_2 m_2 s_2$ einander gleich, ebenso die Winkel $m_1 p_1 s_2$ und $m_2 p_2 s_2$ als Nebenwinkel zu zwei Peripheriewinkeln über demselben Bogen in jenem Kreise. Daher sind die Dreiecke $m_1 p_1 s_2$ und $m_2 p_2 s_2$ einander ähnlich, woraus die Proportion

$$m_1 p_1 : m_2 p_2 = p_1 s_2 : p_2 s_2$$

folgt. Weil aber $p_2 s_2 < p_1 s_2$ ist, so erhält man

$$m_2 p_2 < m_1 p_1.$$




Auf ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass

$$m_3 p_1 < m_2 p_2; \quad m_4 p_2 < m_3 p_1 \quad \text{etc.}$$

ist. Also kommt in der That der Punkt $m$ dem Kreise, auf dem er liegen soll, unaufhörlich näher; und zwar, wie man sieht, um so schneller, je grösser $p_1 s_2$ im Verhältnisse zu $p_2 s_2$ und $p_2 s_1$ im Verhältnisse zu $p_1 s_1$ ist, weshalb man gut thut, die Stifte möglichst nahe bei den Geraden $G_1$ und $G_2$, aber möglichst entfernt von ihrem Schnittpunkte einzustecken, und sich die Sache günstiger gestaltet, wenn der Winkel zwischen $G_1$ und $G_2$ gross, als wenn er klein ist.

Diese Methode der schrittweisen Annäherung, die grosse Ähnlichkeit mit gewissen Methoden der Analysis (z. B. zur Auflösung numerischer Gleichungen) zeigt, erweist sich auch dann als nützlich, wenn man die Einstellung mit Hilfe einer geometrischen Konstruktion (etwa der von Streckfuss angegebenen) vorgenommen, aber aus irgend einem Grunde ein ungenaues Ergebnis erhalten hat. Statt wieder von vorn anzufangen, wird man in solchem Falle besser durch das mitgeteilte Verfahren die vorhandene Ungenauigkeit beseitigen.

2. Nehmen wir jetzt an, dass der unzugängliche Fluchtpunkt $f$ durch eine einzige nach ihm laufende Gerade $G$ sowie die Entfernung von irgend einem Punkte $o$ dieser Geraden gegeben sei (siehe Fig. 5). Bei der Bewegung der richtig eingestellten Fluchtpunktschiene bleibt der Mittelpunkt $m$ des Drehzapfens bekanntlich auf dem durch die drei Punkte $s_1$, $s_2$ und $f$ be-

stimmten Kreise. Schneidet letzterer die Gerade $G$ zum zweiten Male in $p$, ist ferner $q$ der Schnittpunkt von $s_1 s_2$ mit $G$, so hat man

$$pq = \frac{s_1 q \cdot q s_2}{qf}.$$

Da die Längen der Strecken $qf = qo + of$, $s_1 q$ und $s_2 q$ bekannt sind, beziehungsweise gemessen werden können, so lässt sich $pq$ mit Hilfe obiger Formel berechnen, wobei in der Regel die Genauigkeit, welche der Rechenschieber gewährt, ausreichen wird.

Wäre an der Zeichenkante ein gewöhnlicher Massstab vorhanden, dessen Anfangspunkt im Drehpunkte $m$ läge, so könnte die Einstellung in der Weise geschehen, dass man die Zeichenkante an $G$ legte, und zwar so, dass sich der zum berechneten Werte von $pq$ gehörige Teilstrich des Massstabes dem Punkte $q$ gegenüber befände, hierauf mit einer Hand die Zeichenkante festhielte, mit der anderen Hand die Schraube löste, die Leitschienen gegen die zugehörigen Leitstifte $s_1$ und $s_2$ lehnte und wieder befestigte. Wünschte man die Fluchtpunktschiene auch für unzugängliche Punkte zu benützen, die auf der anderen Seite von $q$ liegen, und zwar ohne die Leitstifte versetzen zu müssen, so wäre eine Verlängerung des Massstabes nach der negativen Seite über den Nullpunkt hinaus erforderlich, es könnte aber die Verlängerung der Zeichenschiene nach jener Seite dadurch umgangen werden, dass man den Nullpunkt des Massstabes um eine beliebige Strecke, z. B. 100 mm, in positivem Sinne verlegte, in welchem Falle natürlich vor der Einstellung der Punkt $q$ der Zeichnung um denselben Betrag verschoben werden müsste.

Will man jedoch beim Gebrauche der Fluchtpunktschiene der Mühe des Rechnens ganz enthoben sein, so muss man sich entschliessen, den Entfernungen $s_1 q$ und $qs_2$, oder wenigstens ihrem Produkte, ein für allemal einen festen Wert zu geben, z. B.:

$$s_1 q = qs_2 = 300 \text{ mm.}^*$$

Es können dann im voraus für verschiedene einfache Werte der Entfernung $qf$ die Werte von $pq$ berechnet werden, und indem man die letzteren Werte von dem angenommenen Nullpunkte aus auf der Zeichenkante abträgt und neben die so gefundenen Punkte die betreffenden Werte von $qf$ schreibt, erhält man auf der Zeichenschiene eine (ungleichmässige) Teilung, mit deren Hilfe die Einstellung auf eine vorgeschriebene Entfernung des unzugänglichen Punktes $f$ ungemein schnell und leicht von statten geht.

* Man wird wohl in der Regel $s_1 s_2$ senkrecht zu $G$ annehmen, aber nötig ist das offenbar nicht.

## Zur perspektivischen Lage kollinearer ebener Felder.

Von Dr. **Kilbinger** in Mülhausen i. Els.

In der zweiten Abteilung, dritte Auflage, S. 20 seiner Geometrie der Lage, zeigt Herr Reye, dass zwei kollineare ebene Felder $\eta$ und $\eta_1$, deren unendlich ferne Geraden einander nicht entsprechen, auf zweifache Weise in perspektivische Lage gebracht werden können. Hierbei wird bewiesen, dass in $\eta$ zwei und nur zwei gerade Punktreihen $u$ und $v$ vorkommen, welche den homologen $u_1$ und $v_1$ in $\eta_1$ projektivisch gleich sind. Die Geraden $u$, $v$ und $u_1$, $v_1$ sind zu den Fluchtlinien ihrer Felder parallel. Werden $\eta$ und $\eta_1$ so in perspektivische Lage gebracht, dass entweder die Punktreihen $u$ und $u_1$ oder $v$ und $v_1$ alle ihre Punkte entsprechend gemein haben, und ausserdem die Ebenen $\eta$ und $\eta_1$ aufeinander liegen, so haben die beiden Felder noch einen Strahlenbüschel entsprechend gemein, woraus dann folgt, dass in $\eta$ zwei Strahlenbüschel existieren, welche den homologen in $\eta_1$ projektivisch gleich sind.

Bei der Betrachtung über die perspektivische Lage von $\eta$ und $\eta_1$ können wir auch unabhängig von den projektivisch gleichen Punktreihen der Felder die Existenz zweier Strahlenbüschel in $\eta$ nachweisen, welche den homologen in $\eta_1$ projektivisch gleich sind. Zu dem Zwecke machen wir jeden Punkt von $\eta$ zum Mittelpunkte einer rechtwinkligen Strahleninvolution. Die Strahlen eines jeden Büschels projizieren dann auf der unendlich fernen Geraden $g_\infty$ von $\eta$ ein und dieselbe involutorische Punktreihe, so dass also durch je zwei konjugierte Punkte von $g_\infty$ zwei konjugierte Strahlen einer jeden Strahleninvolution hindurchgehen. Ist nun $g_1$ die Fluchtlinie von $\eta_1$, so entspricht der involutorischen Punktreihe $g_\infty$ eine solche von $g_1$. Da nun eine rechtwinklige Strahleninvolution keine reellen Ordnungselemente hat, so haben also auch die Punktinvolutionen $g_\infty$ und $g_1$ keine reellen Ordnungselemente. Es giebt alsdann in $\eta_1$ zwei und nur zwei Punkte $P_1$ und $Q_1$, aus welchen die Punktinvolution $g_1$ durch eine rechtwinklige Strahleninvolution projiziert wird. Je zwei senkrechten Strahlen der Büschel $P_1$, $Q_1$ entsprechen dann in $\eta$ zwei senkrechte Strahlen des Büschels $P$ respektive $Q$, und die Strahlenbüschel $P$, $P_1$ und $Q$, $Q_1$ sind somit projektivisch gleich. Hiermit ist also bewiesen, dass in $\eta$ zwei und nur zwei Strahlenbüschel vorkommen, die den homologen von $\eta_1$ projektivisch gleich sind. Die Punkte $P_1$ und $Q_1$ haben gleichen Abstand von $g_1$ und ihre Verbindungsgerade steht auf $g_1$ senkrecht (vergl. Reye, Geometrie der Lage, I. Abteilung, Auflage 3, S. 154).

Werden die ebenen Felder $\eta$ und $\eta_1$ so in perspektivische Lage gebracht, dass die homologen Strahlen von $P$ und $P_1$ (oder $Q$ und $Q_1$) sich decken, so haben $\eta$ und $\eta_1$ noch die Punkte einer Geraden $p$ entsprechend gemein. Da nun $p$ zu den Fluchtlinien beider Felder parallel läuft, weil jede die ihr entsprechende unendlich ferne Gerade in dem unendlich fernen Punkte von $p$ schneiden muss, und ferner $g_1$ auf der Geraden $P_1 Q_1 (PQ)$

senkrecht steht, so schneidet also auch letztere Gerade $p$ und die Fluchtlinie $h$ von $\eta$ rechtwinklig. Die Geraden $PQ$ und $P_1Q_1$ sind also die beiden homologen Geraden von $\eta$ und $\eta_1$, welche auf ihren Fluchtlinien senkrecht stehen. Die Fluchtlinie $h$ geht durch den Mittelpunkt der Strecke $PQ$. Zum Beweise des Letzteren bezeichnen wir den unendlich fernen Punkt der Geraden $P_1Q_1$ mit $S_{1\infty}$ und ihren Schnittpunkt mit $G_1$ durch $M_1$; dann sind $S_{1\infty}$, $P_1$, $M_1$, $Q_1$ vier harmonische Punkte, denen, wenn sie dem Felde $\eta_1$ angehören sollen, die respektiven vier harmonischen Punkte $S$, $P$, $M_\infty$, $Q$ in $\eta$ entsprechen. Da nun $M_\infty$ unendlich fern liegt, so muss Punkt $S$ (der auf $h$ liegt) die Mitte von $PQ$ sein.

Die Gerade $p$ enthält zwei projektivisch gleiche Punktreihen $u$ und $u_1$ von $\eta$ respektive $\eta_1$. Es lässt sich nun unschwer nachweisen, dass in $\eta$ noch eine zweite Punktreihe $v$ vorkommt, welche der homologen $v_1$ in $\eta_1$ projektivisch gleich ist. Gleichwie nun $u$ und $u_1$, so sind auch $v$ und $v_1$ zu den Fluchtlinien ihrer Felder parallel; ferner hat $h$ von $u$ denselben Abstand wie von $v$, und es ist der Abstand von $g_1$ und $u_1$ gleich dem von $g_1$ und $v_1$. In dem Falle, dass bei der oben angegebeneu perspektivischen Lage die Fluchtlinien $g_1$ und $h$ zusammenfallen, liegen die Felder $\eta$ und $\eta_1$ involutorisch.

## Über ein Problem der Mechanik.

Von **A. Karl** in Paris.

Ist $\varphi(u, v) = \frac{a}{\sqrt{u+v}}$ eine zusammengesetzte Funktion von $u$ und $v$ der einzigen unabhängigen Variablen $t$, so bekommt man vermöge der bekannten Formel:

$$\varphi(u, v) = \int \frac{\partial \varphi}{\partial u}\, du + \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} \int \frac{\partial \varphi}{\partial u}\, du \right) dv + c,$$

oder auch der Formel

$$\varphi(u, v) = \int \frac{\partial \varphi}{\partial v}\, dv + \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \int \frac{\partial \varphi}{\partial v}\, dv \right) du + c'$$

die Gleichungen:

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial u}\, du = \frac{a}{\sqrt{u+v}} + c, \quad \int \frac{\partial \varphi}{\partial v}\, dv = \frac{a}{\sqrt{u+v}} + c',$$

das heisst, die Integration der Differentialausdrücke $\frac{\partial \varphi}{\partial u}\, du$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}\, dv$ reproduziert, bis auf eine Konstante, die Funktion $\varphi(u, v)$ selbst; solche Funktionen sind auch diejenigen der Form: $\frac{a}{u_1 + v_1} + \frac{b}{u_2 + v_2} + \cdots$, wo die $u$ und $v$ irgend welche differentierbare Funktionen einer unabhängigen Variablen $t$ bezeichnen. Ist nun allgemein:

$$U_i = f m_i \sum_k \frac{m_k}{\Delta_{i,k}}, \quad \text{wo } \Delta_{i,k} = \sqrt{(\alpha_i - \alpha_k)^2 + (\beta_i - \beta_k)^2 + (\gamma_i - \gamma_k)^2}, \quad \begin{matrix} i = 0, 1, \ldots n \\ k = 0, 1, \ldots n \end{matrix} \quad i \lesseqgtr k$$

eine zusammengesetzte Funktion von den $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ der einzigen unabhängigen Variablen $t$, so hat man also:

$$\alpha)\quad \int\frac{\partial U_i}{\partial\alpha_i}d\alpha_i = U_i + c_i,\quad \int\frac{\partial U_i}{\partial\beta_i}d\beta_i = U_i + c'_i,\quad \int\frac{\partial U_i}{\partial\gamma_i}d\gamma_i = U_i + c''_i.$$

Dies festgesetzt, seien nun die Differentialgleichungen gegeben:

$$\text{A)}\quad \begin{cases} m_i\dfrac{d^2\alpha_i}{dt^2} = f m_i\sum\limits_k \dfrac{m_k(\alpha_k-\alpha_i)}{\Delta^3_{i,k}} = \dfrac{\partial U_i}{\partial\alpha_i} \\ m_i\dfrac{d^2\beta_i}{dt^2} = f m_i\sum\limits_k \dfrac{m_k(\beta_k-\beta_i)}{\Delta^3_{i,k}} = \dfrac{\partial U_i}{\partial\beta_i} \\ m_i\dfrac{d^2\gamma_i}{dt^2} = f m_i\sum\limits_k \dfrac{m_k(\gamma_k-\gamma_i)}{\Delta^3_{i,k}} = \dfrac{\partial U_i}{\partial\gamma_i}. \end{cases}$$

Multipliziert man die Gleichungen A) respektive mit $d\alpha_i$, $d\beta_i$, $d\gamma_i$ und integriert, so bekommt man nach der bemerkenswerten Eigenschaft von $U_i$ beziehungsweise der Gleichung $\alpha$):

$$1)\quad \frac{m_i}{2}\left(\frac{d\alpha_i}{dt}\right)^2 = U_i + c,\quad \frac{m_i}{2}\left(\frac{d\beta_i}{dt}\right)^2 = U_i + c'_i,\quad \frac{m_i}{2}\left(\frac{d\gamma_i}{dt}\right)^2 = U_i + c''_i.$$

Aus den Gleichungen 1) folgt:

$$1')\quad \left(\frac{d\alpha_i}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\beta_i}{dt}\right)^2 = A_i,\quad \left(\frac{d\alpha_i}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\gamma_i}{dt}\right)^2 = B_i,$$

wo die $A$ und $B$ konstante Grössen bezeichnen; und folglich

$$\left(\frac{d\alpha_i}{dt} + \frac{d\beta_i}{dt}\right)\cdot\left(\frac{d\alpha_i}{dt} - \frac{d\beta_i}{dt}\right) = A_i = \lambda_i\cdot\mu_i$$

und schliesslich:

$$2)\quad \alpha_i = \varrho_i t + \varrho_i',\quad \beta_i = \sigma_i t + \sigma_i',\quad \gamma_i = \tau_i t + \tau_i'$$

wo die $\varrho$, $\sigma$, $\tau$ konstante Grössen sind.

Differentiert man die Gleichungen 2), nimmt Rücksicht auf die Gleichungen 1') und 1) und differentiert die 1), so bekommt man nach Division respektive durch $\frac{d\alpha_i}{dt}$, $\frac{d\beta_i}{dt}$, $\frac{d\gamma_i}{dt}$ die ursprünglichen Gleichungen A).

Bemerkung: Denkt man sich im Raume $n+1$ materielle Punkte $M_0, M_1, \ldots M_n$ mit den respektiven Massen $m_0$, $m_1 \ldots m_n$, so kann man bekanntlich folgende Gleichung beweisen:

$$OK = \frac{m_0 M_0 O + m_1 M_1 O + \cdots + n_m M_n O}{m_0 + m_1 + \cdots + m_n}$$

wo $O$ irgend ein fester Punkt, $K$ der Schwerpunkt und $\Sigma m_i == 0$. Denken wir uns jetzt die Punkte $M_i$ projiziert auf eine feste Ebene, welche den Punkt $O$ enthält und setzen wir:

$$OK = re^{w\sqrt{-1}},\quad OM_i = \varrho_i e^{\theta_i\sqrt{-1}},\quad i = 0,\ 1, \ldots n,$$

so ergiebt sich

$$re^{w\sqrt{-1}} = \frac{\Sigma m_i\varrho_i e^{\theta_i\sqrt{-1}}}{\Sigma m_i} = a_0\varrho_0 e^{\theta_0\sqrt{-1}} + a_1\varrho_1 e^{\theta_1\sqrt{-1}} + \cdots + a_n\varrho_n e^{\theta_n\sqrt{-1}}$$

wo $\Sigma a_i = 1$. Kennt man also die Bahnen von $M_i$, so kann man für verschiedene Stellen in verschiedenen Zeitintervallen die Bahn des Schwerpunktes $K$ berechnen. — Setzt man:

$$Z = re^{w\sqrt{-1}},\quad \varrho_i = \varrho^i,\quad \theta_i = i\theta,\quad z = \varrho e^{\theta\sqrt{-1}},$$

so bekommt man:
$$Z = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n.$$

Die Glieder dieses Polynoms des $n^{\text{ten}}$ Grades entsprechen offenbar den Ecken eines bestimmten Polygons; jedem Werte von $z$ entspricht ein Polygon und der Schwerpunkt seiner materiellen Ecken; jedem Werte von $Z$ entsprechen $n$ Polygone und ihre ähnlichen und ähnlich liegenden (homothetischen) Polygone. Sind $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ die Wurzeln des Polynoms, für welche also der Schwerpunkt $K$ auf $O$ fällt, so hat man:

$$re^{w\sqrt{-1}} = \Pi_i r_i e^{\varphi_i\sqrt{-1}}, \text{ das heisst } r = r_1 r_2 \cdots r_n,\quad w = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n.$$

Beschreibt also der Schwerpunkt $K$ die Kreise $r = c$, so beschreibt $z$ die Kurven: $r_1 r_2 \ldots r_n = c$. Den Strahlen $w = \gamma$ entsprechen die Kurven $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n = \gamma$.

---

## Zur Perspektive des Kreises.

Von Dr. **Rudolf Schüssler** in Graz.

Der geometrische Ort der Punkte, von welchen ein Kreis $k$ auf eine Ebene $E$ wieder als Kreis projiziert werden kann, ist bekanntlich eine gleichseitige Hyperbel, welche den Kreis $k$ in den Endpunkten eines Durchmessers schneidet und deren Ebene auf der Schnittlinie der Kreisebene und der Ebene $E$ normal steht. — Sollen sich zwei in einer Ebene liegende Kreise aus demselben Zentrum auf eine Ebene als Kreise projizieren,* so muss das Projektionszentrum in der durch die Zentrallinie der beiden Kreise gehenden, auf der Ebene derselben normalen Ebene liegen und ist als Schnittpunkt zweier gleichseitiger Hyperbeln leicht zu konstruieren, während die Bildebene $E$ parallel zur Chordale der gegebenen Kreise sein muss.

Dieselbe Konstruktion leitete Herr Geheimrat Schlömilch** in sehr einfacher Weise nach den Prinzipien der analytischen Geometrie, sowie Herr Dr. Chr. Beyel,*** gestützt auf die involutorischen Gesetze der Kollineation, ab.

Zu denselben Resultaten kann man auch auf elementar-geometrischem Wege nur unter Voraussetzung der einfachsten Hilfsmittel der gewöhnlichen Perspektive gelangen, ähnlich wie Herr Geheimrat Schlömilch die Konstruktion von Kegelschnitten aus fünf Punkten oder fünf Tangenten auf die perspektivische Darstellung des Kreises zurückführt.†

---

* Diese Aufgabe wurde von Herrn Geheimrat Schlömilch in der Zeitschrift des Vereines deutscher Zeichenlehrer 1894, S. 381, gestellt.

** Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1895, S. 57.

*** Ebendaselbst S. 255.

† Ebendaselbst, 1894, S. 117.

1. Sucht man die wahre Grösse eines ebenen Gebildes, dessen perspektivisches Bild gegeben ist, so ist zu beachten, dass sich in der Bildspur $E^b$ das Bild einer Geraden und deren Umlegung um $E^b$ in die Bildebene schneiden, dass die Fluchtspur $E^v$ die Bilder aller unendlich fernen Punkte der Ebene $E$ enthält, und das Bild eines Punktes mit dessen Umlegung um $E^b$ auf einer Geraden durch $(C)$, die Umlegung des Projektionszentrums um $E^v$, liegen; sucht man daher z. B. zu dem Bilde $b'c'$ einer Geraden deren Umlegung um $E^b$, so hat man durch den Spurpunkt $\delta$ der Geraden zum umgelegten Fluchtstrahl $(C)\varphi$ die Parallele zu ziehen; $(c)$ liegt auf $(C)c'$ etc.

Fig. 1.



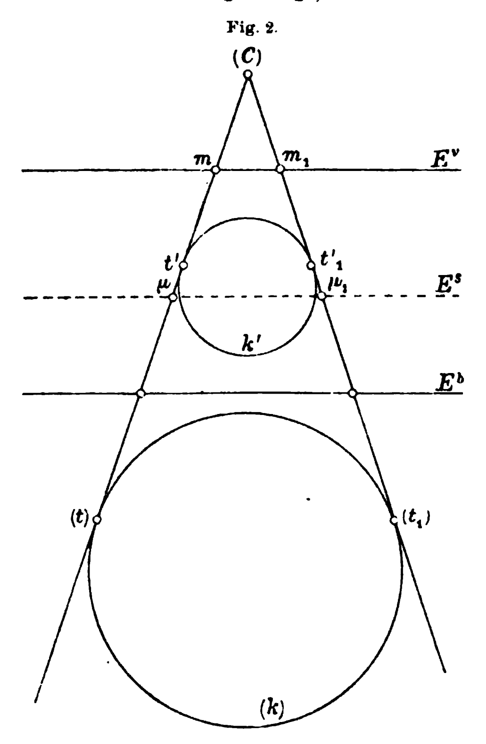
2. Es frägt sich nun: Wie muss man $E^b$, $E^v$, $(C)$ annehmen, damit ein gegebener Kreis $k'$ das Bild eines in $E$ gelegenen Kreises $k$ ist?

Die zu $E^b$ parallelen Tangenten in $a'$ und $b'$ sind Bilder von Tangenten der Originalkurve $k$, welche auch zu $E^b$ parallel sind; daher ist $a'b'$ das Bild eines Durchmessers $ab$, der zur $E^b$ normal sein muss, wenn $k$ ein Kreis sein soll; es muss also $a'b'$ und $(a)(b)$ in eine Gerade normal zu $E^b$ fallen,

welche auch $(C)$ enthält, oder: $(C)$ muss in dem zur $E^b$ normalen Durchmesser des Bildkreises liegen. — Um zu $a'b'$ die Umlegungen zu finden, benütze man zwei beliebige Gerade $\delta\varphi$ und $\delta_1\varphi_1$ durch $b'$ und $a'$, welche sich in einem Punkte $c'$ der Peripherie schneiden und erhält $(b)(a)(c)$. Soll die Originalkurve $k$ ein Kreis sein, so muss $\sphericalangle(a)(c)(b)$ ein Rechter sein und wegen des Parallelismus der Schenkel auch $\sphericalangle\varphi(C)\varphi_1$. Dann liegen $(C)$ und $c'$ mit $\varphi$ und $\varphi_1$ auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt $o$ auf $E^v$ liegt; er wird gefunden, wenn man die Kreistangente in $c'$ mit $E^v$ zum Schnitte bringt (weil dann $c'o\varphi_1$ und $c'o\varphi$ gleichschenklige Dreiecke sind, wie aus der Gleichheit der Peripheriewinkel über demselben Bogen folgt); daher ist $oc'=o(C)$.

Soll die Originalkurve ein Kreis sein, muss dies für jeden Punkt $c'$ der Peripherie $k'$ gelten, das heisst $E^v$ muss der Ort jener Punkte $o$ sein, deren Tangenten an $k'$ gleich ihren Entfernungen von $(C)$ sind, oder $E^v$ muss die Chordale zwischen $(C)$ und $k'$ sein.* Dies ist die notwendige und hinreichende Bedingung, damit die Originalkurve ein Kreis ist.

Fig. 2.




Ist demnach $k'$ gegeben, so können wir $(C)$ beliebig wählen; $E^v$ ist dann schon bestimmt und wird am einfachsten gefunden, wenn man aus $(C)$ an $k'$ die beiden Tangenten legt und deren Halbierungspunkte $m$ und $m_1$, wo $(C)m = mt'$ und $(C)m_1 = m_1t'_1$ ist, verbindet. $E^b$ ist eine beliebige zu $E^v$ parallele Gerade. Wählt man dieselbe speziell als Berührungssehne $t't'_1$ der erwähnten Tangenten, so decken sich Bild und Umlegung des Originalkreises.

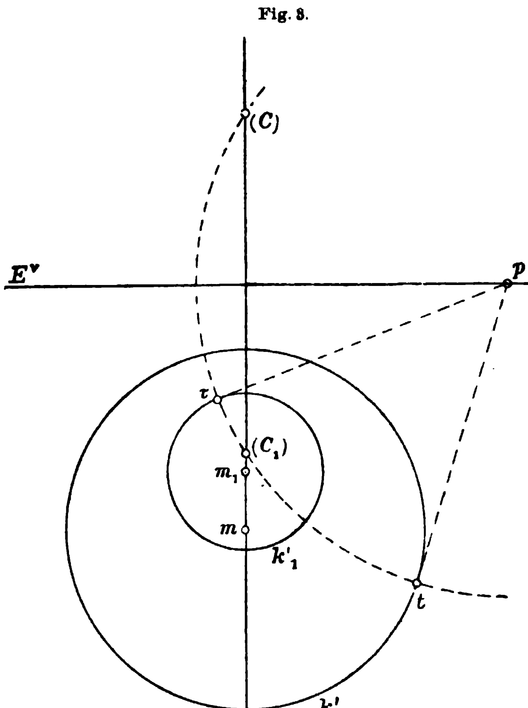
3. Sucht man zur Umlegung eines ebenen Gebildes das perspektivische Bild, so vertritt die Rolle von $E^v$ die Gegenaxe $E^s$, das ist die Umlegung um $E^b$ jener Geraden von $E$, welche in der durch das Projektionszentrum parallel zur Bildebene gehenden Ebene liegt. $E^s$ ist parallel zu $E^b$ und

* Die Chordaleigenschaft bleibt erhalten, wenn der Radius des einen Kreises Null wird.

hat davon dieselbe Entfernung wie $(C)$ von $E^v$; die Gegenaxe $E^t$ ist der Ort der Umlegungen jener Punkte einer Ebene, welche unendlich ferne Bilder besitzen.

Dieselben Betrachtungen wie früher für $E^v$ und $k'$ gelten jetzt für $E^t$ und $(k)$, sodass man als notwendige und hinreichende Bedingung, damit das Bild eines Kreises, dessen Umlegung $(k)$ gegeben ist, wieder ein Kreis wird, erhält: $E^t$ muss die Chordale zwischen dem beliebig gewählten $(C)$ und $(k)$ sein; $E^t$ wird am einfachsten gefunden, indem man von $(C)$ an $(k)$ die Tangenten legt und die Halbierungspunkte $\mu$ und $\mu_1$ derselben verbindet. $E^b$ oder $E^v$ kann man beliebig parallel zu $E^t$ wählen; in jedem Falle ist dann die andere der beiden Geraden bestimmt.

Fig. 8.




Wählt man speziell $E^v$ identisch $E^t$, so fallen Bild und Umlegung des Originalkreises zusammen und $E^b$ wird zur Berührungssehne $(t)(t_1)$ der erwähnten Tangenten.

4. Sind das Bild $k'$ und die Umlegung $(k)$ des Originalkreises gegeben, so muss $(C)$ ein Ähnlichkeitspunkt derselben sein, das heisst entweder der Schnittpunkt der äusseren oder inneren gemeinsamen Tangenten. $E^v$ ist dann wie oben bestimmt als Chordale von $(C)$ und $k'$; $E^t$ als Chordale von $(C)$ und $(k)$ und $E^b$ wird die Chordale von $(k)$ und $k'$.

5. Sollen zwei in einer Ebene liegende Kreise $k$ und $k_1$ aus demselben Zentrum auf die Bildebene sich als Kreise $k'$ und $k'_1$ projizieren, so muss für beide Kreise die oben als notwendig und hinreichend angegebene Bedingung erfüllt sein, das heisst:

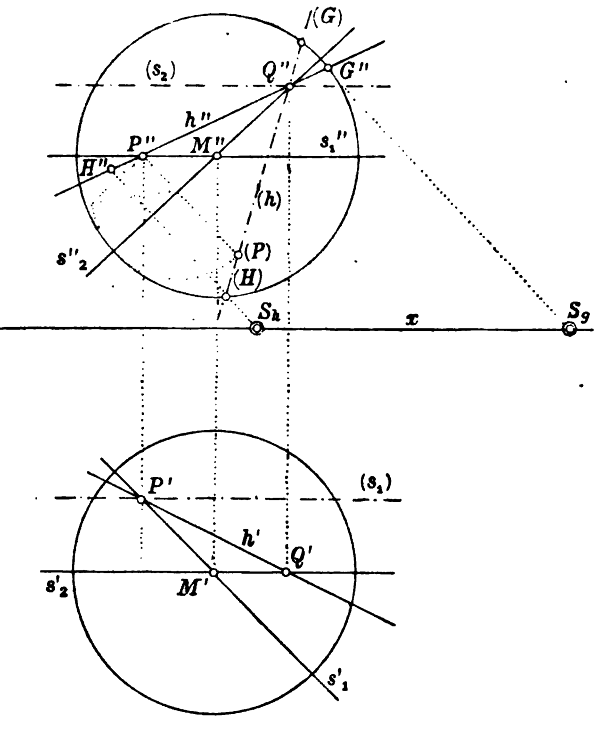
$E^v$ muss sowohl Chordale von $(C)$ und $k'$ als von $(C)$ und $k'_1$ sein, daher ist $E^v$ die Chordale von $k'$ und $k'_1$ und dadurch eindeutig bestimmt, wenn $k'$ und $k'_1$ als gegeben vorliegen. $(C)$ liegt auf der Zentrallinie $m m_1$ von $k'$ und $k'_1$ und hat von jedem Punkte der $E^v$ eine Entfernung gleich der Potenz dieses Punktes bezüglich der beiden Kreise: $pt = p(C)$. Man erhält zwei Lösungen entsprechend den beiden Umlegungen von $C$ um $E^v$ in die Bildebene. — Sowohl die Konstruktion als auch die Bedeutung von $E^v$ ergeben, dass die Aufgabe nur dann lösbar, wenn $k'$ und $k'_1$ keine

reellen Schnittpunkte besitzen. — Ebenso muss $E^s$ sowohl Chordale von $(C)$ und $(k)$ als von $(C)$ und $(k_1)$ sein, das heisst $E^s$ ist Chordale von $(k)$ und $(k_1)$ und dadurch eindeutig bestimmt, wenn $(k)$ und $(k_1)$ als gegeben vorliegen. $(C)$ wird in analoger Weise wie früher bestimmt; auch hier erhält man nur Lösungen, wenn $(k)$ und $(k_1)$ keine reellen Schnittpunkte besitzen. — $E^b$ kann in beiden Fällen willkürlich parallel zu $E^v$ respektive $E^s$ gewählt werden; wählt man $E^b$ speziell so, das $E^v$ respektive $E^s$ die Entfernung von $(C)$ und $E^b$ halbiert, so decken sich die Bilder mit den Umlegungen der Originalkreise.

## Eine Aufgabe aus der Schattenlehre.

Von Dr. **Chr. Beyel** in Zürich.

In den mir bekannten Lehrbüchern über Schattenkonstruktionen vermisse ich — abgesehen davon, dass diese Lehrbücher der Affinität, Kollineation etc. zumeist sehr behutsam aus dem Wege gehen — einen Punkt, der mir bei den Konstruktionen des Schlagschattens sehr wesentlich erscheint. Es handelt sich gewöhnlich darum, den Schlagschatten auf verschiedene Ebenen zu finden. Beschränken wir uns zunächst auf zwei Ebenen, so fällt ein Teil des Schattens — soweit er sichtbar ist — auf die eine Ebene. Ein anderer Teil fällt auf die zweite Ebene. Die zwei Schattenfiguren treffen sich in der Schnittlinie der Ebenen. Es empfiehlt sich nun die Konstruktion mit der Bestimmung dieser Schnittpunkte anzufangen. Ich will zeigen, wie dieselben stets sehr schnell gefunden werden können.




Wir wollen — der Einfachheit wegen — annehmen, dass die Ebenen, auf welche der Schlagschatten fällt, Grund- und Aufrissebene seien. $L$ sei

der leuchtende Punkt und $S$ sei die Kurve des Eigenschattens. Dann legen wir eine Ebene durch $L$ und $x$ und konstruieren ihre Schnittpunkte mit $S$. Die Schlagschatten dieser Punkte liegen in der $x$-Axe.

Die Konstruktion gestaltet sich besonders einfach, wenn — wie gewöhnlich — paralleles Licht angenommen wird, und wenn die Projektionen der Lichtrichtung mit der $x$-Axe Winkel von $45^0$ bilden. In diesem Falle haben alle Punkte, welche gleichweit von den zwei Projektionsebenen entfernt sind und im ersten Quadranten liegen, ihre Schlagschatten in der $x$-Axe. Der Ort dieser Punkte ist eine Ebene $H$ durch $x$, welche den ersten Quadranten halbiert.

Jede Gerade enthält einen Punkt dieser Ebene $H$. Wir finden ihn, indem wir zu einer Projektion der Geraden in Bezug auf die $x$-Axe die orthogonal symmetrische Linie zeichnen. Sie trifft die andere Projektion in dem erwähnten Punkte. Kennen wir zwei Projektionen der Selbstschattengrenze $S$, so zeichnen wir zu einer in Bezug auf $x$ die orthogonal symmetrische Figur. Sie schneidet die andere Projektion in den Punkten, deren Schatten auf $x$ liegen. Wir wollen diese Punkte die Grenzpunkte für den Schlagschatten nennen. Sie teilen $S$ so, dass ein Teil von $S$ seinen sichtbaren Schatten auf die Grundrissebene wirft und der andere seinen Schatten auf die Aufrissebene. Wir müssen nur den Schlagschatten von je einem dieser zwei Teile konstruieren.

Liegt $S$ in einer Ebene $E$, so zeichnen wir am besten die Schnittlinie $h$ dieser Ebene mit der Ebene $H$. Auf $h$ liegen die Grenzpunkte. Wir wollen zum Schlusse zeigen, mit wie wenig Linien die Konstruktion der Grenzpunkte für den Kugelschatten ausgeführt werden kann.

Die Ebene des Selbstschattenkreises wird durch die Spurparallelen $s_1 s_2$, welche durch den Mittelpunkt $M$ der Kugel gehen, bestimmt (siehe vorstehende Figur). Die orthogonal symmetrischen Linien zu $s_1''$, $s_2'$ schneiden $s_1'$, $s_2''$ in den respektiven Punkten $P$, $Q$ der Linie $h$. Ihre Umlegung $(h)$ giebt die Schnittpunkte $G$, $H$ der Geraden $h$ mit dem Selbstschattenkreise. Ihre Schatten sind die Grenzpunkte des Schlagschattens.

---

## Berichtigung.

In Heft 1, S. 60, Gleichung 2) muss rechts beim zweiten Faktor des zweiten Gliedes der Exponent 2 gestrichen und beim dritten Gliede der Koeffizient $p$ hinzugefügt werden.

# Die Transformation und Auflösung der Gleichung fünften Grades in elementarer Darstellung.

Von

Dr. W. Heymann

in Chemnitz.

Schluss.

## 14. Auflösung der Hauptgleichung.

Wir fanden für die Hauptgleichung:

$$y^5 + 5ay^2 + 5by + c = 0 \tag{2}$$

die Zerlegung:

$$y = p\eta_1 + q\eta_2, \tag{11}$$

wobei

$$\left\{\begin{aligned} \eta_1 &= -\frac{2\sqrt{3f}}{t-\sqrt{3f}}, \\ \eta_2 &= +\frac{2\sqrt{3f}}{t+\sqrt{3f}}. \end{aligned}\right. \tag{48}$$



Weil nach 16):

$$p = \frac{1}{2}(s + \sqrt{r}),$$

$$q = \frac{1}{2}(s - \sqrt{r}),$$

so ergiebt die Zusammenstellung:

$$y = -2 \cdot \frac{3sf + t\sqrt{3rf}}{t^2 - 3f}, \tag{64}$$

und wird noch

$$W = \frac{H}{t^2 - 3f} \tag{56}$$

berücksichtigt, so erscheint der Ausdruck:

$$y = -2 \cdot \frac{3sfW + tW\sqrt{3rf}}{H}. \tag{65}$$

Hier sind für $f$, $H$, $t$, $W$ die früher angegebenen Formen einzutragen, während das Verhältnis $y_1 : y_2$ der Ikosaedergleichung 37) zu entnehmen ist; die übrigen Grössen sind in Abschnitt 6 einzusehen. Es ist wichtig zu bemerken, dass die Irrationalität $\sqrt{3rf}$ nur eine scheinbare ist. Beachtet man nämlich einerseits die Beziehung:

42) $$h_1 - h_2 = \varkappa \sqrt{r},$$

wo $\varkappa$ das $r$ nur rational enthält, anderseits die Gleichung:

39a) $$h_1 - h_2 = \frac{T}{24 f^2 \sqrt{3f}},$$

so wird:

66) $$\sqrt{3rf} = \frac{T}{24 \varkappa f^2}$$

thatsächlich rational.

Bevor wir die transcendente Auflösung der Ikosaedergleichung in Angriff nehmen, womit obige Lösungen erst ihren definitiven Abschluss finden, sei über allgemeine Gleichung fünften Grades:

1) $$x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0$$

folgendes bemerkt. Die Tschirnhaus-Transformation, vermöge welcher die Gleichung 1) auf eine Hauptgleichung reduziert wird, besitzt jedenfalls die Form:

67) $$x = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4,$$

wobei nun

11) $$y = p\eta_1 + q\eta_2$$

zu setzen ist. Aber das Ergebnis kann nach den Auseinandersetzungen in Abschnitt 4) umgestaltet werden in

68) $$x = A\eta_1^2 + B\eta_2^2 + D\eta_1 + E\eta_2 + F,$$

wobei die $A$ bis $F$ rational aus $a_1$ bis $a_5$ zusammengesetzt sind und ausserdem neben der Quadratwurzel aus der Discriminante der Gleichung 1) die in Abschnitt 2 erwähnte accessorische Irrationalität enthalten. Mit $a_1$ verschwindet gleichzeitig $F$, mit $a_2$ verschwinden $A$ und $B$, das heisst, man kommt zur Hauptgleichung zurück (vergl. A. 14 und 15).

### 15. Die Differentialresolvente der Ikosaedergleichung.

Man frage nach der linearen Differentialgleichung (Differentialresolvente) zweiter Ordnung, welche die Veränderlichen $y_1$ und $y_2$ als Fundamentalintegrale besitzt, das heisst also, nach der Differentialgleichung, welcher die Wurzeln des Gleichungssystems:

69) $$f(y_1, y_2) = k \quad \text{und} \quad H(y_1, y_2) = u$$

genügen, unter $f, H$ die Formen 35) und 38), unter $k$ eine Konstante und unter $u$ die unabhängige Veränderliche verstanden. Es ergiebt sich unmittelbar:

$$20\,T\frac{dy_1}{du} = \frac{\partial f}{\partial y_2},$$

$$20\,T\frac{dy_2}{du} = -\frac{\partial f}{\partial y_1},$$

wobei sich $T$ als Funktionaldeterminante von $f$ und $H$ herausstellt und ausgeführt mit dem Ausdruck 40) zusammenfällt.

Eine nochmalige Differentiation nach $u$ liefert:

$$T^2 \frac{d^2 y_i}{du^2} = - T \frac{dT}{du} \cdot \frac{dy_i}{du} - \frac{11}{400} H' y_i, \qquad (i = 1, 2)$$

wo $H'$ die Hessesche Determinante von $f$ wird und ausgerechnet genau mit dem früheren $H$ übereinstimmt, weshalb auch der Strich wieder unterdrückt werden kann. Beachtet man die Identität:

$$43) \qquad T^2 = 12^3 f^5 - H^3$$

und ersetzt $u$ durch $H$, so gelangt man zur Differentialresolvente der Ikosaedergleichung:

$$70) \qquad (12^3 f^5 - H^3) \frac{d^2 y}{dH^2} - \frac{3}{2} H^2 \frac{dy}{dH} + \frac{11}{400} H y = 0,$$

welche $y_1$ und $y_2$ als partikuläre Integrale besitzt.

Führt man den Ikosaederparameter

$$53) \qquad J = \frac{H^3}{12^3 f^5}$$

als neue Veränderliche ein, dann entsteht die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe:

$$71) \qquad J(1-J) \frac{d^2 y}{dJ^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1) J] \frac{dy}{dJ} - \alpha \beta y = 0,$$

in welcher die Elemente $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ folgende Werte haben:

$$72) \qquad \alpha = \frac{11}{60}, \quad \beta = - \frac{1}{60}, \quad \gamma = \frac{2}{3},$$

und damit ist alles in wohlbekannte Bahnen geleitet.

Streifen wir auch kurz die Verallgemeinerung, welcher der obige Ansatz fähig ist.

Es mögen $f$ und $H$ irgend zwei homogene rationale Funktionen der Veränderlichen $y_1$ und $y_2$ vorstellen, und man setze wie oben die beiden Gleichungen 69) an. Jedenfalls existiert jetzt eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, für welche $y_1$ und $y_2$ zwei wesentlich verschiedene partikuläre Integrale vorstellen; es frägt sich nur, wie $f$ und $H$ beschaffen sein müssen, damit die Koeffizienten dieser Differentialgleichung rationale Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $u = H$ werden.

Setzt man $f$ vom Grade $n$ voraus, so liefert derselbe Differentiationsprozess wie vorhin die Beziehung:

$$73) \qquad G^2 \frac{d^2 y}{du^2} + \frac{1}{2} \frac{dG^2}{du} \cdot \frac{dy}{du} + \frac{F}{n-1} y = 0,$$

wobei

$$74) \qquad F = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} \end{vmatrix}, \quad G = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial f}{\partial y_2} \\ \frac{\partial H}{\partial y_1} & \frac{\partial H}{\partial y_2} \end{vmatrix}.$$

Lässt man nun $F$ mit $H$ bis auf einen numerischen Faktor zusammenfallen und berücksichtigt nur solche Fälle, in denen $G^2$ rational

durch $f = k$ und $H = u$ ausdrückbar wird, so stellt 73) in der That die gewünschte Differentialresolvente des vorliegenden Formenproblems dar. Fälle der gedachten Art können aber, wie von anderer Seite her bekannt ist, wirklich eintreten, und zwar kommen hier dreigliedrige Identitäten von der Form:

$$75)\qquad G^2 = \lambda H^3 + \mu f^\nu$$

in Frage. Da $f$ vom $n^{\text{ten}}$, $H$ vom $2(n-2)^{\text{ten}}$, $G$ vom $3(n-2)^{\text{ten}}$ Grade ist, so bestimmt sich die ganze positive Zahl $\nu$ durch

$$76)\qquad \nu = \frac{6(n-2)}{n},$$

und es ergeben sich für $n = 3, 4, 6, 12$, das heisst $\nu = 2, 3, 4, 5$ die einzig möglichen und wirklich vorhandenen Fälle. Insbesondere gelangt man zu den Formen der regulären Polyeder mit ihren Resolventen und erzielt eine definitive Auflösung durch die hypergeometrische Reihe, deren Elemente die Werte:

$$77)\qquad \alpha = \frac{n-1}{6(n-2)},\quad \beta = \frac{-1}{6(n-2)},\quad \gamma = \frac{2}{3}$$

haben (vergl. A. 12).

Unser Ansatz lässt sich auch auf ternäre Formen ausdehnen, sobald das volle Formensystem durch die Originalform und drei zugehörige Kovarianten abgeschlossen ist. Es erscheint zweckmässig, das Problem dadurch zu reduzieren, dass man eine der Formen der Null gleich setzt, eine Beschränkung, deren nachträgliche Aufhebung möglich und besonders bemerkenswert ist. Verschwindet die Originalform, so findet zwischen den drei Kovarianten eine dreigliedrige Identität statt, genau wie bei binären Formen, und zwar ergiebt sich, wenn $n$ den Grad der Originalform bezeichnet, der Exponent $\nu$ der ersten Kovariante aus

$$78)\qquad \nu = \frac{2(4n-9)}{n-2},$$

weshalb hier nur die Fälle $n = 3, 4$, das heisst $\nu = 6, 7$ möglich sind.

Thatsächlich erledigt man auf diese Weise die ternären kubischen Formen ganz allgemein, dann die besondere Form:

$$\varphi = y_1^n + y_2^n + y_3^n$$

und endlich jene ternäre biquadratische Form:

$$\varphi = y_1^3 y_2 + y_2^3 y_3 + y_3^3 y_1,$$

welche der linearen Substitutionsgruppe vom 168. Grade angehört.

Die Differentialresolventen werden entsprechend von der dritten Ordnung, und man gewinnt, was die letzte Form angeht, sehr leicht jene Differentialgleichung, welche Brioschi und Hurwitz unter anderen Gesichtspunkten in den Math. Annalen, XXVI. Bd. S. 106 und 117 gefunden haben. — Wir wollen indessen diese abseits liegenden Fragen hier nicht weiter verfolgen.

### 16. Die Resolventen der $\eta$ höheren Grades.

In den folgenden drei Abschnitten sollen einige Fragen erledigt werden, die zwar nicht die Gleichungen fünften Grades, wohl aber die Transformationstheorie, beziehentlich die $\eta$-Resolventen im allgemeinen betreffen.

Am Schlusse des dritten Abschnitts haben wir bereits angedeutet, dass man zwei in der Form völlig übereinstimmende Gleichungen $(2n+1)^{\text{ten}}$ Grades mit einem wesentlichen Parameter durch die Integrale:

$$79)\qquad h_i = \varkappa \int_0^{\zeta_i} [\zeta_i(1-\zeta_i)]^n d\zeta_i \qquad (i=1,2)$$

definieren kann. Wir wählen $\varkappa$ so, dass mit $\zeta_i = 1$ gleichzeitig $h_i = 1$ werde, mithin

$$80)\qquad 1 = \varkappa \int_0^1 [\zeta(1-\zeta)]^n d\zeta,$$

das heisst:

$$\varkappa = \frac{(2n+1)!}{n!\,n!}.$$

Diese allgemeinen $\zeta$-Resolventen sind dann durch die Beziehung

$$7)\qquad \zeta_1 + \zeta_2 = 1$$

aneinander gebunden, und ihre absoluten Parameter sind Komplemente, also

$$5)\qquad h_1 + h_2 = 1.$$

Für $\zeta_i = \eta_i^{-1}$ gelangen wir zu den verallgemeinerten $\eta$-Resolventen, die im Falle $n=2$ genau mit den betreffenden Resolventen fünften Grades zusammenfallen und mittelst

$$4)\qquad \eta_1\eta_2 = \eta_1 + \eta_2$$

ineinander transformiert werden können. Die Form einer solchen $\eta$-Resolvente ist:

$$81)\qquad h\eta^{2n+1} + \alpha_n\eta^n + \alpha_{n-1}\eta^{n-1} + \cdots + \alpha_1\eta + \alpha_0 = 0,$$

wobei die $\alpha$ nur von $n$ abhängen, während die $n$-Koeffizienten der Potenzen $\eta^{2n}$ bis $\eta^{n+1}$ überhaupt nicht vorhanden sind.

Aus den $\eta$-Resolventen lässt sich vermöge

$$11)\qquad y = p\eta_1 + q\eta_2$$

eine allgemeinere Resolvente mit drei Parametern zusammensetzen, in welcher die Potenzen $y^{2n}$ bis $y^{n+1}$ fehlen, und zwar deckt sich bei den Gleichungen fünften Grades diese Resolvente mit der Hauptgleichung; bei den Gleichungen höheren Grades erreicht man eine entsprechend allgemeine Form natürlich nicht.

Es möge noch die symmetrische homogene Resolvente Platz finden, welcher das Verhältnis der beiden $\eta$ genügt. Sie lautet (vergl. Nr. 13):

$$82)\left\{\begin{array}{l} h_1\left[\eta_1^{2n+1}+\binom{2n+1}{1}\eta_1^{2n}\eta_2+\cdots+\binom{2n+1}{n}\eta_1^{n+1}\eta_2^{n}\right] \\ -h_2\left[\eta_2^{2n+1}+\binom{2n+1}{1}\eta_1\eta_2^{2n}+\cdots+\binom{2n+1}{n}\eta_1^{n}\eta_2^{n+1}\right]\end{array}\right\}=0$$

und geht aus

$$(\eta_1+\eta_2)^n=0$$

hervor, falls die ersten $(n+1)$ Glieder mit dem Faktor $h_1$, die letzten $(n+1)$ Glieder mit den Faktor $-h_2$ versehen werden.

Auch die Resolvente von Brioschi findet hier ihr Seitenstück. Setzt man wie in Abschnitt 12:

$$83)\qquad \zeta_1=\frac{1}{2}(1-v),\quad \text{resp. } \zeta_2=\frac{1}{2}(1+v),$$

so entsteht:

$$h_1=-\frac{\varkappa}{2^{2n+1}}\int_1^v[1-v^2]^n dv,\quad \text{resp. } h_2=\frac{\varkappa}{2^{2n+1}}\int_{-1}^v[1-v^2]^n dv;$$

aber diese beiden Gleichungen sind wegen der Bedingung 5) voneinander nicht verschieden, sie können zusammengefasst werden in

$$84)\qquad \int_0^v[1-v^2]^n dv=\frac{2^{2n}(1-2h_1)}{\varkappa}=\frac{2^{2n}(2h_2-1)}{\varkappa},$$

und dieses ist die betreffende Resolvente $(2n+1)^{\text{ten}}$ Grades, in welcher gerade Potenzen nicht vorkommen, abgesehen vom Absolutglied, welches den wesentlichen Parameter der Gleichung bildet. Der Übergang zu den $\eta$-Resolventen wird durch

$$85)\qquad v=\frac{\eta_1-2}{\eta_1}=\frac{2-\eta_2}{\eta_2}$$

vermittelt. — Bildet man die Ableitungen von $h$ nach $\zeta$, $\eta$ oder $v$, so erhält man natürlich binomische Ausdrücke, weshalb auch die Diskriminanten aller dieser speziellen Resolventen die Gestalt eines Binoms erlangen.

### 17. Resolventen der $\eta$ vom siebenten Grade.

Betrachten wir kurz den Fall $n=3$. Aus 79) ergiebt sich für $\zeta_1=\eta_1^{-1}$ unmittelbar:

$$86)\qquad h_1\eta_1^7=35\eta_1^3-84\eta_1^2+70\eta_1-20,$$

und hieraus leitet man mittelst 4) noch die simultanen Resolventen:

$$87)\qquad \left\{\begin{array}{l} h_1\eta_1^6\eta_2=35\eta_1^2-49\eta_1+\eta_2+20, \\ h_1\eta_1^5\eta_2^2=\eta_2^2+35\eta_1+5\eta_2-20, \\ h_1\eta_1^4\eta_2^3=\eta_2^3+4\eta_2^2+10\eta_2+20 \end{array}\right.$$

ab; andere entsprechende ergeben sich durch gleichzeitige Vertauschung von $\eta_1$ mit $\eta_2$ und $h_1$ mit $h_2$.

Die Resolvente in $v$ wird nach 84):

88) $$5v^7 - 21v^5 + 35v^3 - 35v + 16(1 - 2h_1) = 0.$$

Bestimmen wir nun die Koeffizienten einer Gleichung:

89) $$y^7 + 7ay^3 + 7by^2 + 7cy + d = 0$$

derartig, dass ihr die lineare Verbindung

11) $$y = p\eta_1 + q\eta_2$$

genügt. Genau dieselben Prinzipien, welche wir bei den Gleichungen fünften Grades (vergl. Abschnitt 5) in Anwendung brachten, liefern hier:

90) $$\left\{\begin{aligned} & p^4h_1^{-1} + q^4h_2^{-1} = -\frac{1}{5}a, \\ & p^4h_1^{-1}(3p - 5q) - q^4h_2^{-1}(5p - 3q) = \frac{1}{4}b, \\ & p^4h_1^{-1}(p^2 - 4pq + 5q^2) + q^4h_2^{-1}(5p^2 - 4pq + q^2) = -\frac{1}{10}c, \\ & \left\{\begin{aligned} & p^4h_1^{-1}(p^3 - 7p^2q + 21pq^2 - 35q^3) \\ & - q^4h_2^{-1}(35p^3 - 21p^2q + 7pq^2 - q^3) = \frac{1}{20}d, \end{aligned}\right. \end{aligned}\right.$$

und nimmt man die Koeffizienteu $a, b, c, d$ als gegeben an, so lassen sich die Grössen $h_1, h_2; p, q$ leicht berechnen. Aus den ersten beiden Gleichungen ergiebt sich:

91) $$h_1 = -\frac{160p^4(p-q)}{4a(5p-3q)-5b}, \quad h_2 = -\frac{160q^4(p-q)}{4a(3p-5q)+5b};$$

führt man diese Werte in die letzten beiden Gleichungen ein und setzt:

16) $$p - q = \sqrt{r}, \quad p + q = s,$$

so folgt:

92) $$20ar + 5bs - 4c = 0 \quad \text{und} \quad 10br + 10cs - d = 0,$$

woraus:

93) $$r = \frac{1}{10}\cdot\frac{bd-8c^2}{b^2-4ac}, \quad s = -\frac{2}{5}\cdot\frac{ad-2bc}{b^2-4ac}.$$

Infolgedessen gehen die Ausdrücke für die absoluten Parameter über in:

94) $$\left\{\begin{aligned} h_1 &= -\frac{10(s+\sqrt{r})^4\cdot\sqrt{r}}{4a(s+4\sqrt{r})-5b}, \\ h_2 &= +\frac{10(s-\sqrt{r})^4\cdot\sqrt{r}}{4a(s-4\sqrt{r})-5b}; \end{aligned}\right.$$

sie sind also einander konjugiert und führen, in die Gleichung:

5) $$h_1 + h_2 = 1$$

eingesetzt, zu jener rationalen Bedingungsgleichung zwischen den Koeffizienten der Gleichung 89), unter welcher diese in die $\eta$-Resolventen siebenten Grades transformiert werden kann. — Berücksichtigt man die Beziehungen 11), 16) und 85), dann gelangt man zu

95) $$y = 2\frac{s+v\sqrt{r}}{1-v^2},$$

womit die Gleichung 89) auf 88) reduziert ist.

Die Auflösung der speziellen Resolventen in $\eta$ und $v$ soll hier nicht weiter verfolgt werden; es möge aber noch jene Resolvente siebenten Grades mitgeteilt werden, welche unter transformationstheoretischen Gesichtspunkten jener fünften Grades von Gordan und Klein entspricht (vergl. Abschnitt 13). Sie wird charakterisiert durch $q = p$, das heisst ihr genügt:

96) $$y = p(\eta_1 + \eta_2) = p\eta_1\eta_2 = \frac{4p}{1-v^2},$$

und ihre Form ist:

97) $$h_1 h_2 y^7 - 35p^4y^3 - 56p^5y^2 - 140p^6y - 400p^7 = 0,$$

oder einfacher, z. B. für $p = \frac{1}{2}$,

98) $$Ky^7 - 35y^3 - 28y^2 - 35y - 50 = 0,$$

wobei $K = 16h_1h_2$ den einzigen wesentlichen Parameter vorstellt.

### 18. Resolventen der $\eta$ für die Gleichung sechsten Grades.

Verlangt man von der Hauptgleichung sechsten Grades:

99) $$y^6 + 6ay^3 + 6by^2 + 6cy + d = 0,$$

dass sie die wesentliche Eigenschaft einer $\eta$-Resolvente annehmen, das heisst, dass sie vermöge der Substitution:

$$yz = y + z$$

in eine Gleichung derselben Form übergehe, so bleiben nur noch zwei Parameter willkürlich, wie denn auch eine Reduktion der Gleichung sechsten Grades auf eine Resolvente mit nur einem Parameter bisher nie erreicht worden und höchstwahrscheinlich unmöglich ist. Indem wir des weiteren ähnlich wie in Abschnitt 3 vorgehen und die $y$, $z$ mit $\eta_1$, $\eta_2$ vertauschen, gelangen wir zu folgenden $\eta$-Resolventen:

100) $$\begin{cases} \alpha) & h_1\eta_1^6 - 10(1+g)\eta_1^3 + 15(2+g)\eta_1^2 \\ & \quad - 6(5+g)\eta_1 + 10 = 0, \\ \beta) & h_2\eta_2^6 - 10(1-g)\eta_2^3 + 15(2-g)\eta_2^2 \\ & \quad - 6(5-g)\eta_2 + 10 = 0, \end{cases}$$

wobei

101) $$h_1 = \frac{1}{2}(h+g), \quad h_2 = \frac{1}{2}(h-g)$$

und

4) $$\eta_1\eta_2 = \eta_1 + \eta_2.$$

Die Grössen $g$ und $h$ oder auch $g$, $h_1$, $h_2$; letztere jedoch mit der Bedingung:

102) $$h_1 - h_2 = g$$

sind die absoluten Parameter. Indem $g$ einfach das Vorzeichen wechselt, verwandelt sich eine Resolvente in die andere.

Man kann sich noch die simultanen Resolventen mit $\eta_1^5\eta_2$, $\eta_1^4\eta_2^2$, etc. verschaffen und sodann mittelst:

$$11)\qquad y = p\eta_1 + q\eta_2$$

eine neue Gleichung, die Hauptresolvente, zusammensetzen, welche genau so allgemein ist wie 99). Wir unterlassen es, die weitere Rechnung durchzuführen, da eine Auflösung der einen oder anderen Resolvente zur Zeit nicht geleistet werden kann. Immerhin dürften obige Resolventen vom Gesichtspunkte der Transformationstheorie aus Interesse gewähren.

Um hier nur eines zu erwähnen, sei auf die Jerrard-Transformation hingewiesen, vermöge welcher die reduzierte Form:

$$103)\qquad y^6 + 6by^2 + 6cy + d = 0$$

hergestellt wird. Verschwindet nämlich $a$, so ist in der Hauptgleichung $\Sigma y^3 = 0$; anderseits ist in der Hauptresolvente:

$$\Sigma y^3 = p^3 \Sigma \eta_1^3 + q^3 \Sigma \eta_2^3 = 30[p^3 h_1^{-1}(1+g) + q^3 h_2^{-1}(1-g)],$$

und hier kann die Klammergrösse dadurch annulliert werden, dass man das Verhältnis $p:q$ aus einer rein kubischen Gleichung bestimmt (vergl. Abschnitt 9).

Von den simultanen Resolventen seien zwei angeführt, die sich durch ihre Symmetrie auszeichnen und daher sofort eine Verallgemeinerung auf den Grad $2n$ zulassen. Die eine lautet:

$$104)\qquad \begin{cases} h_1\eta_1^6 + 6h_1\eta_1^5\eta_2 + 15h_1\eta_1^4\eta_2^2 + 10(h_1 + h_2 - 1)\eta_1^3\eta_2^3 \\ \qquad + 15h_2\eta_1^2\eta_2^4 + 6h_2\eta_1\eta_2^5 + h_2\eta_2^6 = 0; \end{cases}$$

sie ist homogen in den $\eta$, aber nicht homogen in den $h$, und sie hängt deshalb im Gegensatz zu der entsprechenden Gleichung fünften Grades (vergl. Abschnitt 4) von zwei Parametern ab.

Die andere hat folgende Gestalt:

$$105)\qquad h_1\eta_1^3 + h_2\eta_2^3 + 3h_1\eta_1^2 + 3h_2\eta_2^2 + 6h_1\eta_1 + 6h_2\eta_2 - 20 = 0$$

und repräsentiert eine Kurve dritter Ordnung, welche mit der in 4) enthaltenen Hyperbel

$$\eta_1\eta_2 - \eta_1 - \eta_2 = 0$$

sechs Schnittpunkte liefert, entsprechend den sechs Wurzeln der einen oder anderen $\eta$-Resolvente.

Bemerkenswert sind gewisse spezielle $\eta$-Resolventen mit nur einem Parameter, z. B. jene für $g = \pm 1$ oder $h = \pm 1$ u. s. f. Auf erstere wird man geführt, wenn man gleich anfangs von einer Gleichung sechsten Grades mit $a = 0$ ausgeht, und aus ihnen können mittelst der Substition 11) neue Resolventen zusammengesetzt werden, die indessen allesamt mangels eines zweiten Parameters nur Sonderfälle der Hauptgleichung 99) vorstellen.

# Loci of the equations $p = \varphi^u e$ and $p = \varphi^u \psi^v e$.

By

E. W. Hyde,

Cincinnati, Ohio, U. S. A.

---

We will consider the significance of these equations in two and three dimensional space, beginning with the former.

The letter $p$ represents a variable point generating a locus, $\varphi$ and $\psi$ are linear point functions, $e$ is a fixed point, and $u$ and $v$ are scalar functions of $x$ and $y$ respectively, which are real scalar variables.

Let $e_0$, $e_1$, $e_2$ be reference points for two dimensional space, and let us write

1) $$e = n_0 e_0 + n_1 e_1 + n_2 e_2,$$

the $n$'s being scalar. $\varphi$ will be defined by the equation

2) $$\varphi() = A_0 e_0 \cdot e_0|() + A_1 e_1 \cdot e_1|() + A_2 e_2 \cdot e_2|(),$$

in which the $A$'s are scalar; so that

3) $$p = \varphi^u e = A_0{}^u n_0 e_0 + A_1{}^u n_1 e_1 + A_2{}^u n_2 e_2 = \sum_0^2 A^u n e.$$

We will first treat the case when $u = x$, and afterwards consider cases when $u$ is such a function of $x$ that some of its values are imaginary.

Only real values of $x$ will be considered. We are then first to discuss the equation

4) $$p = \varphi^x e = \sum_0^2 A^x n e.$$

In this equation $p$ cannot be a unit point, for this would require that the condition $\sum_0^2 A^x n = 0$ should be satisfied, which would not allow the variation of $x$. When $x = 0$, $p = e$, so that the curve always passes through $e$.

Differentiating 4) we have

5) $$\frac{dp}{dx} = (\varphi^x \log \varphi) e = \sum_0^2 (A^x n e \log A).$$

If $p$ were a *unit* point, $\frac{dp}{dx}$ would be a point at $\infty$ on the tangent line to the locus, i. e. a vector $\|$ to the tangent at $p$, but as the *weight* as well as the position of $p$ varies, $\frac{dp}{dx}$ is some finite point on the tangent line. The tangent line will therefore be

$$6)\quad \begin{cases} p\frac{dp}{dx} = \varphi^x e \cdot (\varphi^x \log \varphi) e \\ = A_0{}^x A_1{}^x n_0 n_1 \log \frac{A_1}{A_0} \cdot e_0 e_1 + A_1{}^x A_2{}^x n_1 n_2 \log \frac{A_2}{A_1} \cdot e_1 e_2 \\ + A_2{}^x A_0{}^x n_2 n_0 \log \frac{A_0}{A_2} \cdot e_2 e_0. \end{cases}$$

The tangent line cuts the sides $e_1 e_2$, $e_2 e_0$, $e_0 e_1$ of the reference triangle in the three points

$$7)\quad \begin{cases} p\frac{dp}{dx}\Big| e_0 = A_1{}^x n_1 \log \frac{A_1}{A_0} \cdot e_1 - A_2{}^x n_2 \log \frac{A_0}{A_2} \cdot e_2 \\ p\frac{dp}{dx}\Big| e_1 = A_2{}^x n_2 \log \frac{A_2}{A_1} \cdot e_2 - A_0{}^x n_0 \log \frac{A_1}{A_0} \cdot e_0 \\ p\frac{dp}{dx}\Big| e_2 = A_0{}^x n_0 \log \frac{A_0}{A_2} \cdot e_0 - A_1{}^x n_1 \log \frac{A_2}{A_1} \cdot e_1 \end{cases}$$

If $Up$ designate the unit of $p$, then $Up = \varphi^x e \div \sum_0^2 A^x n$,

$$8)\quad \frac{d\,Up}{dt} = \frac{B_0(e_2 - e_1) + B_1(e_0 - e_2) + B_2(e_1 - e_0)}{(\Sigma A^x n)^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

in which $B_0$, $B_1$, $B_2$ are the coefficients of $e_1 e_2$, $e_2 e_0$, $e_0 e_1$, respectively, in equation 6). $\frac{d\,Up}{dt}$ is the velocity of $p$ as it generates the curve.

We will now apply these results to the determination of the nature of the curve. In the first place the $A$'s must always be positive in order to exclude imaginary points, and we shall assume for convenience

$$A_0 < A_1 < A_2$$

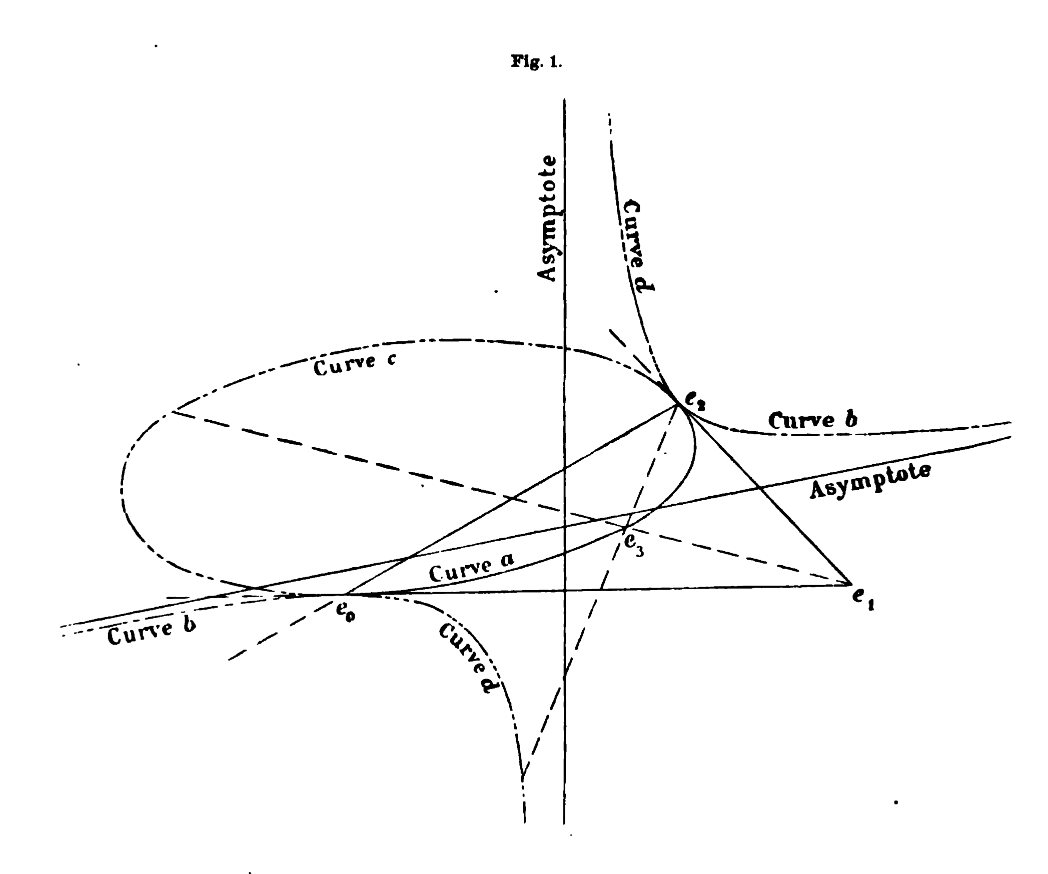
which simply arranges the curve in a certain way as regards the reference triangle. If the $n$'s are all positive $e$ is inside the reference triangle; if $n_0$ is negative $e$ has passed outside the triangle. In fact the four points

$$e_0, \quad \Sigma ne, \quad n_1 e_1 + n_2 e_2 \quad \text{and} \quad -n_0 e_0 + n_1 e_1 + n_2 e_2$$

form a harmonic range, so that, if the curve be constructed with positive values of the $n$'s, the other cases may all be found from this. If $n_0$ be negative draw any ray $e_0 \varepsilon$, $\varepsilon$ being some vector, cutting the curve already constructed in $p$, and the side $e_1 e_2$ in $e_0 \varepsilon \cdot e_1 e_2$; then the fourth harmonic to $e_0$, $p$, $e_0 \varepsilon \cdot e_1 e_2$ will be a point of the locus required. The same method of course applies *mutatis mutandis* when $n_1$ or $n_2$ is negative.

Case ($a$) [see Fig. 1]. The $n$'s all positive. When $x \doteq -\infty$, $A_1^x$ and $A_2^x$ become indefinitely small compared with $A_0^x$ and hence $p$ approaches indefinitely near to $e_0$ which is its limiting position. When $x = 0$, $p = e$. When $x \doteq \infty$, $A_2^x$ becomes indefinitely larger than $A_0^x$ or $A_1^x$, and hence $p$ approaches coincidence with $e_2$. This includes the whole range of real values of $x$, so that $p$ never goes outside the reference triangle, but starts from $e_0$ and stops at $e_2$. By eq. 6) the

Fig. 1.




tangent lines at $e_0$ and $e_2$ are $e_0 e_1$ and $e_1 e_2$ respectively. By eqs. 7) the tangent line cuts $e_1 e_2$ between $e_1$ and $e_2$, $e_0 e_1$ between $e_0$ and $e_1$, and $e_2 e_0$ at some point *not* between $e_2$ and $e_0$. Eq. 8) shows that the velocity of $p$ approaches zero near $e_0$ or $e_2$, as must evidently be the case. The curve is shown in Fig. 1, $e$ being taken as the centroid of the triangle.

Case ($b$): $n_0$ negative. The curve will be as shown in Fig. 1. It has an asymptote parallel to the line joining $e_0$ with the point where the curve ($a$) is cut by the line $(e_0 + e_1)(e_2 + e_0)$.

Case ($c$): $n_1$ negative. The curve will have three forms according as the curve ($a$) cuts the line $(e_0+e_1)(e_1+e_2)$ in two real, coincident, or imaginary points. The last form is shown in Fig. 1. In the first form the curve has two branches, and two real asymptotes parallel to the lines joining $e_1$ with the points where the curve ($a$) cuts the line $(e_0+e_1)(e_1+e_2)$. The second form is parabolic, and has a double point at infinity on the line joining $e_1$ with the point of contact of the curve ($a$) with the line $(e_0+e_1)(e_1+e_2)$.

Case ($d$): $n_2$ negative. The curve is of similar character to the curve ($b$). It has an asymptote parallel to the line joining $e_2$ with the point where the curve ($a$) cuts the line $(e_1+e_2)(e_2+e_0)$, as shown in Fig. 1.

Let us now consider the case when $u$ in eq. 3) is some function of $x$. If it is such a function that $u$ may have all values from $-\infty$ to $+\infty$, then the locus of $p$ will be the same as when $u=x$, though a part, or the whole of the curve may be repeated two or more times. If however $u$ is a function some values of which are impossible, then the locus of $p$ will be a portion of one of the curves already discussed. Suppose for instance, that we have

$$u=\sin x, \quad \text{or } u=\sec x, \quad \text{or } u=\sqrt{a^2-x^2}.$$

In the first case $u$ cannot be greater than 1 nor less than $-1$, and hence the locus is that portion of the curves already considered lying between the points $\varphi e$ and $\varphi^{-1}e$. In the second case $u$ has all values except those between $-1$ and $+1$, and hence the curve consists of two parts, one extending from $e_0$ to $\varphi^{-1}e$ and the other from $\varphi e$ to $e_2$. In the third case the curve only extends from $\varphi^{-a}e$ to $\varphi^a e$. If we assume

$$9) \qquad u=mx\pm k\sqrt{-(x^2-a_1^2)(x^2-a_1^2)\dots(x^2-a_n^2)};$$

then $m$ and $k$ can be so taken that $u$ will be now real, now imaginary, in succession, and the locus of $p$ will consist of a series of disconnected portions.

For instance, if

$$u=x\pm\frac{1}{100}\sqrt{(x^2-1)(x^2-4)(9-x^2)}$$

the curve will consist of three parts extending respectively from a point very near to $\varphi^{-3}e$ to one very near to $\varphi^{-2}e$, from one very near to $\varphi^{-1}e$ to one very near to $\varphi e$, and from one very near to $\varphi^2 e$ one very near to $\varphi^3 e$.

We will next consider the corresponding equation in three-dimensional space, viz.

$$10) \qquad p=\varphi^u e=\sum_0^3 A^u ne.$$

As before we treat first the case when $u = x$, and have, for the tangent at $p$, the line

$$11)\quad p\frac{dp}{dx} = \varphi^x e\,(\varphi^x \log\varphi)e = \sum\left(A_l^x A_k^x n_l n_k \log\frac{A_k}{A_l}\cdot e_l e_k\right),$$

in which $l$ and $k$ are to have all values from 0 to 3. Of course terms in which $l = k$ will disappear, because $e_k e_k = 0$. The point where the tangent line pierces the reference plane $e_1 e_2 e_3$ is

$$12)\quad p\frac{dp}{dx}\Big| e_0 = A_1^x n_1 \log\frac{A_1}{A_0}\cdot e_1 + A_2^x n_2 \log\frac{A_2}{A_0}\cdot e_2 + A_3^x n_3 \log\frac{A_3}{A_0}\cdot e_3;$$

and the points where the tangent pierces the other faces of the reference tetrahedron may be found from this by cyclic permutation of the suffixes.

If $A_0 < A_1 < A_2 < A_3$, the curve will start at $e_0$, when $x = -\infty$, in the direction of $e_0 e_1$, and reach $e_3$, when $x = \infty$, in the direction of $e_2 e_3$.

As in the previous case the nature of the curve will depend on the location of the fixed point $e$, i. e. on the signs of the $n$'s. If $e$ is inside the reference tetrahedron, the curve will be wholly within this tetrahedron; and in any case $p$ will be confined to the same region of space which contains $e$, if we understand by a region of space the locus of all points abtained by assigning positive values to the $n$'s in such an expression as $n_0 e_0 - n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3$. There are eight such regions, and therefore eight curves, which are all harmonically related, so that, one being given, all the rest may be constructed from it. We will designate by $C$ the curve mentioned above for which $e$ is inside the tetrahedron $e_0 e_1 e_2 e_3$, and will use $C_0, \dots C_3$, $C_{01}$, $C_{02}$, $C_{03}$, to designate the others, the suffix indicating which term, or terms, of the value of $e$ is negative.

The curves $C_0$ and $C_3$ are of similar character, each having a single asymptote parallel, in one case, to the line joining $e_0$, with the point where $C$ pierces the plane $(e_0 + e_1)(e_0 + e_2)(e_0 + e_3)$, and in the other to the line joining $e_3$ with the point where $C$ pierces the plane

$$(e_3 + e_0)(e_3 + e_1)(e_3 + e_2).$$

The curves $C_1$ and $C_2$ are also of like character and have each two asymptotes, real, coincident or imaginary, according as the respective planes $(e_1 + e_2)(e_1 + e_3)(e_1 + e_0)$, or $(e_2 + e_3)(e_2 + e_0)(e_2 + e_1)$, cut the curve $C$ in two real, coincident, or imaginary points.

The curves $C_{01}$ and $C_{02}$ are of like character, each having a single asymptote whose direction may be thus found. Let $p_0$ be the point where $C$ pierces the plane $(e_0 + e_3)(e_3 + e_1)(e_1 + e_2)$, then the asymptote to $C_{01}$ is parallel to the line $p_0 e_0 e_1 \cdot p_0 e_2 e_3$. The direction of the asymptote of $C_{02}$ may be similarly found.

The curve $C_{03}$ has two real, coincident, or imaginary asymptotes according as the plane $(e_0 + e_1)(e_1 + e_3)(e_3 + e_2)$ cuts the curve $C$ in

two real, coincident, or imaginary points. If these points, when real, are $p_1$ and $p_2$, then the two asymptotes will be parallel to the lines

$$p_1 e_1 e_2 \cdot p_1 e_3 e_0 \quad \text{and} \quad p_2 e_1 e_2 \cdot p_2 e_3 e_0$$

respectively.

If we now give to $u$ the form of eq. 9); then, as in plane space, the curve will be made up of detached portions of the curve obtained when $u = x$, each portion being a double line, because, in general, the same value of $u$ is found from two different values of $x$.

If two $A$'s become equal in eq. 3), say $A_0 = A_1$, then the curve reduces to a straight line, in this case

$$(n_0 e_0 + n_1 e_1) e_2.$$

If $A_0 = A_1$ in eq. 10), that equation may be written

$$13) \qquad p = A_0^u (n_0 e_0 + n_1 e_1) + A_2^u e_2 + A_3^u e_3,$$

which represents a plane curve of the same kind as that of eq. 3), starting from $n_0 e_0 + n_1 e_1$ and ending at $e_3$.

If $u$ is of such form that its only real values lie between $-a$ and $+a$, say

$$a = a \sin x;$$

then the ends of the curve, $\varphi^{-a} e$ and $\varphi^a e$, may be chosen arbitrarily, so long as they are in the same region, as previously defined. For let

$$p_1 = \Sigma l e \quad \text{and} \quad p_2 = \Sigma m e$$

be two arbitrarily chosen points; then

$$p_1 = \Sigma l e = \varphi^{a \sin \frac{\pi}{2}} e = \varphi^a e = \Sigma A^a n e,$$

and

$$p_2 = \Sigma m e = \varphi^{a \sin \frac{3\pi}{2}} e = \varphi^{-a} e = \Sigma \frac{n}{A^a} e.$$

$\therefore \qquad l_0 = A_0^a n_0, \qquad l_1 = A_1^a n_1, \qquad$ etc.

and $\qquad m_0 = A_0^{-a} n_0, \qquad m_1 = A_1^{-a} n_1, \qquad$ etc.

$\therefore \qquad n_0 = \sqrt{l_0 m_0}, \qquad n_1 = \sqrt{l_1 m_1}, \qquad$ etc.

and $\qquad A_0 = \sqrt[2a]{\frac{l_0}{m_0}}, \qquad A_1 = \sqrt[2a]{\frac{l_1}{m_1}}, \qquad$ etc.

Thus real values of the $A$'s and $n$'s will be found whenever the corresponding $l$'s and $m$'s are of the same sign, i. e. when $p_1$ and $p_2$ are in the same region.

### Equation $p = \varphi^u \psi^v e$.

We will first consider the case when $u = x$, and $v = y$. Let

$$\varphi() = \sum_0^3 A_k e_k \cdot e_k | (), \quad \text{and} \quad \psi() = \sum_0^3 B_k e_k \cdot e_k | (),$$

while as before $e = \sum_0^3 n_k e_k$: then we are to discuss the equation

14) $$p = \varphi^x \psi^y e = \sum_0^3 A_k{}^x B_k{}^y n_k e_k.$$

This equation evidently represents a surface, since it contains two independent scalar variables. If $y$ be given any constant value $b_1$, while $x$ varies, the equation $p = \varphi^x \psi^{b_1} e$ is of the same kind as eq. 10) and therefore represents a curve of the species already discussed. If to $y$ be assigned a series of values $b_1 \ldots b_n$ a series of such curves will be obtained. Similarly by assigning constant values $a_1 \ldots a_n$ to $x$, while $y$ varies, a second series of curves will be obtained lying on the surface. Since the two curves $\varphi^{a_m} \psi^y e$ and $\varphi^x \psi^{b_n} e$ have the common point $\varphi^{a_m} \psi^{b_n} e$, every curve of the system $a$ will intersect every curve of the system $b$. Two curves of the same system can have no common point except the two points at which they all terminate. If the $n$'s are all positive the surface will be wholly within the reference tetrahedron, while if one or more of them be negative it will be wholly outside the same. The surfaces in the different regions of space are harmonically related as in the case of the curves.

Differentiating 14) we have the two points

$$\frac{\partial p}{\partial x} = (\varphi^x \psi^y \log \varphi) e \quad \text{and} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = (\varphi^x \psi^y \log \psi) e,$$

each of which is in the tangent plane to the surface at $p$: hence the plane is

15) $$P_t = \varphi^x \psi^y e (\varphi^x \psi^y \log \varphi) e (\varphi^x \psi^y \log \psi) e,$$

which cuts the edges of the reference tetrahedron at

$$P_t \cdot e_0 e_1, \quad P_t \cdot e_1 e_2 \quad \text{etc.}$$

We proceed to show that by a proper choice of values for the $A$'s and $B$'s equation 14) will represent a *ruled* surface.

Let us express $y$ in terms of $x$ and a new variable $z$ by the equation

16) $$y = mx + z.$$

Then
$$\left\{ \begin{aligned} p &= \varphi^x \psi^{mx+z} e = (\varphi \psi^m)^x \psi^z e = \sum_0^3 (AB^m)^x B^z n e \\ &= (A_0 B_0{}^m)^x \left[ B_0{}^z n_0 e_0 + \left( \frac{A_2 B_2{}^m}{A_0 B_0{}^m} \right)^x B_2{}^z n_2 e_2 \right] \\ &+ (A_1 B_1{}^m)^x \left[ B_1{}^z n_1 e_1 + \left( \frac{A_3 B_3{}^m}{A_1 B_1{}^m} \right)^x B_3{}^z n_3 e_3 \right]. \end{aligned} \right.$$

Let the $A$'s and $B$'s be now so taken that

$$\frac{A_2 B_2{}^m}{A_0 B_0{}^m} = \frac{A_3 B_3{}^m}{A_1 B_1{}^m} = 1;$$

then the equation of the surface becomes

17) $$p = A_0{}^x B_0{}^{mx} [B_0{}^z n_0 e_0 + B_2{}^z n_2 e_2] + A_1{}^x B_1{}^{mx} [B_1{}^z n_1 e_1 + B_3{}^z n_3 e_3].$$

If in 17) some constant value be assigned to $z$, while $x$ varies, $p$ will move along the straight line

$$(B_0{}^z n_0 e_0 + B_2{}^z n_2 e_2)(B_1{}^z n_1 e_1 + B_3{}^z n_3 e_3);$$

thus, by giving a series of values to $z$, a series of straight lines will be obtained lying wholly in surface between the lines $e_0 e_2$ and $e_1 e_3$, and the surface may be regarded as generated by the motion of a straight line terminating in these edges of the reference tetrahedron. It is therefore a *ruled*, and in fact a *skew* surface, wholly confined within the reference tetrahedron when the $n$'s are all positive, and bounded by the four sects $e_0 e_1$, $e_1 e_3$, $e_2 e_3$ and $e_2 e_0$.

If, using as before the relation 16), we assume

$$A_0 B_0{}^m = A_1 B_1{}^m = A_2 B_2{}^m,$$

equation 14) becomes

$$18)\qquad p = (A_0 B_0{}^m)^x \sum_0^2 B_k{}^z n_k e_k + (A_3 B_3{}^m)^x B_3{}^z e_3,$$

which represents a cone generated by a sect whose extremities are the point $e_3$ and the variable point $\sum_0^2 B^z ne$. Its vertex is therefore at $e_3$ and it is wholly within the tetrahedron.

The two sets of curves obtained from the equation $p = \varphi^x \psi^y e$, first by assigning various constant values to $x$ and then to $y$, may be arranged in three different ways as regards their terminal points.

1st The initial and terminal points of both sets may coincide.

2nd The two sets may have one terminal point in common, and the other different.

3d One set may have both of its terminals different from those of the other.

In any one of these cases the constants may be so taken as to make the surface a ruled surface.

Surfaces which from their equations, written in the form

$$p = \varphi^x \psi^y e$$

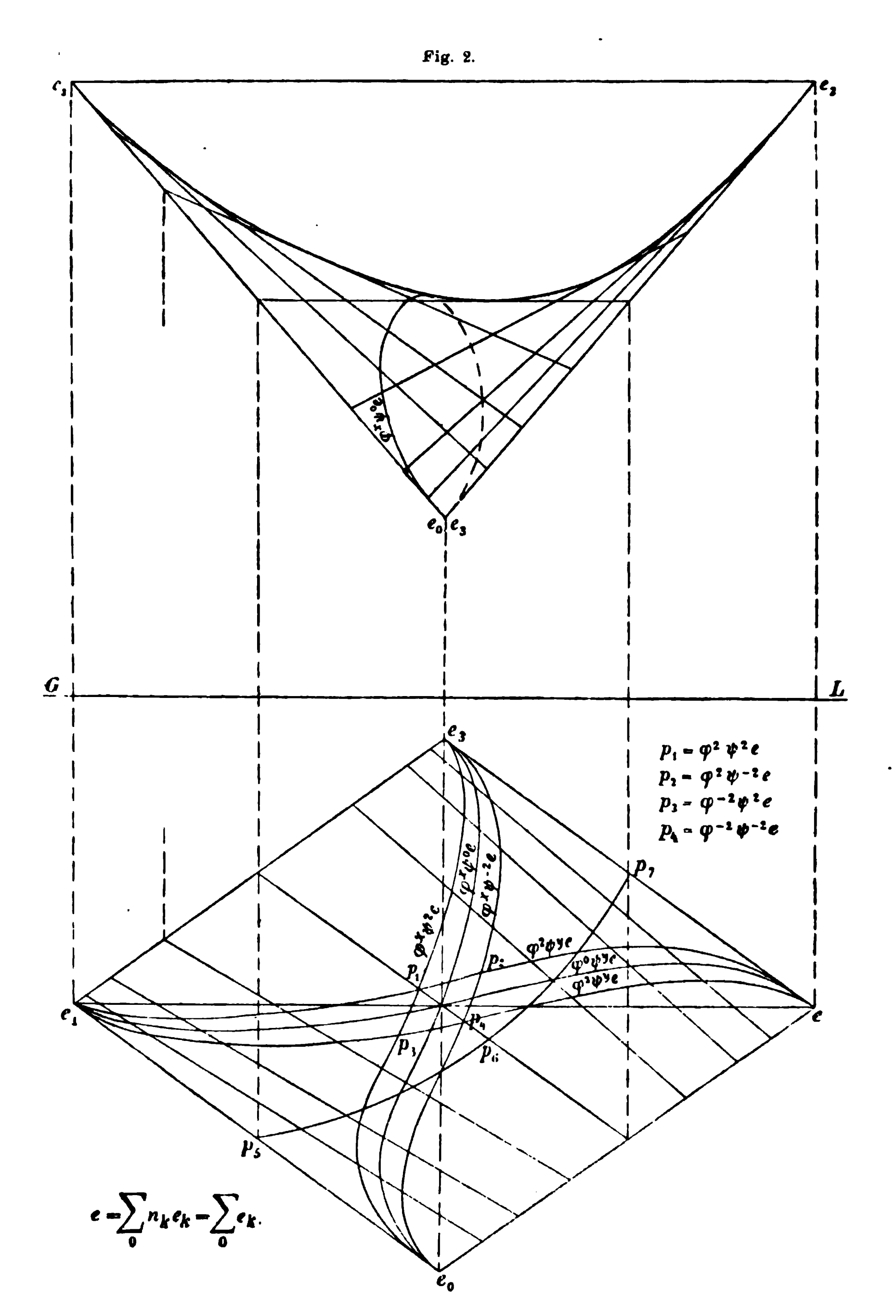
appear to be different, may in fact be identical, though the sets of curves $x = a_1, a_2 \ldots, y = b_1, b_2 \ldots$ will be different; for it appears from eq. 17) that, so long as the two ratios $\frac{B_2}{B_0}$ and $\frac{B_3}{B_1}$ remain unchanged, the rectilinear generators of the surface will be the same, and therefore the surface identical no matter what values be assigned to $A_0$, $B_0$, $A_1$ and $B_1$. Changes in these last however may affect materially the curves $x = a_1, a_2, \ldots, y = b_1, b_2, \ldots$ For instance the two equations

$$19)\qquad p = 1^x \cdot 9^y e_0 + 2^x \cdot 4^y e_1 + 3^x \cdot 3^y e_2 + 4^x \cdot 2^y e_3,$$

and

$$20)\qquad p = 1^x \cdot 3^y e_0 + 2^x \cdot 4^y e_1 + 3^x \cdot 1^y e_2 + 4^x \cdot 2^y e_3,$$

Fig. 2.




Curve $p_5 p_6 p_7$ is section by a horizontal tangent plane.

both represent the same surface, which is shown in figure 2, though the two systems of curves in 19) are conterminal, while those in 20) terminate in $e_0$ and $e_3$, and in $e_2$ and $e_1$ respectively.

Let us designate by $S$ the surface $\varphi^x\psi^y e$ when the $n$'s are all positive, by $S_0$ the surface when $n_0$ is negative and the other $n$'s positive, etc. All the surfaces will be wholly exterior to the reference tetrahedron except $S$, which is wholly interior. The surface $S_k$, $(k = 0, 1, 2, 3)$, will have an asymptotic surface of which a cone-director will be the cone whose vertex is at $e_k$ and whose directrix is the section of $S$ by the plane which bisects the three edges of the reference tetrahedron which meet in $e_k$. The surface $S_{01}$ will be asymptotic to a ruled surface whose generators are parallel to those of the skew surface whose directrices are $e_0e_1$, $e_2e_3$ and the section of $S$ by the plane which bisects the four edges $e_0e_2$, $e_0e_3$, $e_1e_2$ and $e_1e_3$. The other two surfaces of this kind $S_{02}$ and $S_{03}$ possess similar asymptotic properties obtained by simple interchanged of suffixes. If $S$ is a ruled surfaces one of these three bisecting planes of the tetrahedron will cut a generator from $S$, so that the director surface in this case will be of the second order.

We will consider now the more general case

$$p = \varphi^u\psi^v e$$

when $u = f_1 x$ and $v = f_2 x$. Suppose first

$$u = a\sin x, \quad v = b\sin y; \tag{21}$$

then all real values of $u$ lie between $a$ and $-a$, and all real values of $v$ between $b$ and $-b$, hence the surface is a curvilinear quadrilateral whose corners are at $\varphi^a\psi^b e$, $\varphi^a\psi^{-b}$, $\varphi^{-a}\psi^b e$, $\varphi^{-a}\psi^{-b}e$. If we write

$$u = a\sec x, \quad v = b\sec y,$$

we have the case just reversed, and the surface has a quadrilateral hole through it, the boundaries being the same as before. If

$$u = a\sin x, \quad v = b\sec y,$$

we have two triangular strips with corners at

$$\varphi^a\psi^b e,\ \ \varphi^u\psi^\infty e,\ \ \varphi^{-a}\psi^b, \text{ and at } \varphi^a\psi^{-b}e,\ \ \varphi^u\psi^{-\infty}e,\ \ \varphi^{-a}\psi^{-b}e,$$

respectively. Finally if

$$\left\{\begin{aligned} u &= mx \pm k\sqrt{-(x^2-a_1^2)(x^2-a_2^2)\dots(x^2-a_n^2)} \\ v &= m'y \pm k'\sqrt{-(y^2-b_1^2)(y^2-b_2^2)\dots(y^2-b_n^2)} \end{aligned}\right. \tag{22}$$

the surface may be broken up into a checkerboard pattern of separate real quadrilaterals with imaginary strips between them.

If $u$ and $v$ be as in eqs. 21), three corners of the quadrilateral may be arbitrarily chosen in the same region, when the fourth will be determined.

For let
$$\sum_0^3 \varkappa e,\quad \sum_0^3 \lambda e,\quad \sum_0^3 \mu e,\quad \sum_0^3 \nu e$$
be any four points whatever, and write

$$\varphi^{a\sin\frac{\pi}{2}}\psi^{b\sin\frac{\pi}{2}}e = \Sigma A^a B^b ne \quad = \Sigma\varkappa e,$$
$$\varphi^{a\sin\frac{\pi}{2}}\psi^{b\sin\frac{3\pi}{2}}e = \Sigma A^a B^{-b} ne \quad = \Sigma\lambda e,$$
$$\varphi^{a\sin\frac{3\pi}{2}}\psi^{b\sin\frac{\pi}{2}}e = \Sigma A^{-a} B^b ne \quad = \Sigma\mu e,$$
$$\varphi^{a\sin\frac{3\pi}{2}}\psi^{b\sin\frac{3\pi}{2}}e = \Sigma A^{-a} B^{-b} ne = \Sigma\nu e.$$
$$\therefore\ A_0{}^a B_0{}^b n_0 = \varkappa_0,\qquad A_0{}^a B_0{}^{-b} n_0 = \lambda_0,$$
$$A_0{}^{-a} B_0{}^b n_0 = \mu_0,\qquad A_0{}^{-a} B_0{}^{-b} n_0 = \nu_0,$$
with three other similar sets of equations for the coefficients of the other points. Hence
$$n_0{}^2 = \varkappa_0\nu_0 = \lambda_0\mu_0,$$
so that, if $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ are assumed $\nu$ is determined by them. We find also
$$A_0 = \left(\frac{\varkappa_0}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{2a}},\quad B_0 = \left(\frac{\varkappa_0}{\lambda_0}\right)^{\frac{1}{2b}},\quad \text{etc.}$$

Reciprocal equations. If $\varDelta = \sum_0^2 n|e$ be a fixed line, and $\varPi = \sum_0^3 n|e$ be a fixed plane, then we may write the three exquations

$$\text{23)}\qquad L = \varPhi^u\varDelta \quad = \sum_0^2 A^u n|e,$$

$$\text{24)}\qquad P = \varPhi^u\varPi \quad = \sum_0^3 A^u n|e,$$

$$\text{25)}\qquad P = \varPhi^u\varPsi^v\varPi = \sum_0^3 A^u B^v n|e,$$

which are reciprocal respectively to equations 3), 10) and 14). Eq. 23) is that of a curve enveloped by $L = |p$, in plane space; eq. 24) is that of a developable surface enveloped by $P = |p$ in solid space, and eq. 25) is that of a convex or skew surface enveloped by $P = |p$. We shall not discuss the properties of these envelopes, as they are easily seen from those of their reciprocals already considered.

It is believed that the curves and surfaces treated in this paper have not been hitherto discussed by Grassmann's methods.

---

# Über Schraubengeschwindigkeiten eines festen Körpers bei verschiedener Zahl von Stützflächen.

Von

P. Somoff

in Warschau.

1. Die meisten Untersuchungen über Verschiebungen, welche einem festen Körper möglich bleiben, wenn er sich auf feste, unbewegliche Flächen stützt, beziehen sich auf die Bewegung desselben parallel einer Ebene oder um einen festen Punkt. Eine systematische Betrachtung dieser Frage findet sich zuerst, soviel mir bekannt ist, bei Reuleaux in seiner „Theoretischen Kinematik“,* als Grundlage bei der Untersuchung der höheren kinematischen Paare. In dem Umstande, dass in der praktischen Kinematik die ebene Bewegung eine vorwiegende Bedeutung hat, liegt zum Teil der Grund davon, dass auch in den weiteren Untersuchungen,** welche Reuleaux' Betrachtungen bedeutend vervollständigten, der allgemeinste Fall der Stützflächen, bei welchem dem festen Körper Schraubengeschwindigkeiten möglich bleiben, nur sehr wenig in Betracht gezogen wurde.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Versuch gemacht, solche Schraubengeschwindigkeiten bei gegebenen Lagen von Stützflächen zu untersuchen. Analytisch würde das eine Aufgabe über Gebietsbestimmungen im Raume von fünf Dimensionen sein; dabei würde aber, was die wirkliche Verteilung von Schraubengeschwindigkeiten betrifft, alle Anschaulichkeit, welche in solchen Fragen sehr wesentlich ist, verloren gehen. Es ist daher nur eine unmittelbar geometrische Darstellung dem Ziele entsprechend.

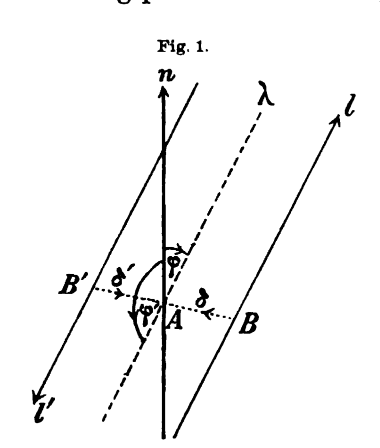
2. Wir werden nur unendlich kleine Verschiebungen oder, was gleichbedeutend ist, Geschwindigkeiten betrachten und dabei die Krümmung der Stützflächen und der Flächen, welche den festen Körper umgrenzen, ausser Acht lassen.

* §§ 18, 19 und 20.

** Es mögen unter anderen genannt werden: Rittershaus, „Civilingenieur“, 1875, S. 438; Beck, „Civilingenieur“, 1876, S. 571; Grashof, Theoretische Maschinenlehre II, 1883, S. 21; Burmester, Lehrbuch der Kinematik, 1886, S. 256.

Indem wir mit $p$ den Parameter der Schraubengeschwindigkeit, das heisst das Verhältnis der Translationsgeschwindigkeit $u$ längs der Schraubenaxe $l$ zur Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um dieselbe bezeichnen, werden wir $p$ positiv rechnen, wenn die Richtungen der beiden Geschwindigkeitskomponenten zusammenfallen, wobei der Vektor $\omega$ in derjenigen Richtung auf der Schraubenaxe abgetragen werden soll, von wo gesehen die Drehung im Sinne der Uhrzeiger zu erfolgen scheint. Als positive Richtung der Normale $n$ einer Stützfläche $\Sigma$ in ihrem Berührungspunkte $M$ zur Körperfläche wollen wir die Richtung annehmen, nach welcher der Körper sich von der Stützfläche entfernen kann. Es sei weiter $\delta$ der kürzeste Abstand zwischen $n$ und $l$, stets positiv gerechnet, und $\varphi$ der Winkel zwischen diesen Geraden, welcher auf folgende Weise bestimmt werden soll. Es sei $AB$ (Fig. 1) die kürzeste Entfernung zwischen $n$ und $l$ und $\lambda$ eine parallel zu $l$ durch den Punkt $A$ gezogene Gerade; indem wir von $B$ aus die Ebene $(n, \lambda)$ betrachten, messen wir den Winkel $\varphi$ von der positiven Normalenrichtung bis zur ersten Begegnung mit $\lambda$ im Sinne der Uhrzeigerdrehung. Somit werden die Winkel $\varphi$ und $\varphi'$ für zwei parallele aber auf verschiedenen Seiten von $n$ gelegene Schraubenaxen $l$ und $l'$ einander zu zwei rechten Winkeln ergänzen (Fig. 1). Der Winkel $(n, \omega)$ wird immer zwischen den positiven Richtungen dieser Geraden gemessen werden und kann daher entweder gleich $\varphi$ oder gleich $\pi - \varphi$ sein.

Fig. 1.




### Eine Stützfläche.

3. Wenn bei irgend einer Bewegung die Fläche des festen Körpers eine Stützfläche berührt, so haben alle Punkte der gemeinschaftlichen Normalen beider Flächen bekanntlich die Eigenschaft, dass ihre Geschwindigkeiten auf dieser Normalen senkrecht stehen. Wenn aber bei der Verschiebung des festen Körpers dieser sich von der Stützfläche entfernt, so bildet die Geschwindigkeit des Berührungspunktes, und daher auch aller anderen Punkte der Normalen, mit der positiven (§ 2) Richtung dieser Normalen einen spitzen Winkel. Für jede mögliche Bewegung des festen Körpers muss also die Schraubengeschwindigkeit so beschaffen sein, dass für jeden Punkt der Normalen die Bedingung

$$v \cdot \cos(v, n) \geqq 0$$

erfüllt werde. Wählen wir den Punkt $A$ (Fig. 1) dazu, so finden wir leicht, wenn wir nur das im § 2 über $p$ und $\varphi$ Gesagte beachten, Folgendes:

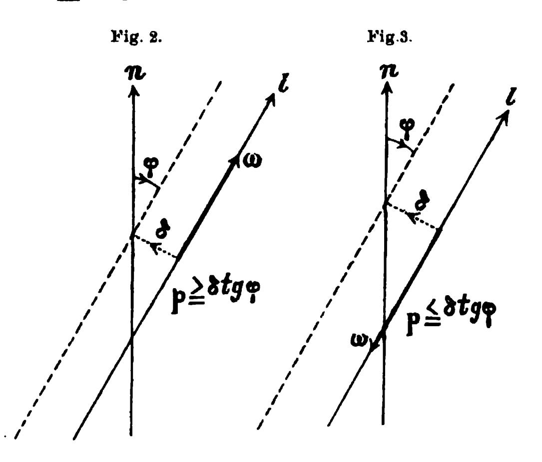
Jede Gerade des Raumes kann als Schraubenaxe dienen und die Winkelgeschwindigkeit kann auf derselben jede der beiden entgegengesetzten Richtungen haben; es muss aber dabei, wenn die Winkelgeschwindigkeit mit der positiven Normalen einen spitzen Winkel bildet,

1) $$p \geqq \delta \operatorname{tg} \varphi,$$

wenn dagegen $\sphericalangle(n, \omega) > \frac{\pi}{2}$ ist,

2) $$p \leqq \delta \operatorname{tg} \varphi$$

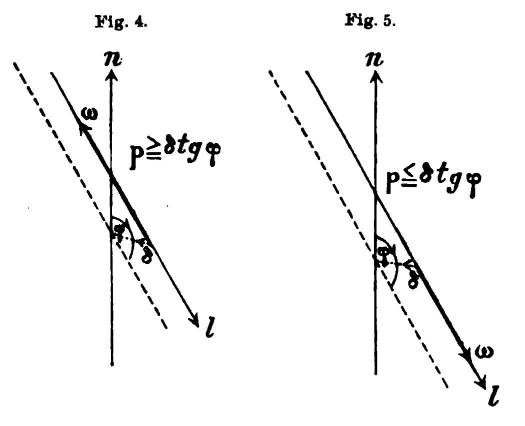
sein. Die Figuren 2, 3, 4 und 5 stellen vier verschiedene Fälle dar, welche dabei eintreten können. Die Fälle (Fig. 4 und 5) sind mit denjenigen identisch, welche man erhalten würde, wenn man in den Fällen (Fig. 2 und 3) die Schraubenaxe sich selbst parallel auf die andere Seite der Normalen $n$ gebracht hätte.




Es ist leicht einzusehen, wie die für $p$ gegebenen Bedingungen im Falle, dass

$$\sphericalangle(n, \omega) = \frac{\pi}{2}$$

ist, ausarten.




Ebenso brauchen wir nicht die einfache Frage zu untersuchen, um welche Axen und nach welcher Richtung eine einfache Drehung oder eine Translation möglich ist.

4. Die Berührung mit einer festen Fläche ist bekanntlich nicht die allgemeinste Form eines Zwanges für den festen Körper, wie es zuerst Thomson und Tait* gezeigt haben. Es ist aber leicht auch für die allgemeinste Form des Zwanges die entsprechenden Bedingungen für $p$ aufzustellen, wenn man nur beachtet, dass bei jeder Zwangsbedingung, welche in Form einer Gleichung zwischen den 6 kine-

* A treatise on natural philosophy, § 201.

matischen Elementen gegeben ist, alle für den Körper möglichen Schrauben $(p)$ einer einzigen Schraube mit bestimmtem Parameter $P$ reciprok sind;* sodass

$$(p + P) \cos \varphi - \delta \sin \varphi = 0$$

ist, wo $\delta$ und $\varphi$ die kürzeste Entfernung und den Winkel zwischen den zwei Schraubenaxen $(p)$ und $(P)$ bedeuten. Wenn die Bedingung für die kinematischen Elemente ausser dem Gleichheitszeichen auch ein Ungleichheitszeichen enthält, so finden wir, das im § 2 Gesagte beachtend, entweder

$$p \geq \delta \operatorname{tg} \varphi - P,$$

oder

$$p < \delta \operatorname{tg} \varphi - P,$$

je nachdem $\omega$ mit einer bestimmten Richtung der reciproken Schraubenaxe einen spitzen oder einen stumpfen Winkel bildet.

Die weitere Untersuchung für mehrere Zwangsbedingungen würde sich somit wenig von unserer Betrachtung für Stützflächen unterscheiden, es würde aber dabei zum grossen Teil die Anschaulichkeit verloren gehen. Zudem wird ja ein Zwang für den festen Körper in der That immer durch eine oder mehrere Stützflächen erreicht, und alle anderen Fälle können, wenn die Zahl der Bedingungen grösser als eins ist, auf diesen einzigen Fall zurückgeführt werden. Wir brauchen daher weiter den genannten allgemeinsten Fall des Zwanges nicht zu betrachten.

### Zwei Stützflächen.

5. Für die Richtung der Winkelgeschwindigkeit auf der Schraubenaxe können hier vier verschiedene Fälle eintreten, welche wir in drei Gruppen teilen wollen:

1. Gruppe:

$$(n_1 \omega) < \frac{\pi}{2}, \quad (n_2 \omega) < \frac{\pi}{2}; \tag{3}$$

2. Gruppe:

$$(n_1 \omega) < \frac{\pi}{2}, \quad (n_2 \omega) > \frac{\pi}{2}, \tag{4}$$

oder

$$(n_1 \omega) > \frac{\pi}{2}, \quad (n_2 \omega) < \frac{\pi}{2}; \tag{5}$$

3. Gruppe:

$$(n_1 \omega) > \frac{\pi}{2}, \quad (n_2 \omega) > \frac{\pi}{2}, \tag{6}$$

wo $n_1$ und $n_2$ die positiven Richtungen der Normalen zweier Stützflächen in ihren Berührungspunkten mit dem festen Körper bezeichnen.

Die Fälle, wo die Winkelgeschwindigkeit zu einer oder zu beiden Normalen senkrecht ist, werden wir später betrachten.

Die Punkte einer Kugelfläche, die mit beliebigem Radius beschrieben ist, sollen die Richtungen der Winkelgeschwindigkeit, welche

* Ball, Theoretische Mechanik starrer Systeme, S. 357.

dieselbe auf der Schraubenaxe bekommt, bestimmen. Diese Kugel wollen wir **Parameterkugel** nennen, da die Lagen der Punkte auf derselben mit den Ungleichheiten, durch welche die Werte von $p$ begrenzt werden, zusammenhängen. Zwei durch das Zentrum der Kugel gelegte Ebenen $CA_1DB_1$ und $CA_2DB_2$ (Fig. 6), welche auf den Normalen $n_1$ und $n_2$ senkrecht stehen, teilen die Kugelfläche in vier Gebiete $CA_2DB_1$, $CA_1DA_2$, $CB_1DB_2$ und $CB_2DA_1$, welche den vier Fällen 3), 4), 5) und 6) und zugleich den vier Paaren von Ungleichheiten:

7) $$p \gtrless \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \geqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2,$$

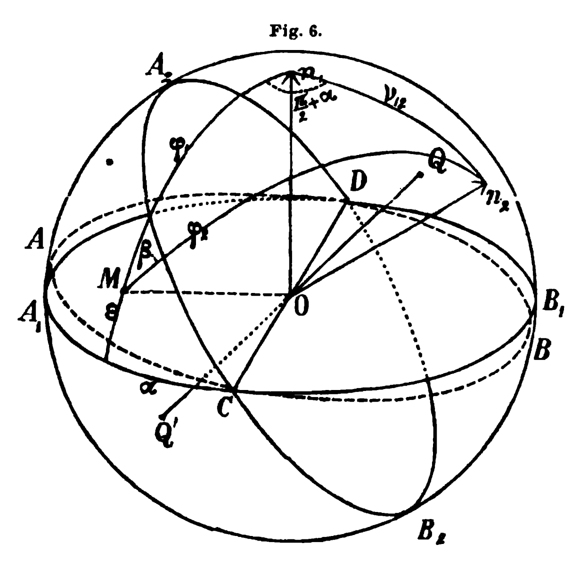
8) $$p > \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \leqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2,$$

9) $$p < \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p > \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2,$$

10) $$p \leqq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \lesseqgtr \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2,$$

entsprechen. Das erste und letzte, sowie die anderen zwei Gebiete kann man als paarweise konjugiert betrachten, da auf jeder Schraubenaxe zwei entgegengerichteten Winkelgeschwindigkeiten solche Punkte auf der Kugel entsprechen, welche zu zwei Gebieten desselben Paares gehören.

Fig. 6.




Wenn die Richtung der Winkelgeschwindigkeit dem Gebiete 3) angehört, so muss der Parameter einer möglichen Schraubengeschwindigkeit auf jeder dieser Richtung parallelen Axe der Bedingung 7) genügen, er darf also nicht kleiner als jede der beiden Grössen:

11) $$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$$

sein. Wenn die Winkelgeschwindigkeit die entgegengesetzte ist, so entspricht ihr ein Punkt des konjugierten Gebietes 6), und es besteht die Bedingung 10), $p$ darf also die kleinere von den Grössen 11) nicht übersteigen.

Somit sehen wir, dass auf jeder Axe, welche den konjugierten Gebieten 3) und 6) entspricht, Schraubengeschwindigkeiten möglich sind; wobei der Parameter einen Wert haben muss, welcher nicht zwischen den Grössen 11) liegt. Die Winkelgeschwindigkeit der

Schraubenbewegung kann auf jeder solchen Axe, je nach den Bedingungen 7) oder 10) beide Richtungen bekommen.

Bei jeder den Gebieten 3) und 6) entsprechenden Richtung giebt es Axen, für welche die Grössen 11) einander gleich werden; auf solchen Axen kann $p$ jeden beliebigen Wert bekommen.

Nehmen wir jetzt an, dass die Winkelgeschwindigkeit dem Gebiete 4) angehört; $p$ muss dann den Ungleichheiten 8) genügen, welche dann vereinbar sind, wenn die Lage der Axe der Bedingung:

$$12)\qquad \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 < \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$$

genügt. Auf allen anderen Axen von derselben Richtung sind keine Schraubengeschwindigkeiten mit gegebener Richtung der Winkelgeschwindigkeit möglich; auf allen diesen Axen sind aber Schraubengeschwindigkeiten mit entgegengesetzter Winkelgeschwindigkeit möglich; denn diesen Axen entsprechen die Ungleichheiten 9), welche für alle diese Axen vereinbar sind, da die letzteren jetzt der Bedingung:

$$13)\qquad \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 > \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 .$$

genügen. Wir finden also:

Auf allen Axen, auf welchen einer von den Winkeln $(n_1 \omega)$, $(n_2 \omega)$ spitz und der andere stumpf ist, sind Schraubengeschwindigkeiten möglich; die Winkelgeschwindigkeit kann aber auf jeder dieser Axen nur eine von den beiden Richtungen haben, je nachdem die Lage der Axe der Bedingung 12) oder 13) genügt. Auf allen diesen möglichen Schraubenaxen muss der Wert des Parameters $p$ zwischen den Grössen 11) liegen. Diese Grössen sind übrigens für verschiedene Schraubenaxen derselben Richtung im allgemeinen verschieden.

Auf einer Schraubenaxe, für welche

$$14)\qquad \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$$

ist, kann $p$ nur diesen einzigen Wert bekommen, für die Winkelgeschwindigkeit bleiben aber dabei beide Richtungen möglich. Alle diese Axen gehören offenbar demjenigen Komplexe zweiten Grades an, welcher alle Schrauben enthält, die für den festen Körper möglich sind, wenn er beständig zwei feste Flächen berührt.

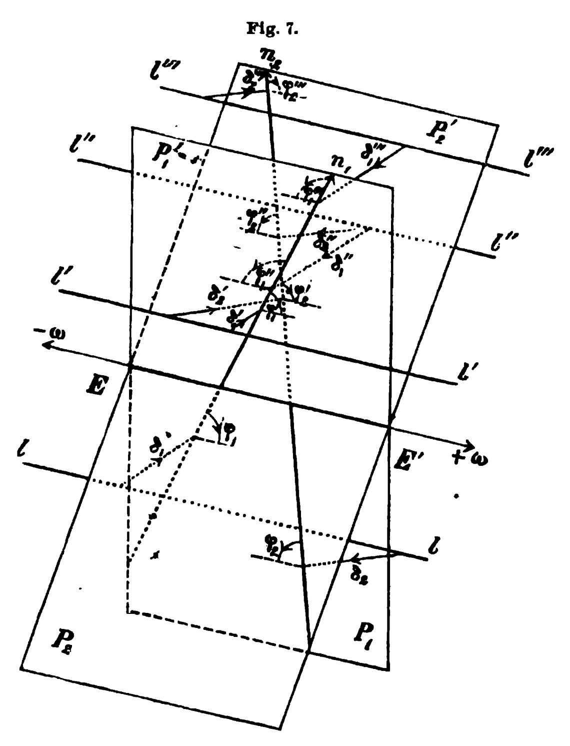
Alle diesem Komplexe angehörenden Axen von derselben Richtung liegen in einer Ebene, welche im folgenden Paragraph näher untersucht werden soll, da sie im weiteren eine besondere Bedeutung hat.

6. Es sei ein System paralleler Axen gegeben, deren Richtung den konjugierten Gebieten 4) und 5) entnommen ist. Durch die Normalen $n_1$ und $n_2$ legen wir Ebenen $P_1 P'_1$ und $P_2 P'_2$ (Fig. 7), welche der gegebenen Axenrichtung parallel sind, und welche wir Normalebenen nennen wollen. Da für zwei Axen, welche auf verschiedenen Seiten einer solchen Ebene liegen, $\delta \operatorname{tg} \varphi$ verschiedene Zeichen hat, so ist leicht einzusehen, dass den vier von den Normalebenen gebildeten Winkeln vier verschiedene Zeichenverbindungen der

Grössen 11) entsprechen. Für eine Gerade $l$, welche im Winkel $(P_1 P_2)$ liegt, haben diese Grössen die Zeichen $(++)$, für $l'$ im Winkel $(P'_1 P_2)$ $(+-)$, für $l''$ im Winkel $(P_1 P'_2)$ $(-+)$ und für $l'''$ im Winkel $(P'_1 P'_2)$ $(--)$.

Dabei ist in der Figur 7 vorausgesetzt, dass $n_1$ mit der gegebenen Axenrichtung $EE'$ einen spitzen, $n_2$ aber einen stumpfen Winkel bildet. Nehmen wir jetzt an, dass $\omega$ auf irgend einer der gegebenen Axen diese Richtung $EE'$ hat, und daher $p$ den Bedingungen 9) genügt. Dann finden wir, dass für alle Axen, welche im Winkel $(P_1 P'_2)$ liegen, diese Bedingungen erfüllt werden und daher alle diese Axen mögliche Schraubenaxen sind; für die Axen aber, welche im Winkel $(P_1' P_2)$ liegen, sind die Ungleichheiten 9) nicht vereinbar, dieser Winkel enthält also keine möglichen Schraubenaxen. Um in den beiden anderen Winkeln $(P_1 P_2)$ und $(P'_1 P'_2)$, in welchen die Zeichen der beiden Grössen 11) gleich sind, mögliche Schraubenaxen zu finden, ziehen wir durch $EE'$ eine Ebene $S_{12}$, welche in diesen beiden Scheitelwinkeln liegt und sie in solche Teile teilt, dass ihre Sinus im umgekehrten Verhältnisse zu den Tangenten der Winkeln $\varphi_1$ und $\varphi_2$ stehen. Diese Ebene, welche im weiteren eine wichtige Rolle spielt, wollen wir Grenzebene nennen. Für alle Geraden der gegebenen Richtung, welche in dieser Ebene liegen, sind die Grössen 11) gleich. Zu einer Seite dieser Ebene liegen diejenigen Geraden, für welche die Bedingungen 12) erfüllbar sind; alle diese Geraden, mögen sie in den Winkeln $(P_1 P_2)$, $(P'_1 P'_2)$ oder ausserhalb derselben liegen, stellen mögliche Schraubenaxen dar, wenn nur die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ die angenommene Richtung $EE'$ behält.

Fig. 7.




Alle Axen, welche zur anderen Seite der Grenzebene liegen, werden mögliche Schraubenaxen, wenn für die Winkelgeschwindigkeit die entgegengesetzte Richtung angenommen wird.

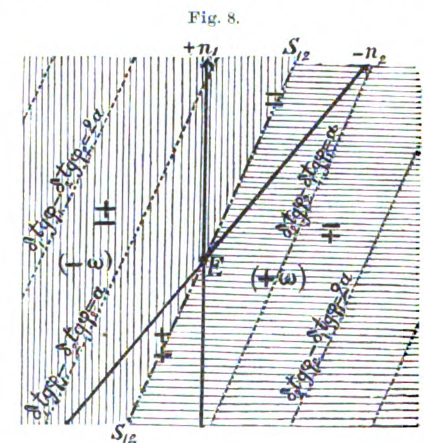
Wir sehen also, dass wieder alle Axen einer gegebenen Richtung mögliche Schraubenaxen sind; sie werden nur in Bezug auf die mögliche Richtung der Winkelgeschwindigkeit durch die Grenzebene in zwei Gruppen geteilt.

7. Bei grösserer Zahl von Stützflächen wird eine perspektivische, der Figur 7 analoge Darstellung unbequem sein; wir werden daher folgende graphische Darstellung auf einer zu dem gegebenen System paralleler Geraden senkrechten Ebene vorziehen.

Die Winkelgeschwindigkeit werden wir als positiv bezeichnen $(+\omega)$, wenn sie gegen den Zuschauer gerichtet ist, wenn man also die entsprechende Drehung im Sinne der Uhrzeiger sieht; im anderen Falle schreiben wir $(-\omega)$.

Um anzugeben, wie eine Normale $n$ zu der Zeichnungsebene geneigt ist, werden wir bei der Projektion des positiven Endpunktes der Normalen das Zeichen (+) oder (—) anbringen, je nachdem die Normale mit der positiven Winkelgeschwindigkeit einen spitzen oder einen stumpfen Winkel bildet.

Fig. 8.




Die Punkte der Ebene werden die Lagen der gegebenen Axen bezeichnen. Die Zeichen (+) und (—), welche in den von den Projektionen der Normalen gebildeten Gebieten stehen, werden, der Reihe nach von oben nach unten geschrieben, die Zeichen der Grössen $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$, $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \ldots$ angeben.

Endlich werden wir das Gebiet, welches mögliche Schraubenaxen mit positiver Winkelgeschwindigkeit bestimmt, horizontal, dasjenige aber mit entgegengesetzter Winkelgeschwindigkeit — vertikal schraffieren.

In der Figur 8 ist auf diese Weise der im § 6 betrachtete Fall zweier Stützflächen dargestellt. Die Spur der Grenzebene $S_{12}$, welche wir in der Folge Grenzgerade nennen werden, ist strichpunktiert gezeichnet.

Zur Bestimmung der Lage der Grenzebene und der möglichen Schraubenaxen, welche auf der einen oder anderen Seite dieser Ebene liegen, kann man folgende Regeln aufstellen.

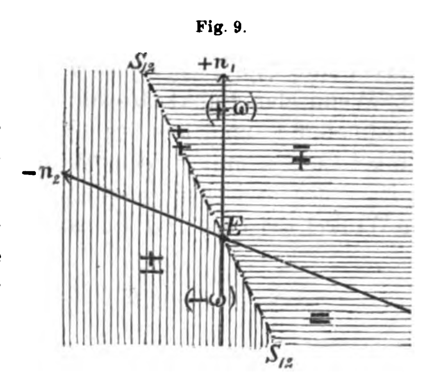
a) Die Grenzgerade $S_{ik}$, welche durch den Durchschnittspunkt der Geraden $n_i$ und $n_k$ geht, liegt in demjenigen Paare der von diesen Geraden gebildeten Scheitelwinkel, in welchen die Grössen $\delta_i \operatorname{tg} \varphi_i$ und $\delta_k \operatorname{tg} \varphi_k$ gleiche Zeichen haben, das heisst (Fig. 8) in den Gebieten (+ +) und (— —). Dabei muss man voraussetzen, dass die Normalen $n_i$ und $n_k$ in der graphischen Darstellung von entgegengesetzten

Zeichen begleitet werden; denn sonst verliert die Grenzebene ihre Bedeutung.

b) Wenn der Winkel zwischen den positiven Richtungen der Normalenprojektionen die Zeichen (— —) enthält, so liegt das Gebiet der möglichen Schraubenaxen mit positiver Winkelgeschwindigkeit auf derjenigen Seite der Geraden $S_{ik}$, auf welcher das Ende der mit negativem Vorzeichen versehenen Normalenprojektion sich befindet ($-n_2$ in der Fig. 8); wenn aber der genannte Winkel mit den Zeichen (+ +) versehen ist, so liegt das Gebiet ($+\omega$) auf der anderen Seite von $S_{ik}$ ($+n_1$ in der Fig. 9).

Die Grenzebene hat eine Bedeutung auch bei der Bestimmung der Grenzen 11) für die Werte des Parameters $p$. Es ist nämlich die Differenz dieser Grenzen für diejenigen Schrauben gleich, welche in einer der Grenzebene parallelen Ebene liegen; sie ist dabei der Entfernung zwischen den beiden Ebenen proportional. Die Grenzwerte selbst sind übrigens für verschiedene Axen derselben Ebene verschieden. In der Figur 8 sind die Spuren einiger solcher Ebenen durch Punktierung angegeben.

Fig. 9.




8. Die Lage der Normalebenen und der Grenzebene hängt offenbar davon ab, welcher Punkt $M$ der Parameterkugel (Fig. 6) die Richtung der Winkelgeschwindigkeit und zugleich des Systems paralleler Schraubenaxen bestimmt. Wenn der Punkt $M$ auf den Grenzen des Gebietes $A_1 D A_2 C$ einen Umlauf macht, so ergiebt sich folgendes. Für die Lage $C$ dieses Punktes ist der Winkel zwischen den Normalenebenen $P_1 P'_1$ und $P_2 P'_2$ (Fig. 7) dem Winkel $(n_1 n_2)$ gleich, die Gerade $EE'$ fällt mit der Geraden der kürzesten Entfernung zusammen und die Lage der Grenzebene bleibt unbestimmt, da beide Grössen 11) jetzt unendlich sind. Aber in diesem Falle kann man leicht unmittelbar einsehen, dass jetzt einerseits eine Translation ($p = \infty$) nach beiden Richtungen, andererseits eine einfache Drehung ($p = 0$) um diejenigen Axen der gegebenen Richtung möglich ist, welche in den Scheitelwinkeln $(P_1 P'_2)$ und $(P'_1 P_2)$ liegen: im ersteren Winkel — ($+\omega$) und in dem zweiten — ($-\omega$). Daher ist um alle diese Axen auch eine Schraubengeschwindigkeit von willkürlichem Parameter möglich, wenn nur die entsprechende Winkelgeschwindigkeit eine bestimmte Richtung bekommt. Eine Ausnahme macht nur die Gerade $EE'$, auf welcher beide Richtungen der Winkelgeschwindigkeit möglich sind. Während der Punkt $M$ auf dem Bogen $CA_1D$ fortschreitet, bleibt immer $\operatorname{tg}\varphi_1 = \infty$ und die Grenzebene, wie es aus § 7 folgt, fällt mit der Ebene $P_1 P'_1$

zusammen. Ebenso, wenn der Punkt $M$ den Bogen $DA_2C$ beschreibt, fällt die Grenzebene mit der Ebene $P_2P'_2$ zusammen. Wenn dieser Punkt sich auf einem Kreise $CADBC$, welcher $CD$ zum Durchmesser hat, bewegt, das heisst, wenn man Winkelgeschwindigkeiten, welche einer gegebenen Ebene parallel sind, betrachtet, so beschreibt die Gerade $EE'$ (Fig. 7) ein hyperbolisches Paraboloid. Rückt der Punkt $M$ von $C$ nach $A$, so wird $\sphericalangle(n_1 n_2) = 0$ und die Grenzebene wird den Geraden $n_1$ und $n_2$ parallel.

Bemerken wir noch — und das wird später eine Anwendung finden — dass, wenn der Winkel zwischen der Ebene $CADBC$ und $CA_1DB_1C$ oder $CA_2DB_2C$ genügend klein ist, so dass das Verhältnis $\operatorname{tg}\varphi_1 : \operatorname{tg}\varphi_2$ oder $\operatorname{tg}\varphi_2 : \operatorname{tg}\varphi_1$ nach seinem Zahlenwerte genügend gross bleibt, die Gerade $S_{12}$ (Fig. 8) auch einen beliebig kleinen Winkel mit der Geraden $(+n_1)$ oder respektive $(-n_2)$ bildet. Daraus folgt, dass man im betrachteten Falle in den konjugierten Gebieten 4) und 5) immer solche Punkte wählen kann, dass die Grenzebene einen beliebig kleinen Winkel mit $P_1P'_1$ oder mit $P_2P'_2$ bildet.

Wenn der Punkt $M$ auf der Parameterkugel durch die Winkelkoordinaten $\varepsilon$ und $\alpha$ (Fig. 6) bestimmt wird und wir mit $\nu_{12}$ den Winkel $(n_1 n_2)$, mit $\beta$ den Winkel zwischen den Ebenen $P_1P'_1$ und $P_2P'_2$ (oder zwischen $+n_1$ und $-n_2$ der Figur 8) und endlich mit $s_1$ den Winkel zwischen $P_1P'_1$ und der Grenzebene bezeichnen, so finden wir:

$$\operatorname{cotg} s_1 = \operatorname{cotg}\beta + \frac{\operatorname{cotg}\varepsilon}{\cos\alpha \sin\nu_{12}} \sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha \sin^2\nu_{12}}{\sin^2\beta}},$$

wo der Winkel $\beta$ aus der Gleichung:

$$\cos\nu_{12}\sin\beta - \cos\varepsilon\cos\alpha\sin\nu_{12}\cos\beta + \sin\varepsilon\sqrt{\sin^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\nu_{12}} = 0$$

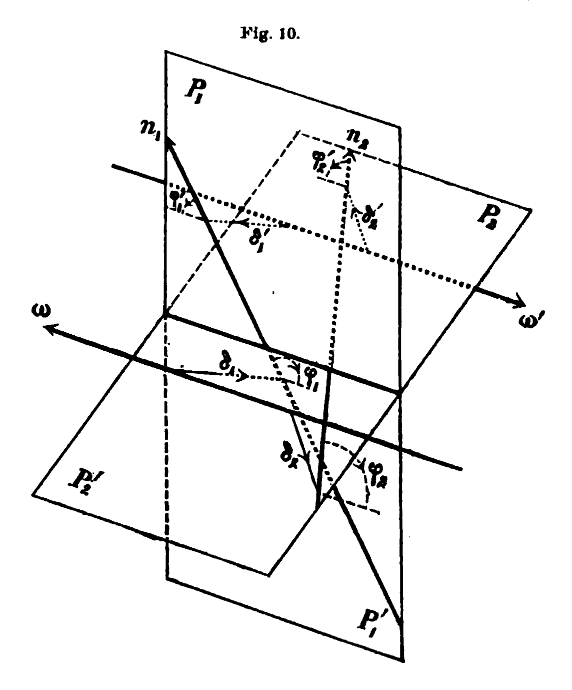
bestimmt wird.

9. Um solche Axen aufzusuchen, um welche einfache Drehung ($p = 0$) möglich ist, bemerken wir, dass für solche Richtungen der Winkelgeschwindigkeit, welche den Bedingungen 7) entsprechen, dass grössere von den Produkten 11) nicht positiv werden darf; keiner von den Winkeln $\varphi_1$, $\varphi_2$ darf also spitz werden. Ebenso, für die entgegengesetzte Richtung von $\omega$ dürfen dieselben Produkte nicht negativ, $\varphi_1$ und $\varphi_2$ also nicht stumpf werden. Um die entsprechenden Gebiete möglicher Drehaxen zu finden, ziehen wir durch $n_1$ und $n_2$ Ebenen, welche einer der gegebenen, den Ungleichheiten 7) oder 10) entsprechenden Richtungen parallel sind (Fig. 10). Die Winkel $(P_1P'_2)$ und $P'_1P_2)$, deren Schenkel die positive Richtung einer von den Normalen und die negative Richtung der anderen enthalten, stellen dann die gesuchten Gebiete dar. Im Falle, dass das System paralleler Axen den Ungleichheiten 8) und 9) entspricht, liegen die möglichen Drehungsaxen in den Winkeln, welche ebenso bestimmt werden [$(P'_2P_2)$ und $(P_1P'_2)$ der Fig. 7).]

Einfache Translationsgeschwindigkeiten ($p = \infty$) sind offenbar nach solchen Richtungen möglich, welche auf der Parameterkugel (Fig. 6) durch das Gebiet $CA_2DB_1C$ bestimmt werden.

10. Es seien jetzt die Normalen $n_1$ und $n_2$ einander parallel. Wir müssen hier zwei Fälle unterscheiden: den, dass die Normalen gleichgerichtet und den, dass ihre Richtungen entgegengesetzt sind. Im ersten Falle werden die Gebiete $A_2DB_1C$ und $A_1CB_2D$ (Fig. 6) zu halben Kugelflächen, und man findet dann nach der allgemeinen Regel, dass um jede Axe, welche zu den beiden Normalen nicht senkrecht ist, Schraubengeschwindigkeiten möglich sind, wenn nur $p$ nicht einen zwischen den Grössen 11) liegenden Wert hat. Da die anderen zwei Gebiete auf der Parameterkugel nur durch Punkte eines Kreises, dessen Ebene zu den Normalen $n_1$, $n_2$ senkrecht ist, bestimmt werden, so sind für die entsprechenden Richtungen der Schraubenaxen die Grössen 11) unendlich. Wenn man beachtet, dass eine einfache Drehung um diejenigen Axen dieser Richtungen möglich ist, welche nicht zwischen den Normalen durchgehen, eine Translation aber nach allen zu den Normalen senkrechten Richtungen möglich bleibt, so sieht man, dass jetzt um alle zu den Normalen senkrechten, aber nicht zwischen denselben gelegenen Axen Schraubengeschwindigkeiten mit beliebiger Parametergrösse zulässig sind. Die Winkelgeschwindigkeit kann übrigens auf jeder dieser Axen nur eine von den beiden Richtungen haben (Fig. 11).

Fig. 10.

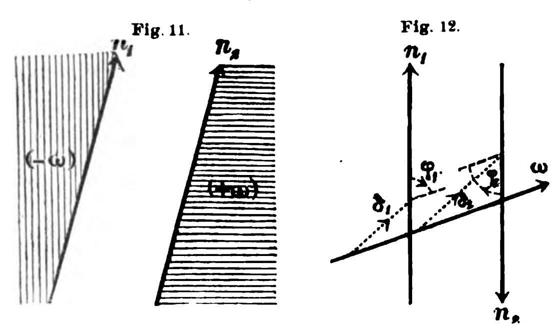


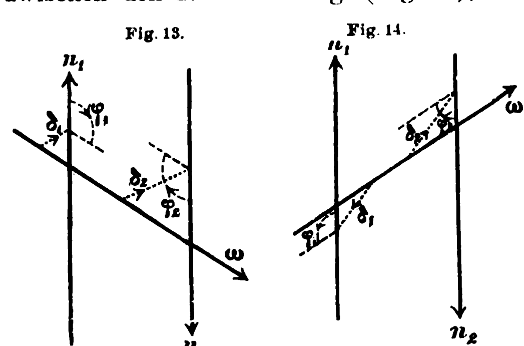

Im zweiten Falle, wenn die Normalen ungleiche Richtung haben, muss der Wert von $p$ für jede Axe, welche zu den Normalen nicht senkrecht ist, zwischen den Grössen 11) liegen, da die Winkelgeschwindigkeit auf jeder solchen Axe mit der einen Normale einen spitzen und mit der anderen einen stumpfen Winkel bildet. Für die Schraubenaxen, welche auf einer Seite der beiden Normalen liegen, ist $\varphi_1 = \varphi_2$.

Nehmen wir an, dass für irgend eine dieser Axen die Winkel $\varphi_1$, $\varphi_2$ und $(n_1 \omega)$ spitz sind (Fig. 12); dann sind um diese Axen Schraubengeschwindigkeiten möglich, wenn

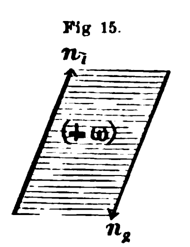
15) $$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \leqq p \leqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$$

ist. Für die Möglichkeit dieser Bedingung ist es notwendig, dass $\delta_1 \leqq \delta_2$ ist. Auf diese Weise sieht man überhaupt, dass um jede Axe, welche nicht zwischen den Normalen hindurchgeht, Schraubengeschwindigkeiten möglich sind; es muss aber dabei: 1. der Wert von $p$ zwischen den Grössen 11) liegen und 2. die Winkelgeschwindigkeit mit derjenigen Normalen, deren kürzeste Entfernung von der Schraubenaxe die kleinere ist, einen spitzen Winkel bilden. Wenn die Schraubenaxe zwischen den Normalen liegt (Fig. 14), so ist $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$; dann muss die Winkelgeschwindigkeit, damit die Bedingungen 15) erfüllt werden, mit derjenigen Normalen einen spitzen Winkel bilden, für welche der Winkel $\varphi$ stumpf ist. — Ebenso muss für die Axen, welche auf einer Seite der beiden Normalen liegen, für welche die Winkel $\varphi_1$ und $\varphi_2$ aber stumpf sind, die Winkelgeschwindigkeit der entgegengesetzten Forderung genügen (Fig. 13).




Wenn eine Schraubenaxe, wieder im Falle ungleich gerichteter paralleler Normalen, zu denselben senkrecht ist und zwischen ihnen liegt, so bleibt der Parameter beliebig, die entsprechende Drehung kann aber dann nur in einem Sinne erfolgen (Fig. 15). Liegt die Axe auf einer Seite der beiden Normalen, so ist auf ihr keine Schraubengeschwindigkeit von endlichem Parameter möglich.




Wenn die Schraubenaxe nicht zu den Normalen senkrecht aber der Ebene derselben parallel ist, so bleibt für $p$ nur ein bestimmter Wert möglich, da die Grössen 11) einander gleich werden; dieser Wert wird Null, es bleibt also nur eine Drehung möglich, wenn die Axe die beiden Normalen schneidet.

Eine besondere Bedeutung in Bezug auf den grössten Zwang eines festen Körpers mit zwei Stützflächen hat der Fall, wo die entgegengesetzt gerichteten Normalen auf einer Geraden liegen. Obgleich dann wieder jede Gerade des Raumes eine mögliche Schraubenaxe darstellt, bekommt der Parameter auf jeder Axe nur einen bestimmten Wert, da die Grenzen desselben 11) immer einander gleich bleiben.

### Drei Stützflächen.

11. In Bezug auf die Richtungen der Winkelgeschwindigkeit kann man die hier eintretenden acht Fälle in vier Gruppen zerlegen, je nachdem die Winkelgeschwindigkeit entweder mit allen drei Normalen $n_1$, $n_2$, $n_3$, oder mit zweien, oder nur mit einer, oder endlich mit keiner von ihnen Winkel bildet, welche einen rechten Winkel nicht übertreffen. Diesen vier Gruppen entsprechen nach § 3 folgende acht Systeme von Ungleichheiten:

1. Gruppe:

16) $p \geqq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \geqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \geqq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3;$

2. Gruppe:

17) $p \geqq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \geqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \leqq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3,$

18) $p \geqq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \leqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \geqq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3,$

19) $p \leqq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \geqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \geqq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3;$

3. Gruppe:

20) $p \leqq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \leqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \geqq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3,$

21) $p \leqq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \geqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \leqq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3,$

22) $p \geqq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \leqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \leqq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3;$

4. Gruppe:

23) $p \leqq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \leqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \leqq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3.$

Auf der Parameterkugel entsprechen diesen Ungleichheiten acht Gebiete, welche durch drei Kreislinien, deren Ebenen durch das Zentrum der Kugel gehen und zu den Normalen senkrecht sind, gebildet werden und paarweise konjugiert sind (§ 5). In der Figur 16 entsprechen den Bedingungen 16) ... 23) folgende acht sphärische Dreiecke:

$ABC$(16), $BDC$(17), $AEB$(18), $ACF$(19),
$AEF$(20), $DCF$(21), $EBD$(22) und $EDF$(23).

Dabei sind als konjugiert zu betrachten:

$ABC$ und $EDF$, $BDC$ und $AEF$,
$AEB$ und $DCF$, $ACF$ und $EBD$.

Es ist wesentlich, zu bemerken, dass jedes Paar der konjugierten Gebiete wirklich existiert; jedes derselben kann übrigens in zwei Kreisbögen oder sogar nur in zwei Punkte, die Enden eines Durchmessers der Parameterkugel, ausarten.

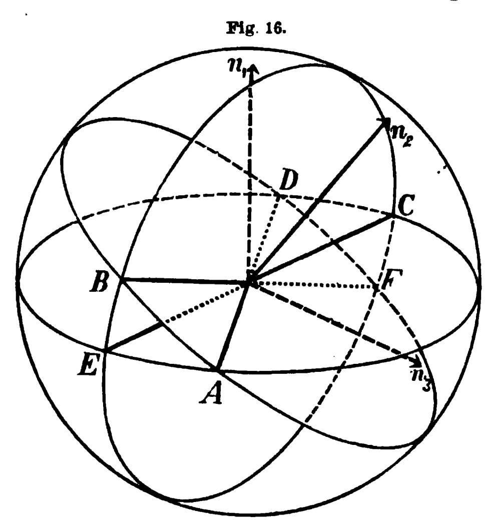
12. Die Schraubengeschwindigkeiten, welche der ersten und vierten Gruppe entsprechen, brauchen nicht ausführlicher untersucht zu werden. Jede Axe, welche den konjugierten Gebieten $ABC$ und $EDF$ angehört, kann mögliche Schraubengeschwindigkeiten enthalten, wenn der Parameter entweder nicht kleiner als jede der Grössen:

$$24) \qquad \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3$$

ist oder keine derselben übersteigt.

Im ersten Falle muss die Winkelgeschwindigkeit dem Gebiete $ABC$ und im zweiten Falle dem Gebiete $EDF$ angehören, also die entgegengesetzte Richtung haben. Natürlich sind die Grenzen, ausser welchen $p$ bleiben muss, für verschiedene Axen derselben Richtung verschieden.

Fig. 16.

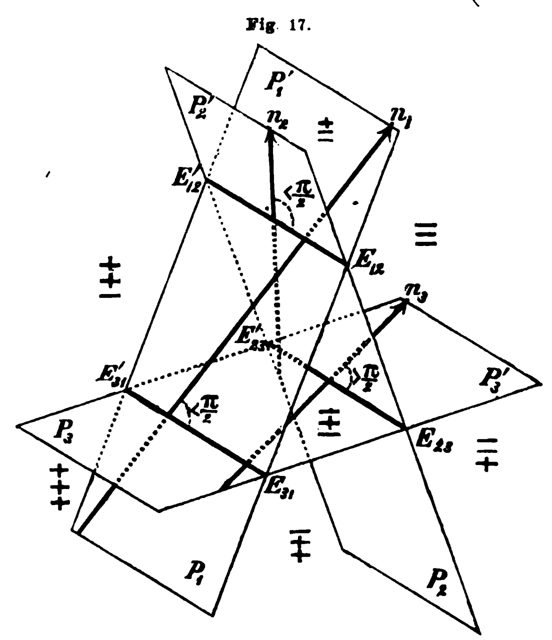



Bei drei Stützflächen giebt es also immer noch solche Richtungen, dass alle denselben entsprechenden Geraden mögliche Schraubenaxen darstellen.

13. Für die Schraubenaxen, welche der zweiten und dritten Gruppe angehören, ist eine nähere Untersuchung notwendig. Der Parameterwert solcher Schraubenaxen liegt, wie aus den Ungleichheiten 17)...22) ersichtlich ist, immer zwischen gewissen Grenzen. Betrachten wir das Gebiet $BDC$ und die ihnen entsprechenden Bedingungen 17). Damit eine Gerade, welche diesem Gebiete entnommen ist, mögliche Schraubenaxe wird, müssen diese Bedingungen mit einander vereinbar sein. Legen wir durch die Normalen $n_1$, $n_2$, $n_3$ die der gegebenen Axenrichtung parallelen Ebenen $P_1P'_1$, $P_2P'_2$, $P_3P'_3$ (Fig. 17); sie schneiden sich in den derselben Richtung parallelen Geraden $E_{23}$, $E'_{23}$, $E_{31}$, $E'_{31}$, $E_{12}$, $E'_{12}$ und teilen den ganzen Raum in sieben Gebiete, welchen in Bezug auf das gegebene Bündel paralleler Geraden, sieben verschiedene Kombinationen der Zeichen (+) und (−) für die Grössen 24) aus den acht überhaupt jetzt möglichen Zeichenverbindungen entsprechen. Diese sieben Gebiete sind in der Figur 17 perspektivisch und in der Figur 18 nach der Regel des § 7 dargestellt.

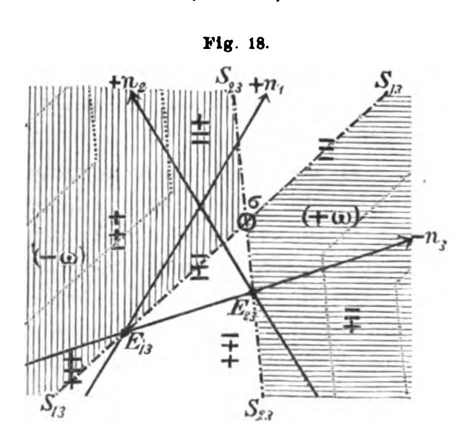
In den Gebieten $(++-)$, $(+--)$ und $(-+-)$ sind die Ungleichheiten 17) für keine Axe vereinbar; dagegen sind sie im Gebiete $(--+)$ für alle Geraden vereinbar. In den übrigen Gebieten können die Bedingungen 17) teilweise vereinbar sein. Nämlich im Gebiete $(---)$ muss die mögliche Schraubenaxe der Bedingung genügen, dass die **absoluten** Werte von $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ und $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ grösser als $\delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3$ seien. Das wird nur für diejenigen Geraden stattfinden, welche auf einer Seite der Grenzebenen (§ 6) $S_{13}$ und $S_{23}$ liegen. Die Spuren dieser Ebenen, das heisst die „Grenzgeraden" sind in der Figur 18 durch Strichpunktierung und das Gebiet $(+\omega)$ möglicher Schraubengeschwindigkeiten mit positiver Winkelgeschwindigkeitsrichtung durch horizontale Schraffierung hervorgehoben. Dieses Gebiet enthält auch einen Teil des Gebietes $(--++)$.

Fig. 17.




Dieselben Grenzgeraden $S_{13}$ und $S_{23}$ bestimmen auch das Gebiet möglicher Schraubengeschwindigkeiten mit entgegengesetzter Richtung der Winkelgeschwindigkeit $(-\omega)$. In der Figur 18 ist dieses Gebiet, welches den Bedingungen 20) entspricht, durch vertikale Schraffierung angegeben und enthält, wie man sieht, das ganze Gebiet $(++-)$ und zum Teil die Gebiete $(+--)$, $(-+-)$ und $(+++)$.

Fig. 18.



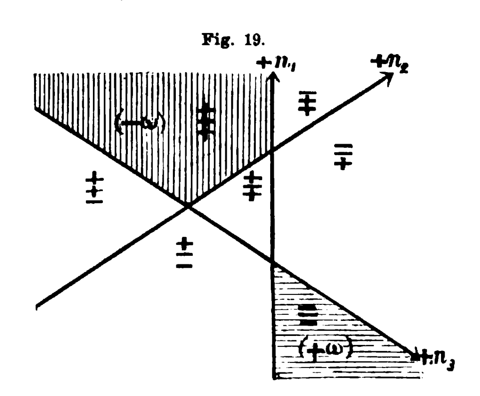

Auf ähnliche Weise kann man die Richtungen, welche den Ungleichheiten 18) und 21), oder 19) und 22) entsprechen, untersuchen. Der Unterschied wird nur in den Zeichenverbindungen und noch darin

bestehen, dass anstatt der Ebenen $S_{13}$, $S_{23}$ jetzt respektive die Ebenen $S_{32}$, $S_{12}$, oder $S_{12}$, $S_{13}$ die Hauptrolle spielen werden.

In allen Fällen, welche in der zweiten und dritten Gruppe enthalten sind, erfüllen die möglichen Schraubenaxen einer gegebenen Richtung den Raum zweier Scheitelwinkel, welche von den Grenzebenen, die durch die Durchschnittsgeraden zweier Normalebenen mit einer dritten gehen, gebildet werden.

Die anderen zwei Scheitelwinkel enthalten keine möglichen Schraubenaxen. Bei zwei Stützflächen konnte ein solcher Fall nicht eintreten; denn alle Geraden des Raumes konnten als Schraubenaxen dienen. Wir sehen also, dass zur Existenz solcher Geraden, welche keine möglichen Schraubenaxen sein können, mindestens drei Stützflächen nötig sind.

Fig. 19.




Da die Richtungen der Grenzebenen $S_{13}$ u. $S_{23}$ (Fig. 18) von den Verhältnissen

$$\operatorname{tg}\varphi_1 : \operatorname{tg}\varphi_2 : \operatorname{tg}\varphi_3$$

abhängen und jede dieser Tangenten im gegebenen Gebiete auf der Parameterkugel beliebig gross werden kann, so kann die Durchschnittsgerade der Ebenen $S_{13}$, $S_{23}$, welche in der Figur 18 durch den Punkt $\sigma$ dargestellt ist, jede mögliche Lage in den Gebieten $(---)$ und $(+++)$ annehmen. Diese Bemerkung wird später eine Anwendung finden.

In derselben Figur 18 sind durch feinere Punktierung diejenigen den Grenzebenen parallelen Ebenen angegeben, in welchen Schraubenaxen mit gleicher Differenz zwischen den Grenzen für den Parameterwert liegen (§ 7).

14. Um solche Geraden aufzufinden, um welche unter anderen Schraubenverschiebungen auch eine einfache Drehung möglich ist, muss man in der zur gegebenen Axenrichtung senkrechten Ebene die Gebiete suchen, in welchen alle drei Grössen 24) den Wert Null bekommen können. Bei den Axen der ersten und vierten Gruppe muss für die eine Richtung der Winkelgeschwindigkeit $(+\omega)$ das Gebiet $(---)$ genommen werden (Fig. 19), da das grösste von den Produkten 24) den Ungleichheiten 16) gemäss Null nicht übertreffen darf; bei der entgegengesetzten Richtung $(-\omega)$, welcher die Bedingungen 23) entsprechen, gehören die Axen möglicher Drehung dem Gebiete $(+++)$ an. Wenn die Axenrichtung der zweiten und dritten Gruppe z. B. den konjugierten Gebieten $BDC$ und $AEF$ auf der Parameterkugel angehört, also für die eine Richtung der Winkelgeschwindigkeit die Be-

dingungen 17) und für die entgegengesetzte Richtung die Bedingungen 20) erfüllt werden, so entsprechen (Fig. 18) dem Werte $p = 0$ respektive die Gebiete $(- - +)$ und $(+ + -)$.

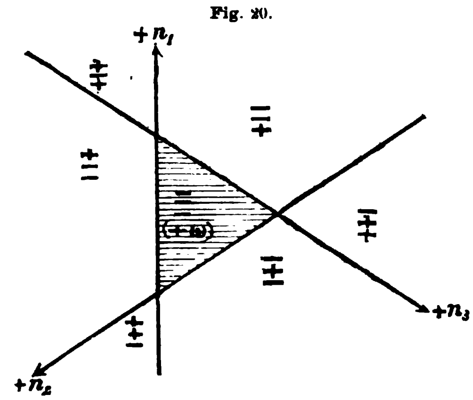


Fig. 20.

In den betrachteten zwei Beispielen erstrecken sich die Gebiete, in welchen die Axen einfacher Drehung lagen, ins Unendliche; man kann aber solche Lagen dreier Stütznormalen oder auch solche Axenrichtungen nehmen, dass das eine von den Gebieten $(+ \omega)$, $(- \omega)$ verschwindet und das andere geschlossen bleibt. Um dieses zu erreichen, bemerken wir, dass in der Ebene, welche zur gegebenen Axenrichtung senkrecht ist, von den acht Zeichenverbindungen immer nur sieben vorhanden sind; man kann dabei die Lage der Normalen so nehmen, dass die abwesende Zeichenverbindung zu einem der zwei Gebiete möglicher Drehung gehört; das andere Gebiet kommt dann in das geschlossene Dreieck zwischen den Projektionen der drei Normalen hinein. Solche Fälle sind in den Figuren 20, 21, 22 und 23 dargestellt; es ist leicht einzusehen, wie die ersten zwei Figuren aus der Figur 19 und die anderen zwei aus der Figur 18 entstanden sind.

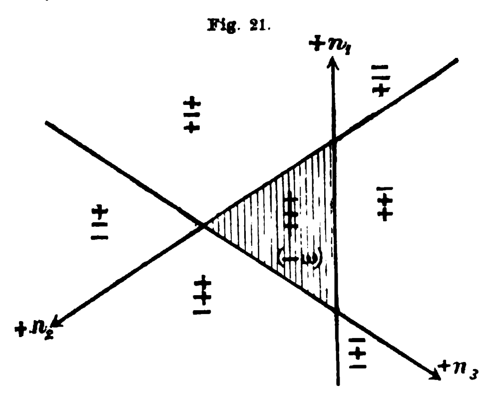


Fig. 21.

Die Bestimmung der Gebiete einfacher Drehung ist übrigens der Bestimmung möglicher Geschwindigkeitspole der ebenen Bewegung für den Fall von drei Stützkurven ganz analog.*

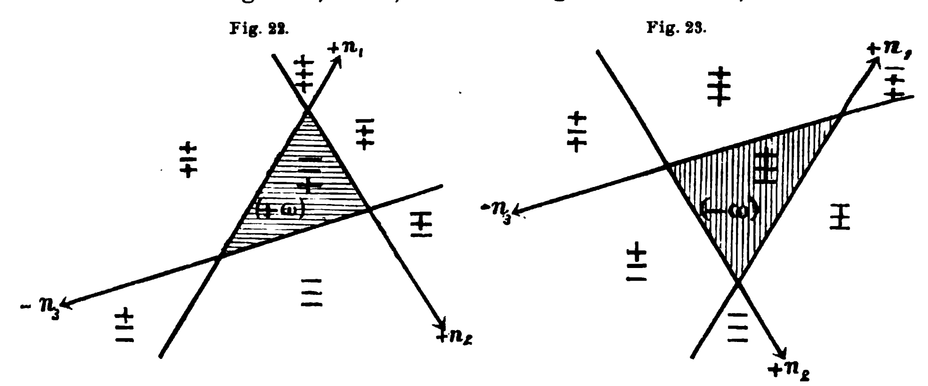
Wenn das Dreieck möglicher Drehungen in den letzten vier Figuren sich in einen Punkt verwandelt, so bleibt für die gegebene Richtung nur eine Drehungsaxe möglich. Alle solche Axen gehören offenbar zu einer Schar der Erzeugenden des Hyperboloides, dessen andere Schar von Erzeugenden die drei Stütznormalen enthält.

15. Wir setzen jetzt voraus, dass **zwei von den Stütznormalen einander parallel sind.** Sie mögen zuerst **gleichgerichtet** sein; dann verwandeln sich die Gebiete $ABC$, $BDC$, $AEF$ und $EDF$ der Parameterkugel (Fig. 16) in sphärische Zweiseite und die übrigen vier

* Man vergl.: Reuleaux, Theoretische Kinematik, 1875, S. 109—112.

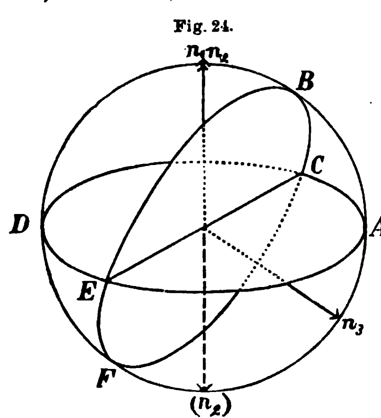
Gebiete bleiben nur als Grenzen der vorhergehenden vorhanden. Die entsprechende Darstellung auf der Parameterkugel ist in der Figur 24 gegeben.

Bei jeder Axenrichtung, welche den konjugierten Gebieten *EBCA* und *EFCD* angehört, sind, wie im allgemeinen Falle, Schrauben-




geschwindigkeiten möglich, wenn nur $p$ ausserhalb der Grenzen liegt, welche durch das kleinste und das grösste von den Produkten 24) bestimmt werden.

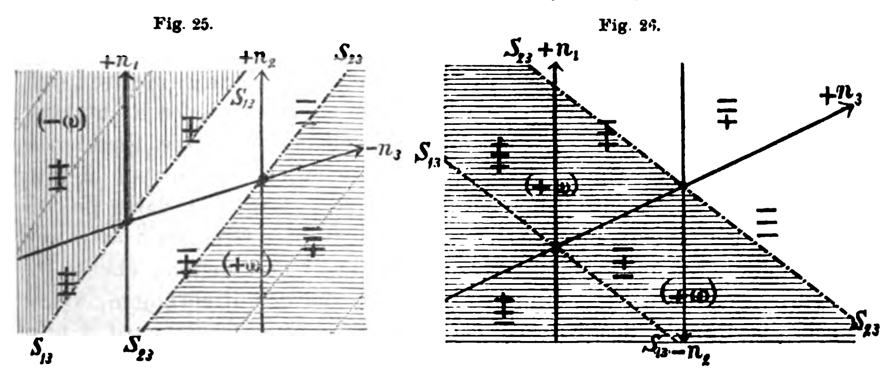
Den Gebieten *EDCB* und *EACF* entsprechen die Ungleichheiten 17) und 20). Von den sieben Gebieten der Figur 18 bleiben jetzt nur sechs übrig (Fig. 25). Es ist das Gebiet $(+--)$ verschwunden; aber bei einer anderen Lage der Normalen könnte auch ein anderes Gebiet verschwinden. Die Grenzebenen $S_{13}$ und $S_{23}$ werden jetzt parallel; denn das Verhältnis $\operatorname{tg}\varphi_1 : \operatorname{tg}\varphi_3$ im Gebiete $(+++)$ ist jetzt dem Verhältnisse $\operatorname{tg}\varphi_2 : \operatorname{tg}\varphi_3$ im Gebiete $(---)$ gleich, da hier die Winkel $\varphi_2$, $\varphi_3$ die Winkel $\varphi_1$, $\varphi_3$ des ersten Gebietes zu zwei Rechten ergänzen. Die möglichen Schraubenaxen werden also in der Figur 25 durch alle Punkte, welche nicht zwischen den beiden Grenzgeraden $S_{13}$, $S_{23}$ liegen,




bestimmt. Auf der einen Seite dieser Geraden befindet sich das Gebiet $(+\omega)$, und auf der anderen Seite $(-\omega)$. Für die einen Axen sind $\delta_2 \operatorname{tg}\varphi_2$ und $\delta_3 \operatorname{tg}\varphi_3$ die Grenzen für $p$, für die anderen Axen sind diese Grenzen $\delta_1 \operatorname{tg}\varphi_1$ und $\delta_3 \operatorname{tg}\varphi_3$. Durch feinere Punktierung sind Axen mit gleicher Parameterdifferenz angegeben.

Einfache Drehung, je nach der Richtung derselben, bleibt um die Axen der Gebiete $(--+)$ oder $(++-)$ möglich; einfache Translation kann nach solchen Richtungen erfolgen, welche auf der Parameterkugel (Fig. 24) durch das Gebiet *EBCA* bestimmt werden.

Nehmen wir jetzt an, dass die parallelen Normalen entgegengesetzt gerichtet sind. In diesem Falle nehmen die Gebiete $AEB$, $EBD$, $DCF$ und $ACF$ (Fig. 16) die Form von sphärischen Zweiseiten an, die übrigen vier Gebiete aber bleiben nur als Grenzen der ersteren bestehen. Wir werden wieder die Figur 24 im Auge behalten, nur mit der Annahme, dass die Normale $n_2$ die in den Klammern angezeigte Richtung hat. Dann entsprechen die konjugierten Gebiete $EBCA$ und $EFCD$ den Ungleichheiten 18) und 21); die möglichen Parameterwerte bleiben immer zwischen gewissen Grenzen eingeschlossen. Von den sieben Gebieten der ebenen Darstellung bleiben wieder nur sechs vorhanden (Fig. 26). Nur die eine von beiden Grenzebenen, $S_{23}$, behält jetzt ihre Bedeutung, da nur die Projektionen von $n_2$ und $n_3$, und nicht von $n_1$ und $n_3$, entgegengesetzte Vorzeichen haben (§ 7). Dass die Grenzebene $S_{23}$ allein jetzt die möglichen Schraubenaxen von den unmöglichen abgrenzt, davon kann man sich auf folgende Weise überzeugen. Im Gebiete $(--+)$ sind die Bedingungen 18) nicht vereinbar; im Gebiete $(-++)$ sind nur die ersten



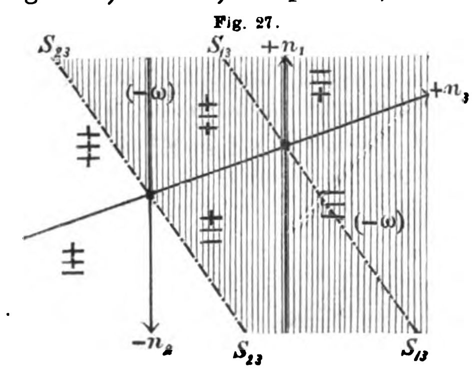

zwei dieser Bedingungen überall vereinbar, die zweite und dritte aber nur auf der einen Seite von $S_{23}$. In den Gebieten $(+++)$ und $(++-)$ ist $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 < \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$, da dort $\varphi_1 = \varphi_2$ und $\delta_1 < \delta_2$ ist; daher sind die Bedingungen 18) nur im Gebiete $(++-)$ überall vereinbar, im Gebiete $(+++)$ aber sind die zweite und dritte von diesen Bedingungen nur auf der einen Seite von $S_{23}$ vereinbar. Im Gebiete $(-+-)$ sind die Ungleichheiten 18) überall vereinbar, im Gebiete $(---)$ nur die zwei ersten, die zweite und dritte aber wieder nur auf einer Seite von $S_{23}$. Somit bestimmt das ganze Gebiet auf der einen Seite von $S_{23}$ mögliche Schraubengeschwindigkeiten, wenn dabei die Winkelgeschwindigkeit positive Richtung $(+\omega)$ hat. Mit der entgegengesetzten Richtung von $\omega$ sind überhaupt keine Schraubenaxen gegebener Richtung möglich, da die Ungleichheiten 21) in keinem von den sechs Gebieten (Fig. 26) vereinbar sind. — Obgleich jetzt die Ebene $S_{13}$ als Grenzebene keine Rolle spielt, so behält sie doch ihre Bedeutung bei der Bestimmung der Grenzen für den Parameter möglicher Schraubengeschwindigkeiten; nämlich es dienen als solche Grenzen entweder $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ und $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ oder $\delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3$ und $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$,

je nach der Seite von $S_{13}$, auf welcher die Schraubenaxe liegt; der erstere Fall tritt z. B. im Gebiete (+ + −) und der andere im Gebiete (− + +) ein.

Wenn die Normalprojektionen $(+n_1)$, $(-n_2)$ in anderer Ordnung folgen (Fig. 27), so ist keine Schraubengeschwindigkeit mit positiver Richtung $(+\omega)$, dagegen eine solche mit entgegengesetzter Richtung von $\omega$ möglich; die betreffenden Schraubenaxen liegen wieder auf einer Seite der Grenzebene $S_{23}$.

Bei der Betrachtung der konjugierten Gebiete, welche den Bedingungen 19) und 22) entsprechen, kommen wir zu analogen Resultaten, wobei nur anstatt der Ebene $S_{23}$ die Ebene $S_{13}$ als Grenze möglicher Schraubenaxen dienen wird.

Fig. 27.




Wir wollen jetzt die Grenzen der vier Gebiete der Parameterkugel (Fig. 24) betrachten.

Wenn die Normalen $n_1$ und $n_2$ gleichgerichtet sind, so entsprechen den Richtungen, welche durch die Punkte des Kreises $AEDC$ bestimmt werden, nur unendliche Werte von $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ und $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$. Die Grenzebenen $S_{13}$ und $S_{23}$ (Fig. 25) fallen daher mit den Normalebenen von $n_1$ und $n_2$ zusammen. Eine der Grenzen von $p$ wird jetzt unendlich; im übrigen kann die weitere Untersuchung ebenso wie im vorhergehenden Falle gemacht werden. Bei den Richtungen, welche durch die Punkte des Kreises $EBCF$ bestimmt werden, wird $\delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3$ unendlich; die Ebenen $S_{13}$ und $S_{23}$ fallen dann mit der Normalenebene von $n_3$ zusammen. Es verschwindet daher das Gebiet unmöglicher Schraubenaxen, welches zwischen diesen Ebenen gelegen war.

Nehmen wir jetzt an, dass $n_1$ und $n_2$ entgegengesetzt gerichtet sind. Den Punkten des Kreises $AECD$ auf der Parameterkugel (Fig. 24) entsprechend, fallen wieder die Grenzebenen $S_{13}$, $S_{23}$ (Fig. 26) mit den Normalenebenen von $n_1$ und $n_2$ zusammen. Da $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ und $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ unendlich gross geworden sind, so kann $p$, den Ungleichheiten 18) gemäss, nur in den Gebieten (− + +) und ( + −) endliche Werte bekommen. Ebenso in dem Falle, welchem die Figur 27 entspricht, bekommt $p$ nur in den Gebieten (+ − +) und (+ − ) endliche Werte.

Für die Richtungen, welche durch die Punkte des Kreises $EBCF$ bestimmt werden, ist $\delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3$ unendlich; $S_{13}$ und $S_{23}$ fallen daher mit der Normalenebene von $n_3$ zusammen. Für $p$ bleibt die Bedingung

$$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 < p \leqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$$

notwendig, mit der Voraussetzung, dass die dritte Stützfläche der Winkelgeschwindigkeit $(+\omega)$ nicht hinderlich ist; das wird (Fig. 26) in den

Gebieten $(++-)$, $(-+-)$ und $(---)$ erfüllt. Ähnliches finden wir auch im Falle der Figur 27.

Die Voraussetzung, dass die Winkelgeschwindigkeit den Grenzen der Gebiete auf der Parameterkugel (Fig. 24) entspricht, fallen lassend, merken wir noch einen speziellen Fall zweier entgegengesetzt gerichteter Normalen an: wenn sie auf einer Geraden liegen. Wäre die dritte Stützfläche nicht vorhanden, so könnte jede Gerade des Raumes als mögliche Schraubenaxe dienen, aber nur mit einem für jede Gerade bestimmten Werte des Parameters (§ 10). Durch die dritte Stützfläche werden mögliche Schraubenaxen jeder gegebenen Richtung von einer der Grenzebenen $S_{13}$ oder $S_{23}$ begrenzt, je nachdem die Projektion von $n_1$ oder $n_2$ auf die zu dieser Richtung senkrechte Ebene das andere Vorzeichen als die Projektion von $n_3$ bekommt. Im ganzen genommen bekommt jetzt der feste Körper einen grösseren Zwang als in den vorhergehenden Fällen, in welchen auch nur eine von den beiden Grenzebenen die Rolle spielte, aber der Parameter möglicher Axen keinen bestimmten Wert hatte, sondern nur zwischen gewissen Grenzen lag.

(Schluss folgt.)

---

## Ein Mittelwertsatz für ein System von $n$ Integralen.*

Von G. Kowalewski in Leipzig.

$\varphi(t)$ und $\psi(t)$ seien reelle und in dem Intervall $(a \dots b)$ stetige Funktionen. Zu jedem Wert $t$ aus diesem Intervall gehört alsdann ein bestimmter komplexer Wert $w = \varphi(t) + i\psi(t)$, dem in bekannter Weise ein Punkt der komplexen Ebene entspricht, welcher kurz als der zu jenem Wert $t$ gehörige Punkt $w$ bezeichnet werden soll. Seine rechtwinkligen Koordinaten sind $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Wir vermeiden den Ausdruck „Kurve" für die Gesamtheit der Punkte $w$, da man gewöhnlich unter einer Kurve ein Gebilde versteht, das sich durch die Bewegung eines Punktes erzeugen lässt, also an jeder Stelle eine bestimmte Richtung hat. Dies folgt aber keineswegs schon aus der Stetigkeit der Funktionen $\varphi$ und $\psi$, sondern setzt ausserdem ihre Differentiirbarkeit voraus. Man kennt nun eine grosse Anzahl von Beispielen für stetige, nichtdifferentiirbare Funktionen, und, um anzudeuten, dass diese von dem Geltungsbereich des hier zu beweisenden Satzes nicht ausgeschlossen sein sollen, wollen wir die Gesamtheit der Punkte $w$ nicht als Kurve, sondern einfach als die Punktmenge $w$ bezeichnen. Zunächst entwickeln wir einige ihrer Eigenschaften, auf die sich der Beweis unseres Satzes stützen wird.

1. Die Punktmenge $w$ liegt ganz innerhalb eines endlichen Quadrates. Wegen der Stetigkeit von $\varphi$ und $\psi$ ist es nämlich möglich, eine positive Grösse $M$ so zu bestimmen, dass in dem ganzen Intervall $(a \dots b)$ die

---

* Vorliegende Arbeit enthält eine in einzelnen Punkten vereinfachte Darstellung eines Satzes, den ich in Crelles Journal Heft 3 Band 117 veröffentlicht habe.

Ungleichungen $|\varphi(t)| < M$, $|\psi(t)| < M$ bestehen. Daraus ist aber ersichtlich, dass sämtliche Punkte $w$ innerhalb des durch die geraden Linien

$$x = \pm M, \quad y = \pm M$$

gebildeten Quadrates liegen.

2. Liegt innerhalb und ausserhalb eines geradlinigen Dreiecks ein Punkt $w$, so giebt es einen solchen auch auf der Begrenzung des Dreiecks.

Die Koordinaten eines Punktes $P$ auf der Begrenzung des Dreiecks lassen sich ansehen als stetige Funktionen einer Variablen $s$, für welche man z. B. die längs der Begrenzung und in bestimmtem Sinne gemessene Entfernung desselben von einer Ecke des Dreiecks wählen kann. Da ausserdem die Koordinaten eines Punktes $w$ stetige Funktionen von $t$ sind, so folgt, dass die Distanz $Pw$ von zwei solchen Punkten eine stetige Funktion der Variablen $s$ und $t$ ist, von denen $t$ zwischen $a$ und $b$, $s$ zwischen 0 und $p$ variiert (wenn $p$ den Umfang des Dreiecks bedeutet). Sollte also gegen die Behauptung der Fall $Pw = 0$ niemals eintreten, so müsste sich eine positive Grösse $\alpha$ angeben lassen derart, dass immer $Pw > \alpha$ wäre (dies ergiebt sich aus der Stetigkeit der Funktion $Pw$, da eine stetige Funktion, wenn sie beliebig kleine Werte annimmt, auch den Wert Null annehmen muss). Der Voraussetzung gemäss gehöre nun zu $t = t_0$ ein Punkt $w$ innerhalb, zu $t = T$ ein solcher ausserhalb des Dreiecks. Dann kann man durch Einschaltung von $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ das Intervall $(t_0 \ldots T)$ in $n$ gleiche Teile teilen und dabei $n$ so gross wählen, dass für zwei beliebige aufeinander folgende Teilpunkte $t_i$, $t_{i+1}$ (wobei $t_n = T$ ist) die Ungleichungen bestehen:

$$|\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| < \frac{\alpha}{2}, \quad |\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)| < \frac{\alpha}{2}.$$

Bezeichnen wir mit $w_i$ den zu $t_i$ gehörigen Punkt $w$, sodass also $w_i = \varphi(t_i) + i\psi(t_i)$ ist, so folgt für die Entfernung $\overline{w_i w_{i+1}}$ von zwei aufeinander folgenden Punkten der Reihe $w_0, w_1 \ldots w_n$ (dabei ist $w_n$ der zu $T$ gehörige Punkt $w$):

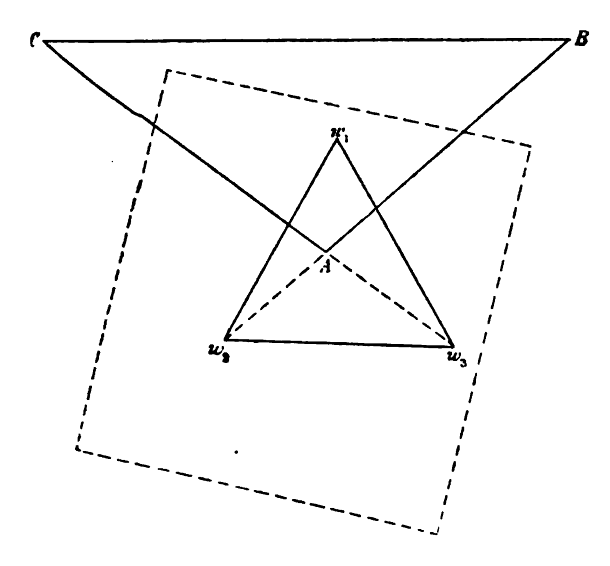
$$\overline{w_i w_{i+1}^2} < \frac{\alpha^2}{2}, \quad \text{also sicher} \quad \overline{w_i w_{i+1}} < \alpha.$$

Ist aber die Entfernung zweier Punkte $w$ kleiner als $\alpha$, so liegen entweder beide innerhalb oder beide ausserhalb des Dreiecks. Anderenfalls würde auf ihrer geraden Verbindungsstrecke ein Punkt der Begrenzung liegen, dessen Abstand von jedem der beiden Punkte $w$ dann auch kleiner als $\alpha$ wäre, was nach der Bestimmung von $\alpha$ nicht sein kann. Gehört also, wie vorausgesetzt, zu $t = t_0$ ein Punkt innerhalb des Dreiecks, so würde dies successiv für $t_1, t_2 \ldots t_n$ folgen. Zu $t_n = T$ gehört aber nach der Voraussetzung ein Punkt $w$ ausserhalb des Dreiecks.

3. $w_1, w_2, w_3$ seien drei Punkte $w$, die nicht in gerader Linie liegen. Wir betrachten einen Punkt $A$ im Innern des Dreiecks $w_1 w_2 w_3$. Verlängert man, wie es in der Figur geschehen ist, zwei der Verbindungslinien $Aw_1$, $Aw_2$, $Aw_3$, z. B. $Aw_2$ und $Aw_3$, über $A$ hinaus, so kann man sie offenbar so weit verlängern, dass die Verbindungslinie $BC$ ihrer Endpunkte ganz

ausserhalb jenes Quadrates liegt, dessen Existenz unter 1) bewiesen wurde (in der Figur ist es punktiert gezeichnet). Dann enthält $BC$ keinen Punkt $w$, da alle diese Punkte innerhalb jenes Quadrates liegen. Nun können wir aber auf das Dreieck $ABC$ den unter 2) bewiesenen Satz anwenden. In der That liegt ein Punkt $w$ (nämlich $w_1$) innerhalb und ein Punkt $w$ (nämlich $w_2$ oder auch $w_3$) ausserhalb desselben. Also liegt nach jenem Satz auch auf der Begrenzung ein Punkt $w$, und zwar, da $BC$ keinen solchen enthält, entweder auf $AB$ oder auf $AC$. Wenn wir also von $w_2$ und von $w_3$ aus geradlinig über $A$ hinausgehen, so treffen wir sicher auf einen Punkt $w$, falls nicht $A$ selbst ein solcher Punkt ist. Jeder Punkt im Innern eines durch drei Punkte $w$ gebildeten Dreiecks ist also entweder selbst ein Punkt $w$, oder er liegt auf der geraden Verbindungsstrecke von zwei solchen Punkten.

Um dieses Resultat und auch die folgenden kürzer ausdrücken zu können, führen wir folgende Bezeichnung ein: Wir nennen $\bar{w}$ jeden Punkt, der entweder selbst ein Punkt $w$ ist oder auf der geraden Verbindungsstrecke von zwei Punkten $w$ liegt (man würde also die Punktmenge $\bar{w}$ aus der Punktmenge $w$ dadurch erhalten, dass man alle möglichen Paare von Punkten $w$ verbindet. Bei einer Kurve im eigentlichen Sinne wären dies alle Sehnen derselben). Mit Hilfe dieser Bezeichnung können wir unser Resultat jetzt so aussprechen: Die ganze Fläche eines durch drei Punkte $w$ bestimmten Dreiecks besteht aus Punkten $\bar{w}$ (offenbar gilt dieser Satz auch, wenn $w_1$, $w_2$, $w_3$ in gerader Linie liegen).




4. Nimmt man $n$ Punkte $w$ ($w_1, w_2, \ldots w_n$), so überdecken die aus allen möglichen Kombinationen dieser Punkte zu je dreien hervorgehenden Dreiecke ein gewisses Stück der Ebene, dessen Punkte somit nach 3) sämtlich Punkte $\bar{w}$ sind.

Nun zeigt man leicht, dass $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_n w_n$ unter der Voraussetzung, dass $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ positiv und von der Summe

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_n = 1$$

sind, ein Punkt dieses Ebenenstückes, mithin ein Punkt $\bar{w}$ ist. Der Beweis beruht auf einem Schluss von $n$ auf $n+1$.

5. Für unsern eigentlichen Zweck brauchen wir nur noch eine Eigenschaft der Punktmenge $\bar{\bar{w}}$. Sind

$$\varphi(t) + i\psi(t) \quad \text{und} \quad \varphi(\bar{t}) + i\psi(\bar{t})$$

zwei Punkte $w$, so hat ein beliebiger Punkt auf der Verbindungsstrecke beider die Koordinaten

$$x = \lambda\varphi(t) + \bar{\lambda}\varphi(\bar{t}), \quad y = \lambda\psi(t) + \bar{\lambda}\psi(\bar{t}),$$

wo $\lambda$, $\bar{\lambda} \geqq 0$ und $\lambda + \bar{\lambda} = 1$. Man erhält offenbar alle Punkte $\bar{w}$, wenn man $\lambda$ von 0 bis 1 und $t$, $\bar{t}$ zwischen $a$ und $b$ variieren lässt. Nun sei $A + iB$ ein Punkt, von dem man weiss, dass in beliebiger Nähe von ihm Punkte $\bar{w}$ liegen, also eine sogenannte Häufungsstelle oder ein Grenzpunkt (nach Georg Cantor) der Menge $\bar{w}$. Dann nimmt also die Funktion:

$$[A - \lambda\varphi(t) - \bar{\lambda}\varphi(\bar{t})]^2 + [B - \lambda\psi(t) - \bar{\lambda}\psi(\bar{t})]^2,$$

welche das Quadrat der Entfernung eines Punktes $\bar{w}$ vom Punkte $A + iB$ ausdrückt, beliebig kleine Werte, mithin als stetige Funktion der darin auftretenden Variablen $\lambda$, $t$, $\bar{t}$ auch den Wert Null an. $A + iB$ fällt also mit einem Punkte $\bar{w}$ zusammen, oder jede Häufungsstelle von $\bar{w}$ gehört selbst zu $\bar{w}$. Eine solche Punktmenge nennt man wohl auch eine abgeschlossene, und $\bar{w}$ ist demnach eine abgeschlossene Punktmenge.

Kehren wir nach diesen Vorbereitungen zu den Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ zurück, so ist der Beweis des beabsichtigten Satzes ziemlich kurz zu führen.

Wir betrachten die Integrale:

$$J_1 = \int_a^b \varphi(t)\,dt, \quad J_2 = \int_a^b \psi(t)\,dt.$$

Nach der Definition des Integrales ist:

$$J_1 + \varepsilon_1 = \sum_0^{n-1}(t_{i+1} - t_i)\varphi(t_i), \quad J_2 + \varepsilon_2 = \sum_0^{n-1}(t_{i+1} - t_i)\psi(t_i),$$

wenn $t_0 = a$, $t_n = b$ und $t_1 t_2 \ldots t_{n-1}$ in dieser Reihenfolge zwischen $a$ und $b$ eingeschaltet sind. Addieren wir die mit $i$ multiplizierte zweite Gleichung zur ersten ($i$ ist natürlich $\sqrt{-1}$ und nicht mit dem Index $i$ zu verwechseln), setzen ferner $\varphi(t_i) + i\psi(t_i) = w_{i+1}$, $t_{i+1} - t_i = \lambda_{i+1}(b - a)$, so ergiebt sich:

$$\frac{J_1 + iJ_2}{b - a} + \frac{\varepsilon_1 + i\varepsilon_2}{b - a} = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_n w_n.$$

Da $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ positiv und von der Summe $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ sind, so ist nach 4) $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_n w_n$ ein Punkt $\bar{w}$. Beachtet man ausserdem, dass sich $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ durch passende Wahl der $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ und Vergrösserung von $n$ beliebig verkleinern lassen, so

erkennt man, dass in beliebiger Nähe des Punktes $\frac{J_1 + iJ_2}{b-a}$ Punkte $\overline{w}$ liegen, und kann endlich nach 5) schliessen, dass $\frac{J_1 + iJ_2}{b-a}$ selbst ein Punkt $\overline{w}$ ist. Unter 5) wurde ferner ausgeführt, dass die Koordinaten jedes Punktes $\overline{w}$ durch $\lambda\varphi(t) + \overline{\lambda}\varphi(\overline{t})$, $\lambda\psi(t) + \overline{\lambda}\psi(\overline{t})$ ausdrückbar sind. Es ist also, ausführlich geschrieben:

$$\int_a^b \varphi(t)dt = (b-a)[\lambda\varphi(t) + \overline{\lambda}\varphi(\overline{t})],$$

$$\int_a^b \psi(t)dt = (b-a)[\lambda\psi(t) + \overline{\lambda}\psi(\overline{t})].$$

Dies ist das Resultat, auf welches wir kommen wollten. In Worten lässt es sich so formulieren:

Sind $\varphi(t)$, $\psi(t)$ Funktionen, von denen nur vorausgesetzt wird, dass sie reell und in dem Intervall $(a \ldots b)$ stetig sind, so lassen sich stets zwei positive Zahlen $\lambda$ $\overline{\lambda}$ von der Summe $\lambda + \overline{\lambda} = 1$, ferner zwei Werte $t$, $t$ aus dem Intervall $(a \ldots b)$ so bestimmen, dass die obigen Gleichungen bestehen.

Für $n$ Integrale $\int_a^b \varphi_i(t)dt$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ gilt ein ganz analoger Satz, den wir ohne Beweis hier nur aussprechen wollen:

Sind die $\varphi_i$ reelle, von $a$ bis $b$ stetige Funktionen, so lassen sich $n$ positive Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ von der Summe

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1,$$

ferner aus dem Intervall $(a \ldots b)$ die Werte $t_1, t_2, \cdots t_n$ so bestimmen, dass die $n$ Gleichungen bestehen:

$$\int_a^b \varphi_i(t)dt = (b-a)[\lambda_1\varphi_i(t_1) + \lambda_2\varphi_i(t_2) + \cdots + \lambda_n\varphi_i(t_n)] \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

---

## Über eine neue Folgerung aus der Maxwellschen Theorie der elektrischen Erscheinungen.

Von Dr. **A. Scheye** in Göttingen.

Auf den Umstand, dass bis jetzt keinerlei Wirkungen des galvanischen Stromes auf ruhende Elektrizität beobachtet worden sind, stützt bekanntlich Clausius* seinen Einwand gegen Webers Grundgesetz der Elektrodynamik; er weist nämlich nach, dass dasselbe nur dann mit der erwähnten Erfahrung in Einklang steht, wenn man die — seiner Meinung nach unwahr-

* Clausius, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 82, S. 89, 1877.

scheinliche — Annahme macht, dass im elektrischen Strome sich beide Elektrizitäten, und zwar in entgegengesetztem Sinne, bewegen. Er selbst stellt daher ein neues Grundgesetz auf, das an diesem angeblichen Mangel nicht leidet. Demgegenüber erscheint es mir von Interesse, zu untersuchen, was die auf ganz anderen Voraussetzungen beruhende Maxwellsche Theorie über diesen Gegenstand aussagt.

Aus den allgemeinen Maxwellschen Gleichungen erhält man den Fall des stationären Stromes dadurch, dass man die Abgeleiteten der elektrischen und magnetischen Kraftkomponenten nach der Zeit $= 0$ setzt. Es ergiebt sich alsdann, dass die elektrischen Kräfte überall, im Leiter wie im Dielektrikum, ein Potential $\varphi$ besitzen, welches die Gleichung $\Delta\varphi = 0$ befriedigt. Ferner erfordern die Grenzbedingungen an der Berührungsstelle zweier beliebigen homogenen Körper, also auch eines Leiters und eines Dielektrikums, dass die tangentielle Komponente der elektrischen Kraft stetig ist.* Da nun der Strom, mithin auch die elektrische Kraft an der Berührungsfläche des Isolators und des Leiters in letzterem tangentiell verläuft und im allgemeinen von 0 verschieden ist, so folgt schon hieraus, dass auch im Dielektrikum in der Nähe des Leiters elektrische Kräfte wirksam sein müssen.

Es mögen zwei aufeinander senkrechte, in der Oberfläche des Leiters gelegene Richtungen mit $\lambda$ und $\mu$, die Normale zur Fläche mit $\nu$ bezeichnet werden, dann fordern die Grenzbedingungen, wenn sich der Index 1 auf den Leiter, der Index 2 auf den Isolator bezieht, dass an der Berührungsstelle der beiden Körper stets

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda},$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mu} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\mu},$$

oder

$$\frac{\partial(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial\lambda} = \frac{\partial(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial\mu} = 0$$

ist, das heisst, dass längs der Grenzfläche $\varphi_1 - \varphi_2$ einen konstanten Wert hat.

Ist nun $\varphi_1$ für den Leiter bereits gefunden, so hat man, um das elektrische Feld im Isolator zu ermitteln, noch folgende Aufgabe zu lösen: Es ist zu bestimmen eine Funktion $\varphi_2$, welche im ganzen Dielektrikum mit ihren Ableitungen stetig ist, der Gleichung $\Delta\varphi_2 = 0$ genügt, an einer bestimmten Fläche den gegebenen Wert $\varphi_1$ annimmt und im Unendlichen $= 0$ wird. Allerdings ist $\varphi_1$ nur bis auf eine Konstante bekannt, und im allgemeinen Falle müsste zu $\varphi_2$ noch eine Funktion $\psi$ addiert werden, welche die Gleichung $\Delta\psi = 0$ befriedigt, im Unendlichen 0 wird und an der Grenzfläche gegen den Leiter einen konstanten Wert $k$ hat; doch würde dieses Glied des Potentials nur eine statische Ladung des Leiters anzeigen, die sich dem elektrischen Strome superponiert. — Nicht berücksichtigt sind hierbei die Unstetigkeiten, welche bei gleichzeitiger Berührung zweier Leiter und eines Dielektrikums auftreten; man kann jedoch leicht

* Vergl. Hertz, Wiedemanns Annalen 40, S. 590 und 591, 1890.

eine Anordnung ersinnen, bei der solche Kontaktstellen nicht in Betracht zu ziehen sind.

Die Stetigkeitsbedingungen für den Übergang vom Leiter zum Isolator ermöglichen es, wenn das Potential für den Leiter bekannt ist, ohne weitere Rechnung wenigstens den Wert der tangentiellen Komponente der elektrischen Kraft im Isolator unmittelbar am Leiter anzugeben. Es fliesse z. B. der Strom durch eine Zelle von folgender Beschaffenheit: Die Anode bestehe aus einem massiven Metallcylinder vom Radius $a$ und der Höhe $h$, den eine leitende Flüssigkeit umgiebt; als Kathode diene ein Hohlcylinder aus demselben Metall, der den inneren Radius $b$ hat, und dessen Achse mit der des ersten Cylinders zusammenfällt. Vernachlässigt man den Widerstand des Metalles gegen den der Flüssigkeit, nimmt also das Potential an der Oberfläche der Elektroden als konstant an, so ist innerhalb des flüssigen Leiters

$$\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\log \frac{a}{b}} \log \varrho + \text{const},*$$

wo $\varrho$ den Abstand von der Achse der beiden Cylinder, $\varphi_1$ und $\varphi_2$ die Werte des Potentials an den beiden Berührungsflächen zwischen Metall und Flüssigkeit bedeuten; die an diesen beiden Stellen stattfindenden Potentialsprünge können vernachlässigt werden, da sie sich gegenseitig aufheben. Haben die Zuleitungsdrähte nur geringen Widerstand, so kann $\varphi_1 - \varphi_2 = E$, der elektromotorischen Kraft der Batterie, gesetzt werden, folglich:

$$\varphi = \frac{E}{\log \frac{a}{b}} \log \varrho + \text{const},$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{E}{\varrho \log \frac{b}{a}}.$$

Ist $b$ etwa $= e a$, wo $e$ die Basis des natürlichen Logarithmensystems, so ist die tangentielle Komponente der elektrischen Kraft im Isolator dicht am Leiter $= \frac{E}{\varrho}\cdot$ Da elektrostatisches Maß zu Grunde gelegt ist, so ist für 1 Volt $\frac{1}{300}[C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}]$ zu setzen, und man erkennt leicht, dass sich für mässige Werte der elektromotorischen Kraft sehr kleine Kraftwirkungen im Isolator ergeben. Es ist also nicht unwahrscheinlich, dass diese geringen Kräfte bisher der Beobachtung entgangen sind und durch eine sorgfältige experimentelle Untersuchung wirklich nachgewiesen werden können, zu der die Anregung zu geben der Zweck dieser Darlegung ist.

---

* Vergl. Kirchhoff, Vorlesungen über Elektrizität und Magnetismus, S. 124.



## Über einen Satz der Statik.

Von **K. Th. Vahlen** in Königsberg i. Pr.

Ein räumliches Kräftesystem ist auf unendlich viele Arten entweder auf zwei nicht in einer Ebene wirkende Kräfte oder auf ein Kräftepaar und eine nicht in dessen Ebene wirkende Kraft zu reduzieren. Unter den ersteren Reduktionen sind am bemerkenswertesten die auf zwei gleiche Kräfte, unter den letzteren diejenige, bei der die Richtung der einzelnen Kraft auf der Ebene des Kräftepaares senkrecht steht. Dass eine solche Reduktion möglich ist, stimmt mit dem Satze überein: Eine beliebig kleine Bewegung eines Körpers könne als Schraubenbewegung aufgefasst werden mit aufeinander senkrechten Richtungen des Fortschreitens und der Drehung. Hieraus erklärt sich die Bezeichnung der Geraden, in welcher jene Einzelkraft wirkt, als der „Hauptdrehlinie“ des Kräftesystems.

Über diese Hauptdrehlinie ist von Schweins* ein Satz aufgestellt worden, den später Möbius** in einfacherer Weise bewies. Dieser Satz lautet:

> Hat ein System von Kräften zwei nicht in einer Ebene wirkende Kräfte zu Resultanten, so wird von der Geraden, welche diese zwei Kräfte rechtwinklig schneidet, auch die Hauptdrehlinie des Systems rechtwinklig geschnitten.

Diese Eigenschaft der Hauptdrehlinie ergiebt sich am einfachsten und natürlichsten, wenn man die Zurückführung zweier Kräfte auf ein Kräftepaar und eine dazu senkrechte Kraft durch eine geeignete Konstruktion wirklich ausführt.

Es seien nämlich $PP'$ und $QQ'$ die beiden Kräfte, $PQ$ die kürzeste, auf beiden senkrechte Verbindungslinie, $R$ der Mittelpunkt von $P'Q'$. Durch $PQ$ werde eine Ebene $E$ senkrecht zur Ebene $PQR$ gelegt. Zerlegt man nun $PP'$ und $QQ'$ respektive in $PP''$, $PP'''$ und $QQ''$, $QQ'''$, so dass die Kräfte $PP''$, $QQ''$ in der Ebene $E$, die Kräfte $PP'''$, $QQ'''$ senkrecht zu ihr wirken, so bilden $PP''$, $QQ''$ ein Kräftepaar, während sich die Kräfte $PP'''$, $QQ'''$ zu einer einzigen, zur Ebene $E$ des Kräftepaares senkrechten zusammensetzen: die Gerade, in der diese Kraft wirkt, ist also die Hauptdrehlinie des Systems. Dieselbe schneidet $PQ$ rechtwinklig, wie aus der Konstruktion hervorgeht.

* Crelles Journal Band 32, S. 227–230.

** Crelles Journal Band 36, S. 89–90. Möbius' Werke Band 3, S. 567–570.

## Berichtigung.

In Figur 2, S. 130 muss an der Kurve $e_1 p_3 p_4 e_2$ die Bezeichnung $\varphi^{-2}\psi\nu e$ (statt $\varphi^2\psi\nu e$) stehen.



# Über Schraubengeschwindigkeiten eines festen Körpers bei verschiedener Zahl von Stützflächen.

Von

P. Somoff

in Warschau.

Schluss.

16. Wenn alle drei Normalen einer Ebene parallel sind, so verwandelt sich ein Paar konjugierter Gebiete auf der Parameterkugel (Fig. 16, Heft 3) in Punkte; und das kann mit jedem der vier Paare konjugierter Gebiete geschehen. In den Figuren 28, 29, 30 und 31, welche diese vier Fälle darstellen, sind durch punktierte Gerade die Spuren der drei zu den Normalen senkrechten Centralebenen bezeichnet, und die zwischen denselben stehenden Ungleichheitszeichen entsprechen den Bedingungen 16) . . . . . . 23). Die Verteilung möglicher Schraubenaxen verschiedener Richtungen, welche den sechs übrig gebliebenen Gebieten entsprechen, stellt nichts wesentlich neues dar; über die Schraubenaxen aber, welche zu den drei Normalen senkrecht sind, bemerken wir folgendes. Da nach den beiden Richtungen dieser Axen eine Translation möglich ist, so sind auf allen denjenigen dieser Axen, um welche eine einfache

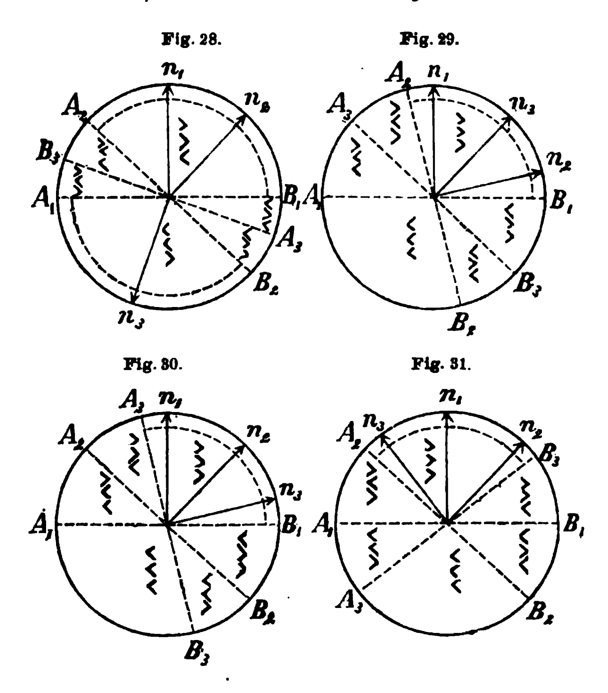


Fig. 28. Fig. 29. Fig. 30. Fig. 31.

Drehung erfolgen kann, auch Schraubengeschwindigkeiten mit willkürlichem Parameterwerte möglich. Die Aufsuchung solcher Axen kommt also auf die im § 14 betrachtete Frage hinaus; der Unterschied besteht nur darin, dass jetzt in den Figuren 19, 20, 21, 22 und 23 (siehe Heft 3): 1. die Vorzeichen (+), (—) bei den Spuren der Normalebenen wegfallen und 2. die dort bestimmten Gebiete möglicher Drehungsaxen zu Gebieten möglicher Schraubenaxen von willkürlichem Parameter werden. Wenn nur ein geschlossenes Gebiet (Fig. 20, 21, 22 und 23, Heft 3) vorhanden ist und sich in einen Punkt zusammenzieht, so bleibt nur eine Schraubenaxe mit willkürlicher Parametergrösse möglich.

17. Es werden weiter die Normalen zu den Stützflächen einander parallel vorausgesetzt. Man muss hier zwei Fälle unterscheiden: wenn alle drei Normalen gleichgerichtet sind, und wenn eine von ihnen den beiden anderen entgegengerichtet ist. Den ersten Fall brauchen wir weiter nicht zu untersuchen, da er offenbar zu ähnlichen Resultaten führt, wie der Fall von zwei parallelen und gleichgerichteten Normalen (§ 10).

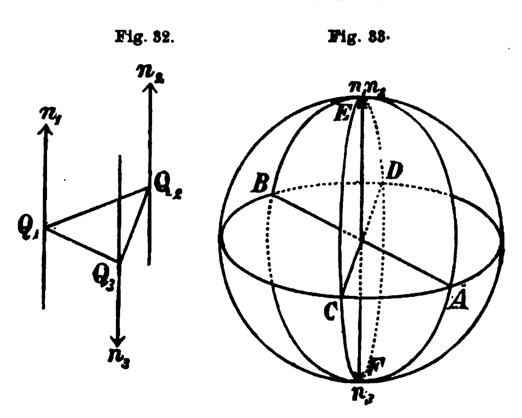
Wir nehmen also weiter an, dass die eine Normale, $n_3$, den zwei anderen entgegengerichtet ist. Seien $Q_1 Q_2 Q_3$ (Fig. 32) eine zu den Normalen senkrechte Ebene, $AEBF$ und $CEDF$ (Fig. 33) zwei Centralebenen der Parameterkugel, welche resp. den Normalen $n_3$, $n_1$ und $n_2$, $n_3$ parallel sind, und $ACBD$ eine zu den letzteren senkrechte Centralebene. Die Oberfläche der Parameterkugel wird somit in acht Gebiete geteilt, welche für die Richtungen möglicher Schraubenaxen bestimmend sein werden. Es möge zuerst die Richtung der Winkelgeschwindigkeit dem Gebiete $BEC$ angehören; dann liegt in der nach § 7 gemachten ebenen Darstellung (Fig. 34) die Gerade $(-n_3)$ ausserhalb der Geraden $(+n_1)$, $(+n_2)$; und da jetzt $\omega$ mit $n_1$ und $n_2$ spitze Winkel bildet, so muss $p$ den Bedingungen 17) genügen. Es ist leicht einzusehen, dass dieselben in allen vier Gebieten der Figur 34 erfüllt werden, da überall $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ und $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ kleiner als $\delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3$ sind. Für die entgegengesetzte Richtung der Winkelgeschwindigkeit, welche also aus dem Gebiete $DAF$ genommen ist (Fig. 35), finden wir keine möglichen Schraubenaxen; denn die diesem Falle entsprechenden Ungleichheiten werden in keinem der vier Gebiete erfüllt. Ähnliche Resultate bekommt man auch bei der Betrachtung der konjugierten Gebiete $AED$ und $BCF$, mit dem Unterschiede nur, dass zur Möglichkeit der Schraubenaxen notwendig ist, dass die Richtung der Winkelgeschwindigkeit dem zweiten dieser Gebiete angehört, dieselbe also mit den Normalen $n_1$ und $n_2$ stumpfe Winkel bildet.

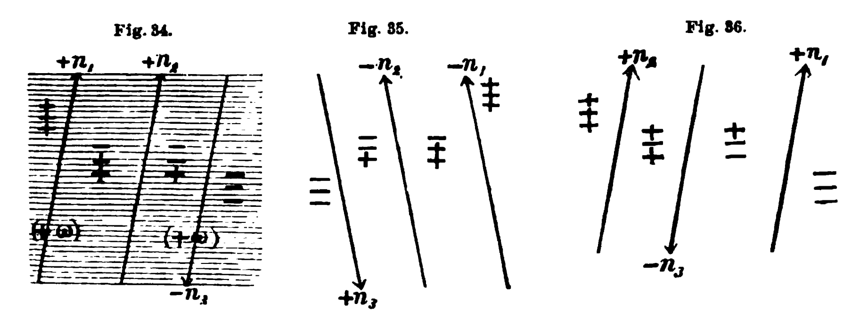
Mit den Winkelgeschwindigkeiten, welche den übrigen vier Gebieten $BED$, $CAF$, $CEA$ und $BDF$ angehören, sind keine Schraubengeschwindigkeiten möglich. Wenn wir z. B. die Winkelgeschwindigkeitsrichtung aus dem Gebiete $BED$ nehmen, also die Bedingungen 17)

beachten, so finden wir, dass in der zu dieser Richtung senkrechten Ebene der Figur 36 die Ungleichheiten 17) in keinem der vier Gebiete vereinbar sind. Ähnliches bekommt man auch für die übrigen drei genannten Gebiete.

Alle diese Bemerkungen zusammenfassend, kann man sagen:

Wenn die drei Normalen zu den Stützebenen einander parallel sind und die dritte von ihnen den zwei ersten entgegengerichtet ist, so ist für die Möglichkeit der Schraubenaxen einer gegebenen Richtung notwendig und hinreichend, dass die durch die dritte Normale zur gegebenen Richtung parallel gezogene Ebene zwischen den anderen zwei Normalebenen von derselben Richtung liegt. Auf allen dieser Bedingung genügenden Axen sind Schraubengeschwindigkeiten möglich, wenn ihre Parameter zwischen gewissen, für verschiedene Axen verschiedenen, aber im allgemeinen endlichen Grenzen liegen. Auf allen anderen Axen sind keine Schraubengeschwindigkeiten möglich,




die zu den Normalen senkrechten Geraden ausgenommen, welche mögliche Translationsrichtungen darstellen.

Hier finden wir den einzigen Fall, wo bei drei Stützflächen solche Richtungen existieren, dass keine Geraden dieser Richtungen als mögliche Schraubenaxen dienen können.

In der obigen Betrachtung müssen alle den Normalen parallelen Axen ausgeschlossen werden; denn für diese Richtung bleiben die Normalebenen unbestimmt. Aber es ist unmittelbar ersichtlich, dass um solche Axen nur eine einfache Drehung, und zwar nach beiden Richtungen, möglich ist.

Wenn die drei parallelen Normalen in einer Ebene $P$ liegen und die mittlere von ihnen den zwei anderen Normalen entgegengerichtet ist, so werden die Bedingungen für mögliche Schraubenaxen nur bei denjenigen Geraden erfüllt, welche der Ebene $P$ parallel sind; denn auf der Parameterkugel werden die Richtungen möglicher Schraubenaxen nur durch die Punkte der Kreislinie bestimmt, deren Ebene eine zur Ebene $P$ parallele Centralebene ist. Auf jeder solchen Schraubenaxe kann der Parameter nur einen bestimmten Wert haben. Dieser Wert ist für die Axen, welche in der Ebene $P$ selbst liegen und zu den Normalen nicht senkrecht sind, gleich 0; sind diese Axen ausserdem zu den Normalen senkrecht, so bleibt für sie jeder Parameterwert möglich. Endlich bleibt noch jede zu den Normalen senkrechte Translation und um jede zu denselben parallele Gerade eine einfache Drehung möglich.

Die zuletzt betrachtete Lage der Normalen hat die Eigentümlichkeit, dass dabei der feste Körper den grössten bei drei Stützflächen möglichen Zwang bekommt.

In der That, bei jeder anderen Lage der Normalen existieren auf der Parameterkugel ganze sphärische Gebiete möglicher Schraubenaxenrichtungen und der Parameter hat auf jeder Axe nicht einen bestimmten Wert, sondern bleibt nur in gewisse Grenzen geschlossen, mit Ausnahme eines am Ende des § 15 betrachteten Falles, wobei aber für die Schraubenaxen alle Richtungen möglich bleiben.

### Vier Stützflächen.

18. Die obige Betrachtungsweise können wir auch bei vier und mehr Stützflächen beibehalten. Die Grenzebenen werden dabei wieder eine wesentliche Rolle spielen.

Dem Falle von drei Stützflächen analog kann man, wenn vier Stützflächen gegeben sind, die Gebiete auf der Parameterkugel in fünf Gruppen teilen, je nachdem die Zahl der Normalen, mit welchen die Winkelgeschwindigkeit spitze Winkel bildet, gleich 4, 3, 2, 1 oder 0 ist.

Diesen fünf Gruppen entsprechen der Reihe nach 1, 4, 6, 4, 1 Gebiete der Parameterkugel, nach der Zahl der Zeichenverbindungen, welche bei den Grössen:

$$25)\qquad \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3, \quad \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4$$

auftreten können. Nicht alle diese 16 Gebiete können aber auf der Parameterkugel zugleich vorhanden sein; denn die vier zu den Normalen senkrechten Centralebenen teilen die Kugel nur in 14 Gebiete, der allgemeinen Formel:

$$26)\qquad A_k = k(k-1) + 2$$

gemäss, wo $k$ die Zahl der gezogenen Ebenen und $A_k$ die Zahl der erhaltenen Gebiete bezeichnet.

Überhaupt, wenn $k > 3$ ist, so bleibt $A_k < 2^k$, und dann werden nicht für alle Zeichenverbindungen der Grössen $\delta \operatorname{tg} \varphi$ entsprechende Gebiete auf der Parameterkugel sich vorfinden. Da alle gebliebenen Gebiete paarweise konjugiert sind, so sind auch die verschwindenden Gebiete konjugiert.

Um zu bestimmen, welches Paar konjugierter Gebiete bei vier Stützflächen verschwindet, betrachten wir die acht Gebiete (Fig. 16, Heft 3), welche den drei ersten Normalen $n_1$, $n_2$, $n_3$ entsprechen; dann wird das Verschwinden zweier konjugierten Gebiete davon abhängen, in welches der acht genannten Gebiete das positive Ende der Normalen $n_4$ hineinfällt. Z. B., wenn die Richtung $(+n_4)$ im Gebiete $ABC$ der Figur 16 (Heft 3) sich befindet, so wird dieses ganze Gebiet, welches den Ungleichheiten 16) entspricht, auch den Ungleichheiten:

$$27)\quad p > \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1,\quad p \geqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2,\quad p \geqq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3,\quad p > \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4$$

und ebenso das ganze ihm konjugierte Gebiet $EDF$, welches den Ungleichheiten 23) entspricht, den Ungleichheiten:

$$28)\quad p \leqq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1,\quad p \leqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2,\quad p < \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3,\quad p \leqq \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4$$

entsprechen. Dagegen werden die Bedingungen:

$$29)\quad p \geqq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1,\quad p \geqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2,\quad p > \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3,\quad p \leqq \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4$$

und die ihnen entgegengesetzten Bedingungen:

$$30)\quad p \leqq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1,\quad p \leqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2,\quad p \leqq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3,\quad p \geqq \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4$$

in keinem der vorhandenen Gebiete erfüllt, da diesen Ungleichheiten, welche die Bedingungen 16) und 23) in sich schliessen, nur ein Teil der Gebiete $ABC$ und $EDF$ genügen könnte. Ähnliche Betrachtungen können auch auf die übrigen sieben Fälle angewandt werden.

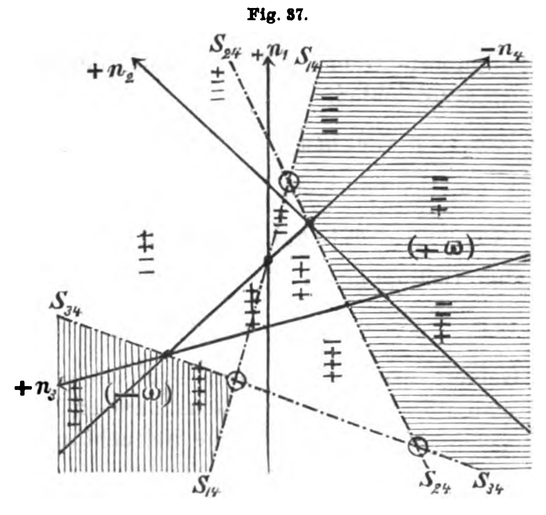
19. Auf allen Geraden, welche den konjugierten Gebieten der ersten und fünften Gruppe angehören, sind Schraubengeschwindigkeiten möglich, wenn $p$, wie im Falle von drei Stützflächen, ausserhalb der Grenzen liegt, welche durch das kleinste und das grösste der Produkte 25) bestimmt werden. Diese Axen brauchen weiter nicht untersucht zu werden; aber in Bezug auf die Frage über den grössten Zwang des festen Körpers ist folgende Eigentümlichkeit bemerkenswert, welche dann eintritt, wenn die Zahl der Stützflächen grösser als drei ist. Nach dem im vorigen Paragraphen Gesagten sehen wir, dass den vier Normalen solche Richtungen gegeben werden können, dass die Schraubenaxen der ersten und fünften Gruppe ganz verschwinden; dann werden überhaupt keine solche Schraubengeschwindigkeiten übrig bleiben, deren Parameter ausserhalb gewisser Grenzen liegt, denn bei allen Schraubenaxen der zweiten, dritten und vierten Gruppe bleibt $p$ zwischen, im allgemeinen, endlichen Grenzen eingeschlossen. Alles Vorhergehende beachtend, finden wir also:

Damit es möglich sei, durch Stützflächen, deren Normalen in den Berührungspunkten mit dem festen Körper nicht einander parallel sind, den Parameter aller möglichen Schraubengeschwindigkeiten zwischen gewissen, im allgemeinen endlichen Grenzen einzuschliessen, sind wenigstens vier Stützflächen nötig.*

Natürlich sind die Grenzen für $p$, welche von $\delta$ und $\varphi$ abhängen, für verschiedene Schraubenaxen verschieden.

20. Von den vier Fällen der zweiten und vierten Gruppe genügt es, einen zu betrachten. Wir wollen voraussetzen, dass die Richtung der Winkelgeschwindigkeit entweder mit den Normalen $n_1$, $n_2$, $n_3$ spitze und mit $n_4$ einen stumpfen Winkel bildet oder entgegengesetzt gerichtet ist; für $p$ haben wir dann resp. die Bedingungen 29) oder 30).

Fig. 37.




Die Gebiete möglicher Schraubenaxen werden dann durch die Grenzebenen $S_{14}$, $S_{24}$ und $S_{34}$ bestimmt. Nachdem die Aufsuchung dieser Gebiete im Falle von zwei oder drei Stützflächen ausführlich gezeigt wurde, können wir uns jetzt mit einer kurzen Angabe der Resultate begnügen. Auf der zur gegebenen Richtung senkrechten Ebene kann das Gebiet geschlossen oder nicht geschlossen sein: das wird von der Lage der Geraden $(+n_1)$, $(+n_2)$, $(+n_3)$, $(-n_4)$ und von den Verhältnissen der Grössen 25) untereinander abhängen, also auch von der Richtung der Winkelgeschwindigkeit in den für sie bestimmten Grenzen.

In der Figur 37 ist das Gebiet $(+\omega)$ von allen drei Geraden $S_{14}$, $S_{24}$, $S_{34}$ begrenzt, aber nicht geschlossen. Da bei der Änderung der Winkelgeschwindigkeitsrichtung in die entgegengesetzte, die Ungleichheiten 29) in die Bedingungen 30) übergehen, die Zeichen der elf Gebiete in der Ebene aber dieselben bleiben, so kann das Gebiet $(-\omega)$ in Bezug auf das Gebiet $(+\omega)$ auf folgende Weise bestimmt werden: es liegt auf der anderen Seite aller drei Grenzgeraden $S_{14}$. $S_{24}$, $S_{34}$.

---

* Im Falle paralleler Stütznormalen wird das auch bei kleinerer Zahl von Stützflächen erreicht, nur gewisse spezielle Axenrichtungen ausgenommen (§ 10 und § 17).

In der Figur 37 ist dieses Gebiet nur durch zwei dieser Geraden $S_{14}$, $S_{34}$ begrenzt.

In der Figur 38 sind die Projektionen der Normalen so genommen, dass das Gebiet möglicher Schraubenaxen geschlossen werden kann. Damit das wirklich erzielt werde, muss die Richtung der Winkelgeschwindigkeit in dem für sie auf der Parameterkugel bestimmten Gebiete gewissen ergänzenden Bedingungen genügen, welche nur kurz für das in der Figur 38 dargestellte Beispiel angegeben werden sollen. Die Richtung der Geraden $S_{14}$, $S_{24}$, $S_{34}$ kann in den Grenzen der sie enthaltenden Winkel, welche die Gerade $(-n_4)$ mit $(+n_1)$, $(+n_2)$ und $(+n_3)$ bildet, geändert werden und hängt von den Verhältnissen:

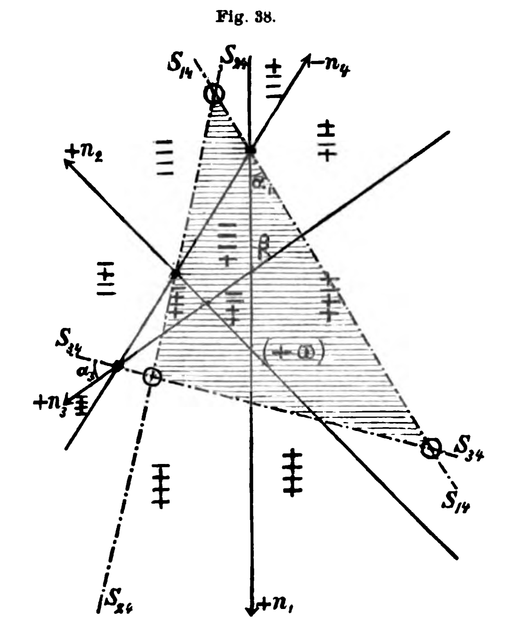
$$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 : \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 : \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3 : \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4$$

ab (§ 7 und § 8). Wenn z. B. die Gerade $S_{24}$ schon im voraus nach der allgemeinen Regel gezogen ist, muss der Schnittpunkt der Geraden $S_{14}$ und $S_{34}$ auf diejenige Seite von $S_{24}$ fallen, wo das Gebiet, für welches

$$p \geqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \leqq \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4$$

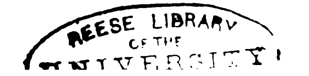
ist, sich befindet, also in der Figur 38 auf der rechten Seite von $S_{24}$.

Fig. 38.




Das wird der Fall sein, wenn $\alpha_1 + \alpha_3 + \beta < \pi$ ist und kann unter andern erreicht werden, wenn $\alpha_1$ und $\alpha_3$, d. h., wenn $\operatorname{tg} \varphi_4 : \operatorname{tg} \varphi_1$ und $\operatorname{tg} \varphi_4 : \operatorname{tg} \varphi_3$ genügend klein sind. Diese Forderung kann immer erfüllt werden. Wenn nämlich auf der Parameterkugel die den Ungleichheiten 29) und 30) entsprechenden Gebiete existieren, so kann ein Punkt des Gebietes $ABC$ (Fig. 16, Heft 3) zur Bestimmung der negativen Richtung der Normalen $n_4$ genommen werden: dann werden alle Punkte dieses Gebietes den Bedingungen 29) und alle Punkte des Gebietes $EDF$ den Bedingungen 30) genügen. Dann können in diesen Gebieten für die Schraubenaxen solche Richtungen genommen werden, welche mit $n_4$ einen beliebig kleinen Winkel bilden, sodass auch $\operatorname{tg} \varphi_4 : \operatorname{tg} \varphi_1$ und $\operatorname{tg} \varphi_4 : \operatorname{tg} \varphi_3$ beliebig klein werden.

Wenn mögliche Schraubenaxen von einer gegebenen Richtung durch ein geschlossenes Gebiet (Fig. 38) bestimmt werden, so kann die Winkelgeschwindigkeit auf denselben nur eine von den beiden

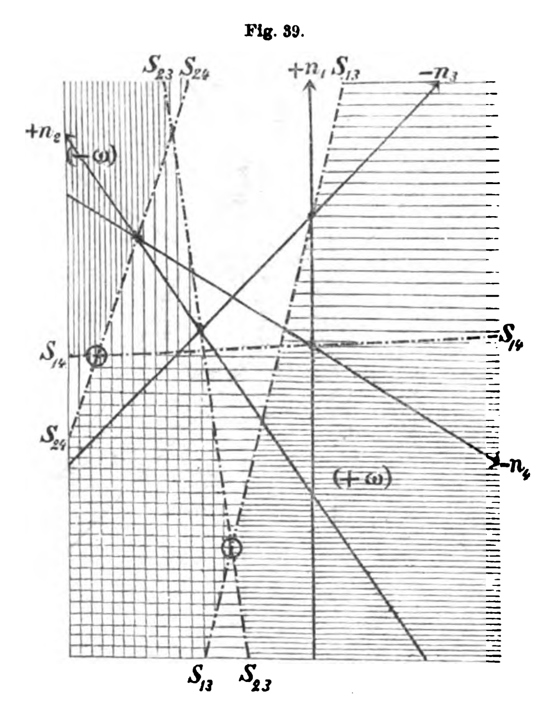





Richtungen bekommen; mit der entgegengesetzten Richtung werden dann gar keine möglichen Schraubenaxen existieren; denn dieselben müssten auf der entgegengesetzten Seite von allen drei Grenzebenen $S_{14}$, $S_{24}$, $S_{34}$ liegen, was jetzt unmöglich ist.

Alles oben gesagte beachtend, finden wir: Damit alle möglichen Schraubenaxen von gegebener Richtung auf der zu ihr senkrechten Ebene durch ein geschlossenes Gebiet bestimmt werden, sind wenigstens vier Stützflächen nötig. Dabei bleibt dieses Gebiet nicht nur für die gegebene Richtung, sondern auch für andere, genügend nahe Richtungen geschlossen. Der Parameterwert liegt für alle solche Axen im allgemeinen zwischen endlichen Grenzen.

Fig. 39.




21. Um die Fälle der dritten Gruppe zu untersuchen, bringen wir in Erinnerung (§ 13), dass bei drei Stützflächen, wenn der Parameter einem der Systeme von Ungleichheiten 17), 18), 19) oder der entgegengesetzten 20), 21), 22) genügt, die möglichen Schraubenaxen in einem Paare von Scheitelwinkeln eingeschlossen sind, welche durch zwei Grenzebenen gebildet werden; dabei kann die Winkelgeschwindigkeit auf den Axen des einen Scheitelwinkels die eine Richtung und auf den Axen des anderen die entgegengesetzte Richtung bekommen. Nehmen wir jetzt aus den sechs Fällen der dritten Gruppe die folgenden zwei konjugierten:

31) $p \geqq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \geqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p < \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3, \quad p \leqq \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4;$

32) $p \leqq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \leqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p > \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3, \quad p \geqq \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4,$

und suchen zuerst, nach der Regel des § 6, das Paar von Scheitelwinkeln, welche den Bedingungen:

33) $p \geqq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \geqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \leqq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3,$ oder

34) $p < \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p \leqq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \geqq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3,$

und dann das Paar von Scheitelwinkeln, welche den Bedingungen:

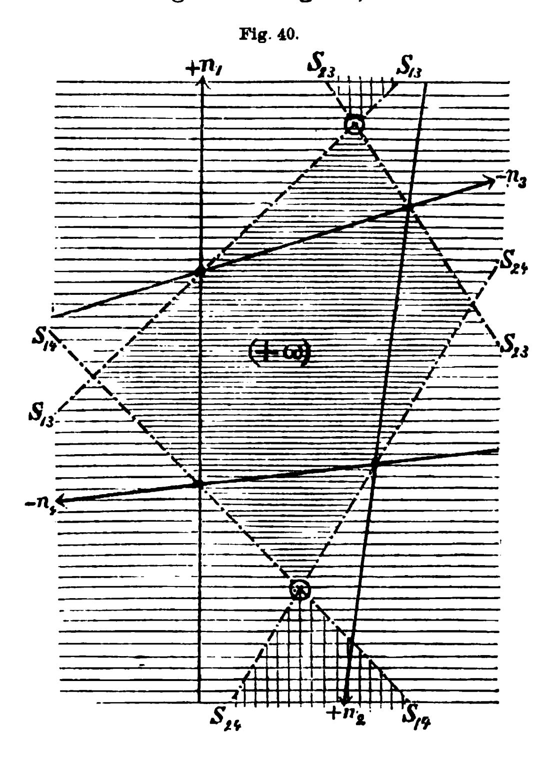
35) $p \geqq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p > \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p \leqq \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4,$

oder

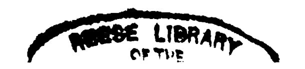
36) $p \leqq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad p < \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad p > \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4$

entsprechen. Mögliche, d. h. den Ungleichheiten 31) oder 32) genügende Schraubenaxen müssen in den Gebieten liegen, welche den Winkeln 33) und 35) oder 34) und 36) gemein sind. Solcher Gebiete können sich entweder zwei (je mit der einen und mit der anderen Richtung der Winkelgeschwindigkeit) oder ein (nur mit einer von den beiden Richtungen der Winkelgeschwindigkeit) oder keines vorfinden. Diesen Fällen entsprechen die Figuren 39, 40, 41 und 42, wobei, wie früher, durch horizontale Schraffierung das Gebiet $(+\omega)$ und durch die vertikale das Gebiet $(-\omega)$ bezeichnet ist.

Fig. 40.



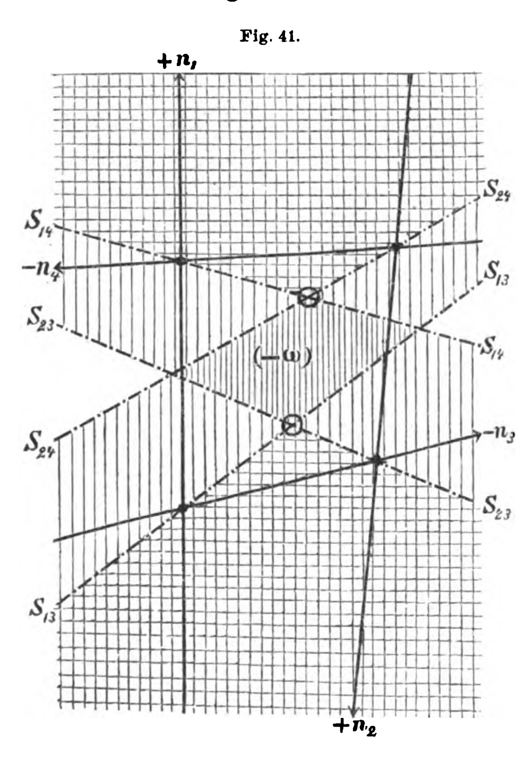

Mögliche Schraubenaxen werden dann durch diejenigen Gebiete bestimmt, in welchen die Striche von derselben, horizontalen oder vertikalen Richtung zusammenfallen, also doppelt so dicht sind. Eine ausführliche Beschreibung ist überflüssig, da die Bestimmung der Zeichen in den von den Geraden $(+n_1)$, $(+n_2)$, $(-n_3)$, $(-n_4)$ gebildeten Gebieten und der davon abhängenden Lage der Grenzgeraden $S_{13}$, $S_{23}$ und $S_{14}$, $S_{24}$ analog ist, wie in den Fällen von zwei und drei Stützflächen. Der Parameterwert bleibt bei den Schraubenaxen, welche den Figuren 39, 40 und 41 entsprechen, zwischen gewissen, im allgemeinen, endlichen Grenzen eingeschlossen. Die Figur 42 stellt den Fall dar, wo gar keine Schraubenaxen von gegebener Richtung möglich sind. Dieses war bei drei Stützflächen nur im Falle von drei parallelen und gehöriger Weise gelegenen Normalen möglich; man kann also sagen: Damit im Falle von nicht einander parallelen Stütznormalen solche Richtungen sich vorfinden, dass keine Schraubenaxen dieser Richtungen möglich bleiben, darf die



Zahl der Stützflächen nicht kleiner als vier sein, und zwei von den Stütznormalen müssen mit der gegebenen Richtung spitze, zwei andere Stütznormalen stumpfe Winkel bilden. Natürlich müssen ausserdem die Lage der Stütznormalen und die Winkelgrössen $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\varphi_4$ gewissen ergänzenden Bedingungen, welche wir weiter nicht untersuchen werden, genügen.

22. Für die Axen einer gegebenen Richtung, um welche eine einfache Drehung möglich sein soll ($p = 0$), findet man, dass auf der zu dieser Richtung senkrechten Ebene entweder zwei nicht geschlossene oder ein geschlossenes Gebiet existieren, oder dass keine Geraden der gegebenen Richtung mögliche Drehungsaxen sein können. Die Grenzebenen für die Drehungsaxen sind Normalebenen, wie es schon oben, im § 14, für den Fall von drei Stützflächen bemerkt wurde. Ohne darüber ausführlicher zu sprechen, bemerken wir nur folgendes: **Wenn drei Stütznormalen gegeben sind, so kann man die vierte Stütznormale so wählen, dass eine Drehung um keine von den Axen einer gegebenen Richtung und anderer zu ihr genügend naher Richtungen möglich wird.** Es genügt, dieses nur für irgend einen Fall zu zeigen, da in allen anderen Fällen es auf ähnliche Weise gemacht werden kann. Es möge die gegebene Richtung den konjugierten Gebieten der ersten und fünften Gruppe angehören, sodass $p$ resp. den Ungleichheiten 27) und 28) genügt. Wir entnehmen die Projektionen der ersten drei Normalen $n_1$, $n_2$, $n_3$ aus der Figur 19 (Heft 3) und überlassen uns die Wahl der vierten Normalen. Die möglichen Drehungsaxen, auf welchen die Winkelgeschwindigkeit den Bedingungen 27) entspricht, müssen durch das Gebiet $(- - - -)$ bestimmt werden, da nur dort $p = 0$ gesetzt werden kann; und ebenso der entgegengesetzten Richtung von $\omega$ muss das Gebiet $(+ + + +)$ dienen. Da solche Gebiete nur zu den Gebieten $(- - -)$ und $(+ + +)$ der Figur 19 (Heft 3) gehören können, so wird es von der Lage der Projektion der vierten Normalen

Fig. 41.



abhängen, ob das gesuchte Gebiet wirklich existiert oder nicht. Die Figuren 43, 44, 45 und 46 sind Wiederholungen der Figur 19 (Heft 3) mit einer Ergänzung durch die vierte Gerade $(+ n_4)$: in der Figur 43 ist dieselbe so genommen, dass die Gebiete $(+ \omega)$ und $(- \omega)$ der Figur 19 (Heft 3) ungeändert bleiben; in der Figur 44 hat bei einem von diesen Gebieten eine Abnahme stattgefunden; in der Figur 45 bleibt nur das eine Gebiet $(+ + + +)$, d. h. $(- \omega)$, vorhanden, und in der Figur 46 sind beide Gebiete verschwunden. Ähnliches kann auch in den Figuren 20, 21, 22 und 23 (Heft 3) mit Hilfe der Normalenprojektion $(+ n_4)$ oder $(- n_4)$ ausgeführt werden. Und es ist immer möglich, durch eine entsprechende Lage dieser Geraden das vollkommene Verschwinden beider Gebiete $(+ \omega)$ und $(- \omega)$ zu erreichen; denn diese Gerade teilt die ganze Ebene in zwei Gebiete, welche die Drehungsaxen $(+ \omega)$ und $(- \omega)$ bestimmen, und kann immer so gezogen werden, dass diese Gebiete die entgegengesetzten Gebiete $(- \omega)$ und $(+ \omega)$, welche den ersten drei Stütznormalen entsprachen, vollkommen decken.

Fig. 42.

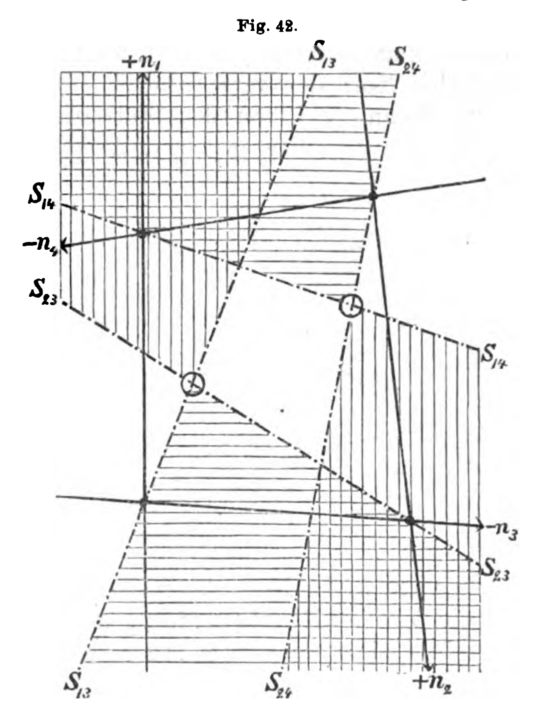
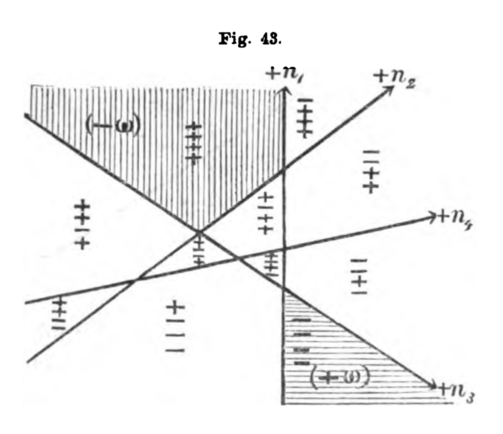



Fig. 43.

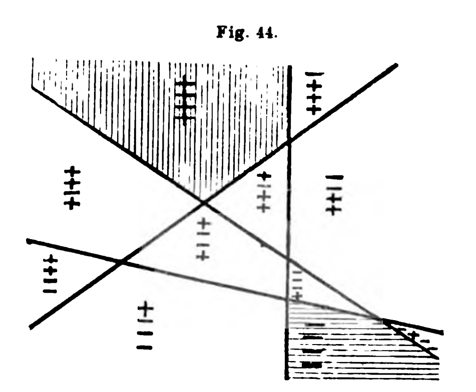



Daraus kann man noch nicht schliessen, dass eine solche Lage von vier Stütznormalen möglich sei, bei welcher überhaupt keine möglichen Drehungsaxen bleiben. Übrigens werden wir unten (§ 26) sehen, dass dieses für alle Axenrichtungen, nur eine ausgenommen, erreicht werden kann.

Es möge noch daran erinnert werden, dass bekanntlich durch vier Stützflächen der feste Körper gezwungen werden kann, nur Drehungsverschiebungen zu behalten, wozu die Stütznormalen durch einen Punkt gehen und ihre Richtungen so gewählt werden müssen, dass auf der Parameterkugel (Fig. 16, Heft 3) das Gebiet $ABC$ durch Hinzufügung der vierten Normalen verschwindet.

23. Wenn zwei von den Stütznormalen $n_1$, $n_2$ einander parallel sind, können für eine gegebene Axenrichtung wieder vier Fälle eintreten: die Hinzufügung der vierten Normalen kann

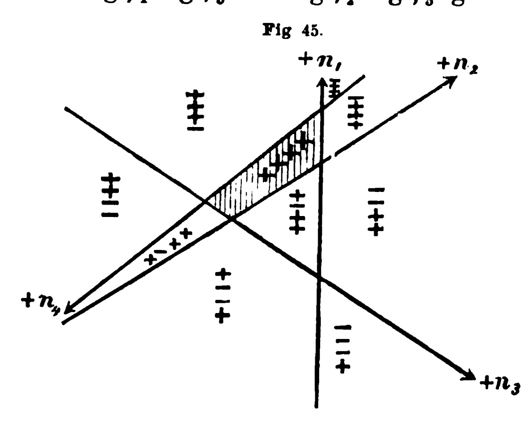
Fig. 44.



1. die Gebiete möglicher Schraubenaxen unverändert lassen,
2. das eine von denselben oder
3. beide vermindern und
4. ganz zum Verschwinden bringen.

Der erste, zweite und vierte dieser Fälle kann nur dann eintreten, wenn die Grenzebenen $S_{14}$ und $S_{24}$ den Grenzebenen $S_{13}$ und $S_{23}$ parallel werden. Dazu braucht nicht $n_4$ der Normalen $n_3$ parallel zu sein: es ist nur nötig (§ 6), dass die Verhältnisse $\operatorname{tg}\varphi_1 : \operatorname{tg}\varphi_4$ und $\operatorname{tg}\varphi_2 : \operatorname{tg}\varphi_4$ resp. den Verhältnissen $\operatorname{tg}\varphi_1 : \operatorname{tg}\varphi_3$ und $\operatorname{tg}\varphi_2 : \operatorname{tg}\varphi_3$ gleich werden, d. h., dass $n_4$ mit der gegebenen Richtung der Schraubenaxen denselben Winkel wie $n_3$ bildet.

Fig 45.

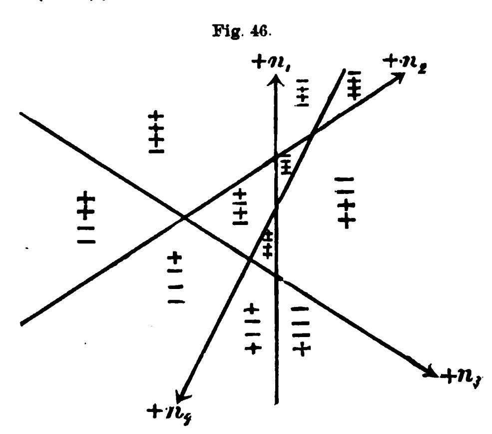



In der Figur 47 ist der vierte von den bezeichneten Fällen dargestellt. Diese Figur ist aus der Figur 25 (Heft 3) durch die Hinzufügung der Geraden $(-n_4)$, welche der obengenannten Bedingung genügt, entstanden; diese Gerade ist so gewählt, dass die Gebiete $(+\omega)$ und $(-\omega)$ der Figur 25 (Heft 3) von den Gebieten $(-\omega)$ und $(+\omega)$, welche der Grenzgeraden $S_{24}$ entsprechen, gedeckt werden. Eine ähnliche Rolle könnte auch die Grenzgerade $S_{14}$ spielen, wenn nur der Schnittpunkt von $(-n_4)$ und $(+n_1)$ zwischen den Grenzgeraden $S_{13}$ und $S_{23}$ gelegen wäre.

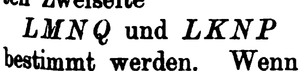
24. Ähnliches findet man, wenn die vier Stütznormalen paarweise parallel sind. Es werden folgende Bemerkungen darüber genügen.

Wenn in einem dieser Paare $n_1$, $n_2$ die Normalen gleichgerichtet sind, so wird für keine Richtungen eine vollkommene Aufhebung möglicher Schraubenaxen erzielt. Sind die Normalen $n_3$, $n_4$ auch gleichgerichtet, so ist es von selbst klar; wenn aber dieselben entgegengesetzt gerichtet sind (Fig. 48), so kann man nach dem in § 10 Gesagten sehen, dass das eine von den Gebieten $(+\omega)$ und $(-\omega)$, im gegebenen Falle das Gebiet $(+\omega)$, verschwindet. Ein vollkommenes Verschwinden beider Gebiete kann erreicht werden, wenn auch die Normalen $n_1$, $n_2$ entgegengesetzt gerichtet sind, denn bei drei Stütznormalen $n_1$, $n_2$, $n_3$ bleibt dann nur das eine von den Gebieten $(+\omega)$, $(-\omega)$ [Fig. 26 u. 27, Heft 3] bestehen, welches jetzt durch die Hinzufügung der vierten Normalen von dem Gebiete mit entgegengesetzter Winkelgeschwindigkeit gedeckt werden kann. Solche Fälle sind in den Figuren 49 und 50, welche entsprechende Ergänzungen der Figuren 26 und 27 enthalten, dargestellt.

Fig. 46.

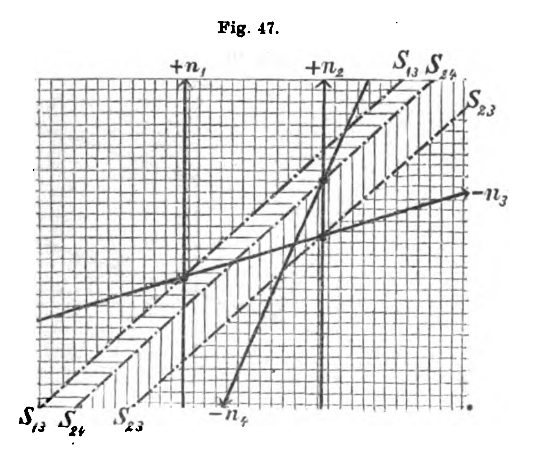



Um alle Richtungen, für welche keine Schraubenaxen möglich sind, zu finden, legen wir in der Parameterkugel (Fig. 51) zwei Zentralebenen $LMNP$ und $LKNQ$, den Ebenen der Normalenpaare $(n_1, n_2)$ und $(n_3, n_4)$ [Fig. 52] parallel. Indem man die Figuren 51 und 52 mit den Figuren 49 und 50 vergleicht, findet man leicht, dass die möglichen Richtungen der Schraubenaxen auf der Parameterkugel durch die sphärischen einander konjugierten Zweiseite



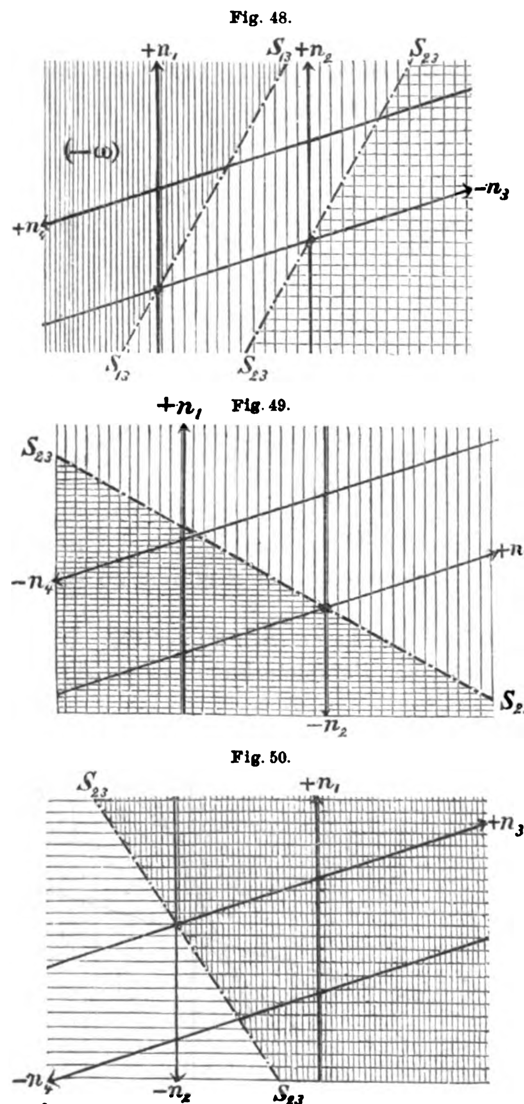
$LMNQ$ und $LKNP$ bestimmt werden. Wenn man die Normalenpaare als zwei Kräftepaare betrachtet, kann man sagen: Die Richtungen, nach welchen keine Schraubenaxen möglich sind, werden dadurch bestimmt, dass die Projektionen der Mo-

Fig. 47.



mente zweier Kräftepaare $(n_1, n_2)$ und $(n_3, n_4)$ auf dieselben entgegengesetzt sind.*

Betrachten wir noch den Fall, dass jedes Paar entgegengerichteter Normalen auf einer Geraden liegt. Wäre nur ein Paar solcher Normalen gegeben, so könnte jede Gerade des Raumes eine Schraubengeschwindigkeit mit bestimmtem Parameterwerte $\delta \operatorname{tg} \varphi$ enthalten; kommt ein zweites solches Normalenpaar hinzu, so bleibt nur auf denjenigen Geraden eine Schraubengeschwindigkeit möglich, für welche die Grösse $\delta \operatorname{tg} \varphi$ in Bezug auf jede der vier Normalen dieselbe ist. Alle solche Geraden von einer gegebenen Richtung liegen in einer Ebene, mit welcher jetzt die Grenzebenen $S_{14}$, $S_{23}$ (Fig. 53) zusammenfallen.




Die Beschränkung für den festen Körper ist jetzt dieselbe, als wenn er zwei feste Flächen berührte und sich nicht von denselben entfernen dürfte. In diesem Falle bilden bekanntlich alle Schraubenaxen, welche gleichen Parameter haben, eine Kongruenz ersten Grades. Wir können also auf die gezeigte Weise, indem wir die Grenzebenen $S_{14}$, $S_{23}$ und für verschiedene in ihnen liegende Geraden die Grösse $\delta \operatorname{tg} \varphi$ bestimmen, irgend eine, einer solchen Kongruenz angehörende Schraubenaxe von gegebener Richtung und gegebenem Parameterwert konstruieren.

---

* Dieses Resultat findet offenbar seine kinetische Begründung, wenn man beachtet, dass die normalen Widerstände der vier Stützflächen die Richtungen der Normalen $n_1$, $n_2$, $n_3$, $n_4$ haben.

25. Wenn drei von den vier Stütznormalen einander parallel sind, können wir uns auf die Resultate des § 17 stützen. Die Begrenzung, welche jetzt die Gebiete möglicher Schraubenaxen durch die Hinzufügung der vierten Normalen bekommen, können nach den schon mehrere Male angewandten Regeln bestimmt werden.

Fig. 51.

Wenn alle drei parallelen Normalen gleichgerichtet sind, so bleiben auf allen Geraden, auf welchen die Winkelgeschwindigkeit mit allen vier Normalen nur spitze oder nur stumpfe Winkel bildet, Schraubengeschwindigkeiten möglich, deren Parameter ausserhalb gewisser, im allgemeinen endlicher Grössen liegt. Bildet aber $\omega$ mit $n_1$, $n_2$, $n_3$ spitze und mit $n_4$ einen stumpfen Winkel, oder umgekehrt, so findet man für die möglichen Schraubenaxen solche Begrenzungen, wie sie im § 15 für den Fall, dass zwei von den drei Stütznormalen einander parallel und gleichgerichtet sind, sich ergaben. Jetzt wird also die eine von den drei Geraden $(+n_1)$, $(+n_2)$, $(+n_3)$, nämlich die mittlere, keine Rolle spielen (Fig. 54).

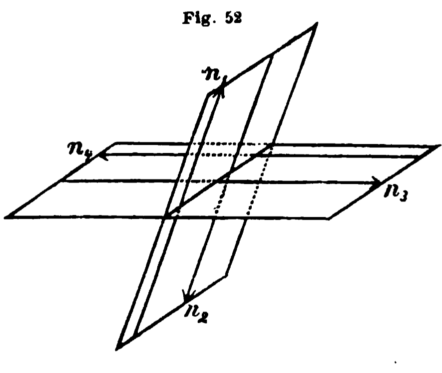


Fig. 52

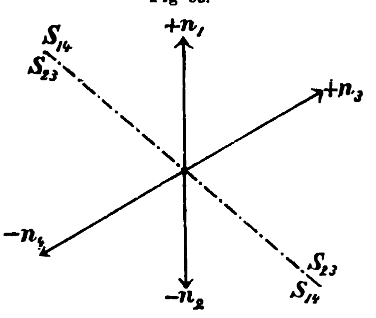


Fig. 53.

Wenn eine von den drei parallelen Geraden den beiden anderen entgegengerichtet ist, so sind, dem § 17 gemäss, entweder alle Geraden einer gegebenen Richtung mögliche Schraubenaxen, wobei die Drehung nur in einem Sinne erfolgen kann, oder keine einzige bleibt möglich. Im letzteren Falle fügt die vierte Normale nur eine Begrenzung hinzu, welche sich auf die zu den drei ersten Normalen senkrechten Translationen bezieht; im ersteren Falle dagegen wird, wie im § 15, die ganze Ebene durch eine Grenzebene in zwei Gebiete geteilt, von welchen nur das eine die möglichen Schraubenaxen bestimmt. Auf diesen Fall beziehen sich die Fi-

guren 55 und 56; in der zweiten Figur behält nur eine von den hier möglichen Grenzgeraden $S_{14}$, $S_{24}$ ihre Bedeutung. In § 17 wurde gezeigt, welche Verschiebungen dem festen Körper möglich bleiben, wenn bei drei Stützflächen die Normalen derselben einander parallel sind, in einer Ebene liegen und die mittlere den beiden anderen entgegengerichtet ist. Die neue Begrenzung, welche durch die Einführung der vierten irgendwie gerichteten Normalen erreicht wird, besteht nicht darin, dass das Gebiet möglicher Schraubenaxen vermindert wird, sondern es bleibt von beiden Richtungen, welche die Winkelgeschwindigkeit auf jeder Axe haben konnte (§ 17), nur eine Richtung möglich. Das Bündel paralleler Schraubenaxen wird nämlich durch die drei jetzt zusammenfallenden* Grenzebenen $S_{14}$, $S_{24}$, $S_{34}$ in zwei Gruppen geteilt, je nach der einen oder anderen Richtung der Winkelgeschwindigkeit. Die Translationsgeschwindigkeiten werden auch nur nach einer Seite begrenzt; und nur die zu allen vier Normalen senkrechten Translationen bleiben nach beiden Richtungen möglich.

Fig. 54.

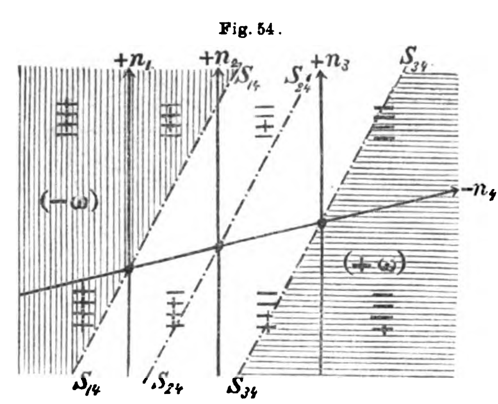
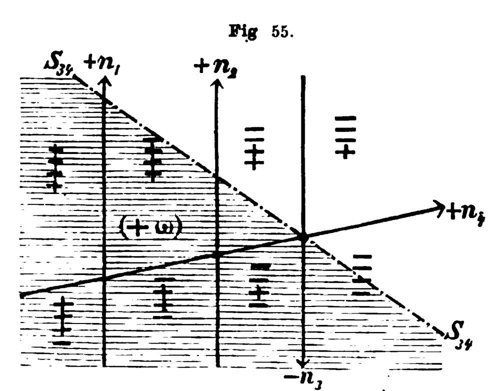



Fig 55.

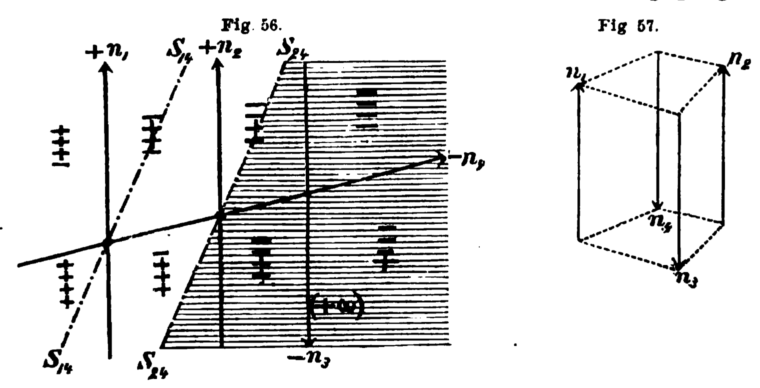



26. Es seien alle vier Normalen einander parallel. Wenn dieselben gleichgerichtet sind, findet man dasselbe, wie im Falle von drei solchen Normalen; wenn aber eine oder zwei von den Normalen den anderen entgegengerichtet sind, können durch geeignete Wahl ihrer Lage alle Schraubengeschwindigkeiten, deren Parameter nicht Null oder unendlich ist, zum Verschwinden gebracht werden. Solche Lagen der Stütznormalen werden in der Praxis oft gebraucht; wir erwähnen dieselben nur, um zu zeigen, wie sie aus der allgemeinen hier dargestellten Methode erhalten werden können.

In § 17 wurde bemerkt, dass im Falle von drei Stützflächen, deren Normalen einander parallel sind, während zugleich die eine Normale

* Weil nur zur Ebene der drei ersten Normalen parallele Schraubenaxen möglich sind.

den zwei anderen entgegengerichtet ist, solche Richtungen existieren, nach welchen keine Schraubenaxen möglich sind. Die dazu nötige Bedingung bestand darin, dass eine von den einer gegebenen Richtung parallelen Normalebenen, nämlich diejenige, welche die den anderen entgegengesetzte Normale enthielt, zwischen den anderen zwei Normalebenen liegen musste. Wenn vier parallele Stütznormalen gegeben sind, von welchen die eine, $n_4$, den drei anderen entgegengerichtet




ist, kann diese Bedingung für alle Richtungen erfüllt werden: dazu ist nur nötig, dass $n_4$ im Inneren des dreiseitigen Prismas, welches von den anderen drei Normalen gebildet wird, sich befindet. Dann bleiben für den festen Körper nur zu den Normalen senkrechte Translationen und einfache Drehungen um Axen, welche den Normalen parallel sind, möglich, d. h. überhaupt Verschiebungen parallel einer Ebene.

Dieselbe oben ausgesprochene Bedingung kann offenbar auch erzielt werden, wenn zwei Normalen, $n_3$ und $n_4$, den zwei anderen entgegengerichtet sind. Die Normalen müssen dann ein vierseitiges Prisma ohne einspringende Winkel bilden und die gleichgerichteten Normalenpaare müssen in den Diagonalebenen desselben liegen (Fig. 57).

### Fünf und mehr Stützflächen.

27. Wenn die Zahl der Stützflächen vier übersteigt, würde eine ausführliche Untersuchung verschiedener Fälle zum grossen Teile eine Wiederholung des Vorhergehenden sein; denn für jede gegebene Axenrichtung würden wieder dieselben Fälle wie früher eintreten können, nur mit Hinzufügung neuer Grenzebenen, welche keine wesentlich neue Begrenzungen geben könnten, da schon bei vier Stützflächen eine vollkommene Tilgung möglicher Schraubenaxen von gegebener Richtung erzielt werden kann. Wir werden daher nur einige allgemeine Bemerkungen machen und zur Anwendung des Vorhergehenden einige besondere Lagen der Stütznormalen betrachten.

Es seien fünf Stützflächen gegeben. Da jetzt 32 Kombinationen der Ungleichheitszeichen für $p$ möglich sind, auf der Parameterkugel

aber nach der Formel 26) nur 22 Gebiete zugleich vorhanden sein können, so werden zehn Zeichenverbindungen in den verschiedenen für $p$ möglichen Bedingungen und dementsprechend fünf Paare konjugierter Gebiete der Parameterkugel fehlen. Wenn man alle 32 Gebiete, wie es bei kleinerer Zahl von Stützflächen geschah, in Gruppen ordnet, deren Zahl jetzt sechs ist, so findet man, dass $p$ wieder für jede Axenrichtung zwischen gewisse Grenzen eingeschlossen werden kann, da die erste und letzte Gruppe fehlen können. Die übrigen vier Gruppen werden aber dann durchaus ihre Vertreter auf der Parameterkugel haben.

Bei vier Stützflächen konnten nur in der mittleren, dritten Gruppe solche Richtungen existieren, dass keine ihnen parallele Gerade mögliche Schraubenaxen darstellte; jetzt kann man neue Grenzebenen benützen und diesen Fall in jeder der übriggebliebenen Gruppen eintreten lassen. Wenn eine entsprechende Richtung gefunden ist, so werden auch andere zu ihr genügend nahe Richtungen derselben Forderung genügen. Jedenfalls werden aber ganze Systeme von Schraubenaxen möglich bleiben; denn wenn der feste Körper fünf Flächen so berührt, dass er sich von denselben nicht entfernen kann, so bleibt ihm bekanntlich eine bestimmte Schraubengeschwindigkeit möglich; wenn aber die Flächen nur Stützflächen sind, so bleiben im allgemeinen verschiedene Gebiete auf der Parameterkugel, welchen ganze Scharen möglicher Schraubenaxen entsprechen. Die Aufsuchung solcher Gebiete könnte zum Gegenstande einer besonderen Untersuchung gemacht werden, welche wir aber nicht weiter verfolgen wollen.

Von speziellen Lagen der fünf Stütznormalen seien folgende erwähnt. Es mögen drei Stütznormalen in einer Ebene $P$ liegen, einander parallel und die mittlere den zwei anderen entgegengerichtet sein; die anderen zwei Normalen nehmen wir auf einer die vorige Ebene schneidenden Geraden $l$ und auch einander entgegengesetzt an. Dann bleiben nur solche Schraubenaxen möglich, welche der Ebene $P$ parallel sind (§ 17) und bei einer gegebenen solchen Richtung in einer Grenzebene liegen, welche jedesmal durch eine der ersten drei und eine der anderen zwei Normalen bestimmt wird; der Parameter kann auf jeder dieser Axen nur einen bestimmten Wert bekommen (§ 10). Einfache Drehungen bleiben um solche Axen möglich, welche die Gerade $l$ schneiden und dabei entweder in der Ebene $P$ liegen, oder den drei ersten Normalen parallel sind. Liegt die Gerade $l$ in der Ebene $P$, so bleiben dem festen Körper ausser den in der zu $P$ jetzt senkrechten Grenzebene liegenden Schraubenaxen Drehungsaxen, welche in der Ebene $P$ willkürlich liegen können, und noch eine zu denselben senkrechte Translation möglich. Diese Translation hat übrigens keine selbständige Bedeutung, da sie, mit einer der vorigen Drehungen zusammengesetzt, wieder eine Drehung um eine der Ebene $P$ angehörende Axe giebt.

Wenn die vierte und fünfte Normale entgegengesetzt sind, aber nicht auf derselben Geraden liegen, so erweitert sich wieder das Gebiet möglicher Verschiebungen, ebenso wie bei verschiedenen anderen Abänderungen der Lage und der Richtung der Stütznormalen.

28. Wenn sechs Stützflächen gegeben sind, werden im ganzen 64 Zeichenverbindungen der sechs Ungleichheiten, welchen jetzt $p$ genügen muss, möglich. Von den 64 Gebieten aber, welche dementsprechend auf der Parameterkugel auftreten können, sind nur 32 zugleich möglich. Wenn man also alle 64 Gebiete, dem Vorhergehenden analog, in sieben Gruppen teilt, und wenn man beachtet, dass diese Gruppen der Reihe nach 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 Gebiete enthalten, so kann man die Richtungen der Stütznormalen so wählen, dass alle Gebiete der ersten, zweiten, sechsten und siebenten Gruppe und einige Gebiete aus anderen Gruppen verschwinden. Dann ist die Zahl der Stütznormalen, mit welchen die Winkelgeschwindigkeit spitze oder stumpfe Winkel bildet, entweder 4 und 2 oder 3 und 3 oder 2 und 4. Demgemäss werden 8 oder 9 Grenzebenen auftreten können. Ohne weiter darauf einzugehen, bemerken wir nur, dass durch 6 Stützflächen, nach dem im vorigen Paragraphen Gesagten, ein vollkommenes Verschwinden aller dem festen Körper möglichen Verschiebungen nicht erreichbar ist. Es wäre nämlich auch dann nicht möglich, wenn der Körper sich von fünf Stützflächen nicht entfernen könnte; denn die dabei möglich bleibende Schraubenverschiebung könnte sich nach beiden Richtungen vollziehen, und eine sechste Stützfläche könnte dann nur eine dieser Richtungen unmöglich machen. In Wirklichkeit aber bleiben im Falle von fünf Stützflächen ganze Scharen von Schraubenverschiebungen möglich, welche desto weniger durch eine sechste Stützfläche getilgt werden können.

Von speziellen Lagen der sechs Stütznormalen erwähnen wir folgende:

a) Durch vier parallele Stütznormalen kann der feste Körper gezwungen werden, nur einer Ebene parallele Verschiebungen zu behalten (§ 26); andererseits werden bei zwei entgegengerichteten und auf derselben Geraden liegenden Stütznormalen alle Drehungsaxen, welche diese Gerade nicht schneiden, unmöglich sein (§ 10). Wenn alle diese sechs Stütznormalen gegeben und die zwei letzteren den anderen vier Normalen nicht parallel vorausgesetzt sind, so bleiben dem festen Körper nur Drehungsaxen, welche den vier ersten Normalen parallel sind und die zwei anderen schneiden, und eine zu allen sechs Normalen senkrechte Translationsrichtung möglich. Diese Translation hat übrigens keine selbständige Bedeutung, da sie zu der Ebene der möglichen Drehungsaxen senkrecht ist.

b) Im § 17 wurde der Fall dreier Normalen $n_1$, $n_2$, $n_3$, von denen eine, $n_3$, den anderen entgegengesetzt war, betrachtet. Mögliche Richtungen der Winkelgeschwindigkeit wurden dort durch das Gebiet eines

sphärischen Zweiseits $EBCFE$ (Fig. 33) bestimmt. Fügen wir nun drei andere einander parallele Stütznormalen $n_4$, $n_5$, $n_6$, von welchen die letztere den anderen zwei entgegengesetzt ist, hinzu, dann wird diesen Normalen auf der Parameterkugel (Fig. 33) ein ähnliches Gebiet möglicher Winkelgeschwindigkeitsrichtungen entsprechen. Diese drei Normalen können offenbar so genommen werden, dass die beiden Gebiete der Parameterkugel keine Punkte gemein haben werden; dann werden auch keine möglichen Schraubenaxen von endlichem Parameter bleiben. Es bleibt nur eine zu allen sechs Normalen senkrechte Translation möglich, und zwar nach beiden Richtungen.

c) In § 17 wurden mögliche Schraubenaxen unter der Voraussetzung betrachtet, dass drei parallele Normalen in einer Ebene liegen und die mittlere den anderen entgegengesetzt ist; alle diese Axen waren dieser Ebene parallel und hatten bestimmte Parameter. Wenn noch drei andere ähnliche, aber in einer anderen Ebene gelegene Normalen gegeben werden, so bleiben nur solche Schraubenaxen möglich, welche den beiden Ebenen parallel sind. Sie müssen dabei in derjenigen Grenzebene liegen, für welche die untereinander gleichen Grössen

$$\delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4, \quad \delta_5 \operatorname{tg} \varphi_5, \quad \delta_6 \operatorname{tg} \varphi_6$$

den Grössen

$$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3$$

gleich sind. Ausserdem bleibt noch eine zu allen sechs Normalen senkrechte Translation möglich.

Wenn insbesondere $n_4$, $n_5$, $n_6$ der Durchschnittslinie ihrer Ebene mit der Ebene der Normalen $n_1$, $n_2$, $n_3$ parallel sind, so fällt die Grenzebene mit der letzteren Ebene zusammen; dann gehen die möglichen Schraubenaxen in Drehungsaxen über.

Wenn alle sechs Normalen auf der Durchschnittslinie ihrer Ebenen senkrecht stehen, so bleiben, ausser der dieser Geraden parallelen Translation, Windungen um diese Gerade als Axe möglich, wobei der Parameter dieser Windung willkürlich bleibt.

d) Es mögen die Normalen $(n_1, n_4)$, $(n_2, n_5)$, $(n_3, n_6)$ paarweise auf einer Geraden liegen und entgegengesetzt sein. Die Figur 16 (Heft 3) kann bei der Untersuchung dieses Falles benützt werden. Die dort bezeichneten Gebiete entsprechen dem Falle von drei Stütznormalen $n_1$, $n_2$, $n_3$; dieselben Gebiete entsprechen jetzt auch den Normalen $n_4$, $n_5$, $n_6$, mit dem Unterschiede aber, dass dann die Ungleichheiten für $p$ den Ungleichheiten 16) ... 23) resp. entgegengesetzt sein müssen. Damit beide Systeme der Bedingungen für $p$ vereinbar werden, muss man annehmen:

$$p = \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4,$$

oder

$$p = \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = \delta_5 \operatorname{tg} \varphi_5,$$

oder

$$p = \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3 = \delta_6 \operatorname{tg} \varphi_6;$$

und für eine mögliche Schraubenaxe müssen diese drei Grössen einander gleich werden. Das kann aber nur für eine Durchschnittslinie

zweier Grenzebenen eintreten; denn jede der Grenzebenen $S_{23}$, $S_{31}$, $S_{12}$ enthält solche Geraden einer gegebenen Richtung, für welche zwei der Grössen $\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$, $\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$, $\delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3$ einander gleich sind. Daraus folgt, dass für jede gegebene Richtung nur eine mögliche Schraubenaxe sich finden wird, und auf jeder derselben wird der Parameter nur einen bestimmten Wert haben können. Die zu der Windung gehörende Winkelgeschwindigkeit kann auf jeder Axe beide Richtungen bekommen; denn jede Grenzebene gehört zugleich den beiden Gebieten: $(+\omega)$ und $(-\omega)$ an.

In dem betrachteten Falle bleibt der feste Körper bei jeder möglichen unendlich kleinen Windung mit drei Flächen, welchen die Normalen $n_1$, $n_2$, $n_3$ (oder auch $n_4$, $n_5$, $n_6$) entsprechen, in Berührung. Die gefundenen Schraubenaxen gehören also dem Systeme koaxialer Hyperboloide an, durch welche alle Schraubenaxen des festen Körpers mit drei Freiheitsgeraden bestimmt werden. Es ist hier also das Mittel gegeben, für den festen Körper mit drei Freiheitsgraden eine Schraubenaxe von gegebener Richtung aufzufinden und den ihr entsprechenden Parameter zu bestimmen.

29. Im Falle einer ungeraden Zahl, $(2n+1) > 6$, von Stützflächen können ihre Normalen so gerichtet sein, dass von den $2n+2$ Gruppen, in welche jetzt, dem Vorhergehenden analog, alle Ungleichheiten für $p$ zerlegt werden können, nur die zwei mittleren Gruppen, welche paarweise konjugierte Gebiete enthalten, übrig bleiben. Ist eine gerade Zahl von Stützflächen, welche sechs übersteigt, gegeben, so können die Stütznormalen so genommen werden, dass nur die eine, mittlere Gruppe der Gebiete übrig bleibt, d. h., dass jede Winkelgeschwindigkeit mit den Normalen ebensoviel spitze wie stumpfe Winkel bildet. Es ist nämlich die Zahl der auf der Parameterkugel zugleich auftretenden Gebiete für $k$ Stützflächen:

$$A_k = k(k-1) + 2;$$

die Zahl der Gebiete aber, welche jede der mittleren Gruppen enthält, wenn $k = 2n+1$ ist:

$$B_k = \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}.$$

Wenn $n > 2$, so ist $2B_k > A_k$. Wenn $k = 2n$, so ist die Zahl der Gebiete der einzigen mittleren Gruppe:

$$B_k = \frac{2n!}{n!\,n!},$$

also $B_k > A_k$, wenn $n > 3$ ist.

Es möge noch einiges über die Festlegung des festen Körpers durch Stützflächen gesagt werden. Die grösste Begrenzung, welche der feste Körper bei sechs Stützflächen bekommt, besteht darin, dass ihm nur eine Schraubengeschwindigkeit mit bestimmtem Parameter frei gelassen wird, wobei aber beide Verschiebungsrichtungen möglich

bleiben. Im § 28, b) wurde ein solcher Fall erwähnt, wenn nämlich der Körper nur eine zu allen sechs Normalen senkrechte Translation ($p = \infty$) nach beiden Richtungen erhalten konnte. Daraus folgt, dass eine siebente Stützfläche nicht genügt, um den festen Körper unbeweglich zu machen, dass aber dieses durch acht Stützflächen immer erreicht werden kann. Zum Schlusse zeigen wir noch einige Beispiele so, wie sie von unserem Standpunkte sich darstellen.

a) Durch vier Stützflächen kann der feste Körper gezwungen werden, nur einer Ebene parallele Verschiebungen zu haben; durch andere vier Stützflächen, deren Normalen dieser oder auch einer anderen zu dieser nicht senkrechten Ebene parallel sind, können alle diese Verschiebungen verhindert werden.

b) Im § 28, b) wurden sechs Normalen so genommen, dass dem Körper nur eine Translation parallel einer Geraden möglich blieb. Diese Translation kann offenbar durch zwei neue Stützflächen getilgt werden.

c) Mit Hilfe von vier Stützflächen, deren Normalen sich in einem Punkte schneiden, kann man bekanntlich alle Verschiebungen, ausser den Drehungen um diesen Punkt, dem festen Körper entziehen. Durch andere vier Stütznormalen kann man alle diese Drehungen unmöglich machen; denn diese Aufgabe kommt darauf hinaus eine sphärische Figur durch sphärische Stützkurven unbeweglich zu machen.

---

Die vorliegende Arbeit, welche hauptsächlich ein Mittel zur Bestimmung und anschaulichen Darstellung möglicher Schraubenaxen eines festen Körpers darzulegen zum Ziele hatte, erschöpft bei weitem nicht die umfangreiche Aufgabe über die Stützflächen überhaupt, in welcher noch mehrere Seiten, so viel es mir bekannt ist, nicht genügend untersucht sind. Dazu gehören u. a.: der Einfluss der Krümmung der Stützflächen und der Oberfläche des beweglichen Körpers auf die Möglichkeit nicht nur unendlich kleiner, sondern auch endlicher Verschiebungen desselben, die Grenzen auf der Parameterkugel, in welche, im Falle von mehr als drei Stützflächen, alle dem festen Körper unmöglichen Richtungen der Winkelgeschwindigkeit eingeschlossen sind, eine vollständigere Untersuchung verschiedener spezieller Lagen von mehr als vier Stütznormalen und endlich eine systematische Untersuchung der Bedingungen für solche Lagen der Stütznormalen, bei welchen dem festen Körper keine Verschiebungen möglich bleiben.

# Grundzüge einer Grapho-Ballistik auf Grund der Kruppschen Tabelle.

Von

Prof. Dr. Carl Cranz
in Stuttgart.

Hierzu Tafel III.

Die Methoden, welche dazu dienen, die aus irgend einem Anlass, insbesondere bei der Anfertigung von Schusstafeln, sich darbietenden ballistischen Aufgaben zu lösen, sind zur Zeit vorwiegend rein rechnerischer Natur, und vermutlich wird das rechnerische Verfahren in der Ballistik für die nächste Zeit noch im Vordergrund des Interesses bleiben, zumal da gerade gegenwärtig von einer grösseren Anzahl von Ballistikern mit Erfolg daran gearbeitet wird, die Rechnungsmethoden zugleich zu vereinfachen und zu verschärfen. Immerhin ist es nicht unmöglich, dass sich im Laufe der Zeit innerhalb der Ballistik eine ähnliche Wandlung vollzieht, wie dies in den eigentlich technischen Wissenschaften zum Teil der Fall war, wo, wenigstens für gewisse Zwecke, die graphischen Methoden mehr und mehr an Boden gewonnen haben.

In der Ballistik empfiehlt sich die graphische Methode besonders für solche Fälle, wo nicht ausschliesslich für einen einzelnen Punkt der Flugbahn, etwa den Aufschlagpunkt oder den Scheitel, die verschiedenen Flugbahnelemente, d. h. die Ordinate $y$, die Bahngeschwindigkeit $v$, die Flugzeit $t$, die Horizontalneigung $\omega$ der Tangente gefordert werden, sondern wo ein vergleichender Überblick über diese Elemente für eine Reihe von Flugbahnpunkten, etwa zum Zweck der Ermittelung der Rasanz oder des bestrichenen Raumes, zu gewinnen ist.

Im folgenden soll als ein Beitrag zur graphischen Ballistik eine Methode entwickelt werden, welche in des Verfassers „Compendium der theoretischen äusseren Ballistik" (B. G. Teubner 1896) nur kurz angedeutet werden konnte, und welche an rechnerischen Grundlagen entweder die ohne Rücksicht auf die Schwerkraft durchgeführte Lösung des ballistischen Problems, oder einfacher die Kruppsche empirische Tabelle zu Hilfe nimmt. Es wird sich zeigen, dass hinsichtlich des Genauigkeitsgrads diese graphische Methode mit jeder Rechnungsmethode sich messen kann, ja manche derselben übertrifft.

1. Es sei gestattet, mit Rücksicht auf solche Leser, welche als mathematische Laien mit ballistischen Aufgaben sich zu beschäftigen haben, die Entwickelungen ausführlicher zu halten, als es unter anderen Umständen der Fall wäre. Zunächst möge auf die bisherige Litteratur des Gegenstandes mit wenigen Worten eingegangen werden.

Die Methode von Poncelet,* später von Didion** hinsichtlich einiger Einzelheiten vereinfacht, beruht auf dem Satz von der lebendigen Kraft; die Flugbahn $OO_1O_2O_3\ldots$ wird stückweise aus den Bögen $OO_1$, $O_1O_2$, $O_2O_3$ u. s. w. zusammengesetzt: Die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses von der Masse $m$ sei $v_0$, der anfängliche Luftwiderstand $W_0$, in $O_1$ sei die Geschwindigkeit $v_1$; man wählt das Kurvenelement $OO_1$ beliebig, doch so klein, dass längs desselben der Luftwiderstand $W_0$ als konstant betrachtet werden kann, und hat die Gleichung:

$$\frac{m\cdot v_0^2}{2} - \frac{m\cdot v_1^2}{2} = W_0\cdot OO_1;$$

hieraus erhält man $v_1$, analog ergiebt sich die Geschwindigkeit $v_2$ in $O_2$ u. s. f. Dieser Bogen $OO_1$ wird nun dadurch beschrieben, dass man den Krümmungsradius $\varrho_0$ in $O$ ermittelt: Die Komponente $N_0$ der äusseren Kräfte, welche in $O$ längs der Normale gerichtet ist, lässt sich aus dem Geschossgewicht und der Anfangsrichtung der Bewegung sofort ermitteln, und anderseits ist $N_0 = \frac{m\cdot v_0^2}{\varrho_0}$, damit kennt man $\varrho_0$; diese Strecke trägt man auf der Normalen in $O$, also auf der zur Abgangsrichtung Senkrechten in $O$, nach der konkaven Seite der Flugbahn hin ab, aus dem Endpunkt dieser Strecke als Mittelpunkt beschreibt man mit $\varrho_0$ den Kreisbogen $OO_1$, dessen Länge vorhin angenommen worden war; damit ist man zum zweiten Punkt $O_1$ gelangt, von welchem aus man analog weiter bis $O_2$ konstruiert, wie vorhin von $O$ bis $O_1$, u. s. w.

Während bei diesem eben skizzierten Verfahren die Flugbahn aus mehreren Kurvenelementen, nämlich Kreisbögen, aufgebaut wird, ersetzt Ökinghaus*** die Flugbahn in ihrem ganzen Verlauf durch eine Hyperbel, deren eine Asymptote vertikal liegt und deren Konstruktion natürlich aus der Kegelschnittlehre folgt. Unter allen Umständen ist auch jede graphische Methode ein blosses Näherungsverfahren, übereinstimmend damit, dass die analytische Lösung der Differentialgleichungen des ballistischen Problems nicht in aller Strenge zu erreichen ist; im ersteren Falle liegt die Vernachlässigung vor allem darin, dass unendlich kleine Kurvenelemente durch endlich kleine von

---

* Poncelet, leçons de mécanique industrielle, Metz 1828/29, II. partie, pag. 55.

** Didion, traité de balistique, Paris 1848, pag. 196 ff.

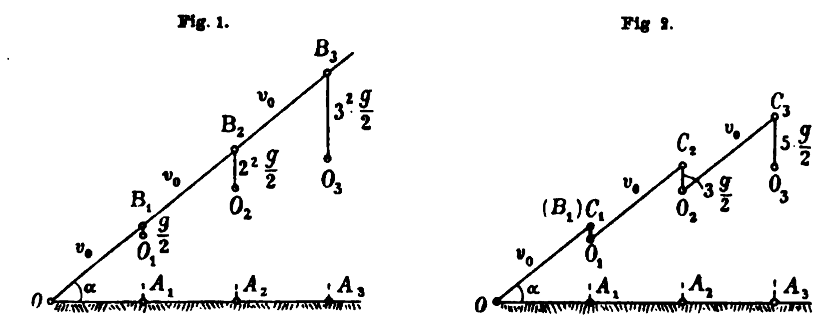
*** E. Ökinghaus, „die Hyperbel als ballistische Kurve“, Archiv für die Artillerie- und Ingenieuroffiziere des deutschen Reichs, von Jahrgang 1893 S. 241 bis 1895.

beschränkter Anzahl ersetzt werden, im zweiten Fall darin, dass für die ballistische Linie, deren jedenfalls sehr komplizierte Gleichung und Konstruktionsart man nicht kennt, ein Kegelschnitt substituiert wird. Da übrigens um so mehr Daten der Erfahrung einbezogen werden, aus je mehr endlichen Kurvenelementen verschiedener Gleichungsform die Flugbahn aufgebaut wird, so ist das Verfahren des ersten Falles einer höheren Steigerung der Genauigkeit fähig.

2. Das folgende Verfahren beruht auf dem Unabhängigkeitsprinzip der Mechanik und auf der Verwendung der empirischen Tabelle von Krupp.

Es sei zunächst an die bekannten Konstruktionen der Flugbahnparabel im leeren Raum erinnert (Fig. 1 bis 4).

In Figur 1 sei $OB_1B_2\ldots$ die durch den Abgangspunkt $O$ unter dem wahren Abgangswinkel $\alpha$ gegen den Horizont gezogene Gerade; darauf werden gleiche Strecken $OB_1 = B_1B_2 = \cdots$ abgetragen, welche unter Zugrundelegung einer bestimmten Längeneinheit die Anfangs-




geschwindigkeit $v_0$ oder einen konstanten Teil derselben, darstellen; von $B_1, B_2, \ldots$ aus werden vertikal abwärts die zugehörigen Fallhöhen $B_1O_1, B_2O_2 \ldots$, in der Figur 1 folglich $\frac{g}{2}1^2, \frac{g}{2}2^2, \frac{g}{2}3^2, \ldots$, abgetragen, dann sind $OO_1O_2 \ldots$ Punkte der Flugbahn. (In der That, fragen wir, wo sich z. B. zwei Sekunden nach Verlassen der Mündung das Geschoss befindet, so erhalten wir die Lage durch die Überlegung: das Geschoss befindet sich in Wirklichkeit an demselben Ort, an welchem es sich dann befinden würde, wenn es zuerst lediglich infolge des Stosses der Pulvergase zwei Sekunden lang weiterginge und dann allein der Schwerkraft ebensolange überlassen bliebe, wenn es also gewissermaßen ruckweise zuerst von $O$ nach $B_2$, dann von $B_2$ nach $O_2$ ginge u. s. w.)

Gleichbedeutend mit dieser Konstruktion ist, wie sich leicht zeigen lässt, die andere (Fig. 2): Ziehe $OC_1$ gleich $v_0$ in der Abgangsrichtung und $C_1O_1 = \frac{g}{2}$, sodann $O_1C_2$ gleich und parallel $OC_1$ und

$$C_2O_2 = 3 \cdot \frac{g}{2},$$

ferner $O_2C_3$ gleich und parallel $O_1C_2$ und $C_3O_3 = 5 \cdot \frac{g}{2}$ etc.

Ebenfalls nur eine Modifikation der ursprünglichen Konstruktion von Figur 1 ist die Sehnen-Konstruktion Figur 3: Ziehe $OD_1$ gleich $v_0$ in der Abgangsrichtung und $D_1 O_1$ gleich $\frac{g}{2}$, sodann $OO_1$ mit Verlängerung um sich selbst bis $D_2$ und $D_2 O_2$ vertikal abwärts gleich $2 \cdot \frac{g}{2}$, weiter $OO_2$ mit Verlängerung bis $D_3$, sodass wieder

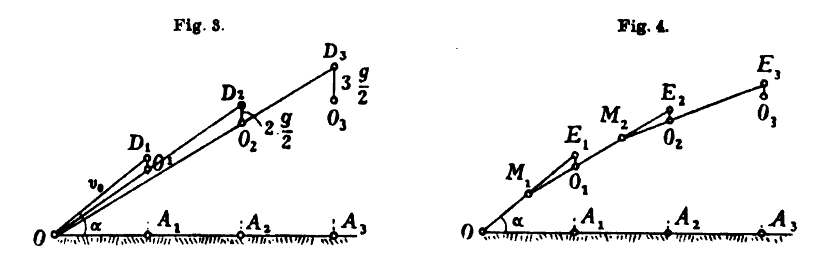
$$A_2 A_3 = A_2 A_1 = O A_1$$

ist, und $D_3 O_3$ vertikal abwärts gleich $3 \cdot \frac{g}{2}$ u. s. f.

Aus der letzteren Konstruktion lässt sich endlich die folgende besonders bequeme ableiten: Man trage wieder (Fig. 4) auf der horziontalen Abscissenaxe durch den Abgangspunkt $O$ die gleichen Strecken

$$OA_1 = A_1 A_2 = A_2 A_3 = \cdots$$

ab und ziehe durch $A_1, A_2, \ldots$ die Vertikalen; $OE_1$ sei die Anfangstangente der Flugbahn; mache $E_1 O_1$ gleich $\frac{g}{2}$ (falls $OE_1$ die Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ in met/sec darstellt, andernfalls mache $E_1 O_1$ gleich




der entsprechenden Fallhöhe im ersten Zeitteilchen), verbinde $O_1$ mit der Mitte $M_1$ von $OE_1$, die Verlängerung von $M_1 O_1$ schneidet die Vertikale durch $A_2$ in $E_2$, mache $E_2 O_2$ gleich $E_1 O_1$ und ziehe $M_2 O_2$, wo $M_2$ die Mitte von $O_1 E_1$ ist, u. s. f. In diesem Fall ist die Flugbahn durch die Flugbahnpunkte $O\, O_1\, O_2\, O_3 \ldots$ und die zugehörigen Flugbahntangenten $OM_1$, $M_1 O_1$, $M_2 O_2$, $M_3 O_3$ u. s. w. dargestellt; und dieses Verfahren giebt den Vorteil an die Hand, dass man dieselbe Länge

$$\frac{g}{2} = E_1 O_1 = E_2 O_2 = \cdots$$

im Zirkel behalten kann.

3. Alle diese Konstruktionen lassen nun Verallgemeinerungen für den lufterfüllten Raum zu, also für den Fall, der uns praktisch interessiert.

Zunächst gehen wir von der ersten Konstruktion (Fig. 1) aus und verallgemeinern dieselbe folgendermaßen: Wir denken uns die Geschossbewegung in eine grössere Anzahl von kleinen gleichen Zeitteilchen $\Delta t$ (in der Figur 5 ist $\Delta t = 1$ Sekunde angenommen) zerlegt, die Strecke, die das Geschoss allein infolge des Stosses der Pulvergase in einem

solchen Zeitteilchen in der Richtung der Anfangstangente zurücklegen würde, sei auf dieser Linie vom Abgangspunkt $O$ aus als

$$OB_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = \cdots$$

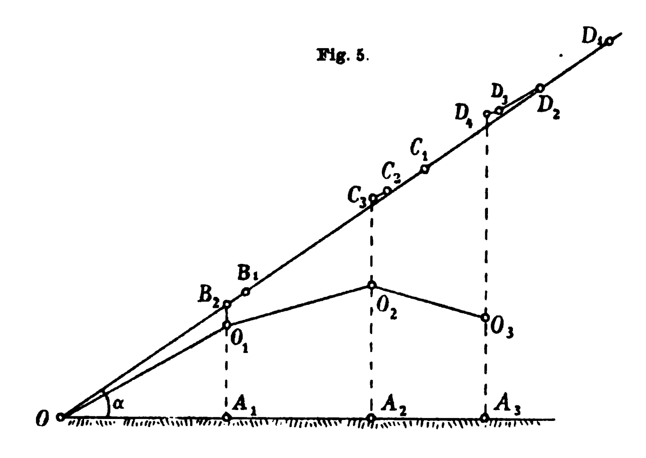
wiederholt abgetragen.

Ferner denken wir uns das ballistische Problem ohne Rücksicht auf die Schwere aufgestellt, unter Voraussetzung eines bestimmten Luftwiderstandsgesetzes, dem des Chapel-Vallier'schen oder des neuen Siacci'schen Gesetzes; die betreffende Differenzengleichung liefert uns alsdann die Geschwindigkeitsverluste $\Delta v$, welche das Geschoss in den einzelnen Zeitteilen $\Delta t$ erfährt; die halben Geschwindigkeitsverluste in dem 1., 2., 3. ... Zeitteilchen seien resp. $s_1$, $s_2$, $s_3$ ...

Wo befindet sich nun das Geschoss am Schluss des ersten Zeitteilchens?

Das Resultat ist nach dem Unabhängigkeitsprinzip dasselbe, wie wenn die drei Wirkungen der Pulverkraft, des Luftwiderstandes und

Fig. 5.




der Schwerkraft zeitlich nacheinander, gewissermaßen ruckweise einträten: Durch die Anfangsgeschwindigkeit, welche das Geschoss der Pulverkraft verdankt, allein würde das Geschoss von $O$ nach $B_1$ getrieben, durch den Luftwiderstand von $B_1$ nach $B_2$ (Fig. 5) um eine Strecke gleich $s_1$ zurückgeführt (wobei wir voraussetzen, das Zeitteilchen sei so klein gewählt, dass nahe genug der Luftwiderstand nur in der Richtung $B_1 O$ wirke); endlich durch die Schwerkraft allein würde es von $B_2$ nach $O_1$ um eine Strecke gleich $\frac{g}{2} \cdot \Delta t_1^2$ herabfallen; am Schlusse des Zeitteilchens $\Delta t_1$ befindet es sich sonach thatsächlich in $O_1$.

Ebenso ist das Geschoss nach Verfluss des zweiten Zeitteilchens $\Delta t_2$ in einem Punkt $O_2$ angelangt, den wir durch die folgende Überlegung erhalten: In den zwei Zeitteilchen würde das Geschoss allein infolge des Anfangsstosses von $O$ nach $C_1$ gelangen; sodann lediglich infolge des Luftwiderstandes von $C_1$ nach $C_3$ zurück, nämlich zuerst

von $C_1$ nach $C_2$ parallel der Anfangstangente $OB_1$ zurück um eine Strecke $C_1C_2$ gleich $3 \cdot s_1$, dann von $C_2$ nach $C_3$ um $s_2$ parallel der Richtung $OO_1$, die wir als die Richtung des Luftwiderstandes im zweiten Zeitteilchen um so genauer betrachten können, je kleiner dasselbe ist; endlich allein infolge der Schwerkraft von $C_3$ nach $O_2$ vertikal abwärts, um eine Strecke gleich

$$\frac{g}{2}(3 \cdot \Delta t_1^2 + \Delta t_2^2), \text{ oder } \frac{g}{2} \cdot 2^2 \cdot \Delta t^2,$$

wenn die Zeitteilchen gleich gewählt sind.

Dementsprechend findet sich der nächste Flugbahnpunkt $O_3$, indem man $D_1D_2 = 5s_1$ parallel zu $OB_1$, $D_2D_3 = 3 \cdot s_2$ parallel zu $OO_1$ und $D_3D_4 = s_3$ parallel zu $O_1O_2$ zieht und von $D_4$ um eine Strecke $D_4O_3$ gleich $\frac{g}{2} \cdot 3^2 \cdot \Delta t^2$ abwärts geht u. s. w

Um zu vermeiden, dass die zu benützende Verlängerung der Linie $OB_1C_1D_1 \ldots$ über das Zeichenpapier hinausfällt, wird man hierbei die zur Konstruktion Figur 2 analoge Modifikation für den lufterfüllten Raum verwenden, also durch $O_1$ eine Linie $O_1C'_1$ gleich und parallel $B_2C_1$ ziehen, sodann von $C'_1$ rückwärts den Polygonzug $C'_1C'_2C'_3$ kongruent mit $C_1C_2C_3$ zeichnen und von $C'_3$ vertikal abwärts gehen um eine Strecke $C'_3O_2$ gleich $3 \cdot \frac{g}{2}$, (falls für jene Zeitteilchen Sekunden gewählt werden), u. s. f.

4. Erheblich einfacher gestaltet sich das Verfahren, wenn man die Konstruktion von Figur 4, für den lufterfüllten Raum verallgemeinert, anwendet. Hierzu ist es vor allem erforderlich, die Horizontalprojektion der Geschossbewegung zu kennen, entweder durch Integration der betreffenden Differentialgleichung oder aber, falls es nicht auf die Verwendung eines bestimmten Luftwiderstandsgesetzes ankommt, weit einfacher und auch genauer durch Entnahme der betreffenden Zahlen aus der empirischen Tabelle* von Krupp. Diese wertvolle, auf einem gewaltigen Versuchsmaterial beruhende Tabelle giebt für alle horizontalen Geschwindigkeitskomponenten von 700 m/sec an abwärts absteigend von Meter zu Meter bis 140 m/sec folgende Grössen: erstens den Luftwiderstand $W$ auf 1 qcm des Geschossquerschnitts in Kilogramm,

* Enthalten im Anhang der Schrift: „Über die Lösung der Probleme des direkten und indirekten Schiessens", von † Generallieutenant N. Mayevski, deutsch von Hauptmann Klussmann. Berlin 1886. Mittler & Sohn 127 S. — Neuerdings wurde die Tabelle von Krupp aufwärts bis zur Geschwindigkeit 1000 m/sec und abwärts bis 50 m fortgesetzt: „Die Berechnung der Schusstafeln seitens der Gussstahlfabrik Fr. Krupp, Essen, Buchdruckerei der Gussstahlfabrik von Fr. Krupp", S. 33 bis 81. Da letztere Schrift nicht dem Buchhandel übergeben ist, so hat der Verfasser nicht das Recht, diese Tabelle hier zu wiederholen, sondern muss auf das oben erwähnte Werk von Mayevski-Klussmann verweisen; der Geschwindigkeitsbereich 140 bis 700 m genügt in der That noch immer für die Lösung der meisten Aufgaben. Eine kleine Erläuterung der Tabelle und klare Anweisung zum Gebrauch derselben an der Hand mehrerer Beispiele der Praxis hat Klussmann, S. 98 bis 102 seiner Schrift, gegeben.

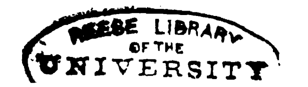
zweitens den Weg $\Delta x$ in Metern, der einer Geschwindigkeitsabnahme um 1 m entspricht, drittens die Summe $\Sigma \Delta x$ dieser Wege von Anfang der Tabelle ab, viertens die Zeiten $\Delta t$ in Sekunden, die der Geschwindigkeitsabnahme von 1 m entsprechen, und endlich fünftens die Summe $\Sigma \Delta t$. Diese Zahlen beziehen sich sämtlich auf die Querschnittsbelastung 1, d. h. man hat bei der Verwendung der Tabelle in einem speziellen Fall die betreffenden Zahlen $\Sigma \Delta x$ und $\Sigma \Delta t$ der Tabelle noch mit dem Faktor

$$\varkappa = \frac{P}{R^2 \pi \cdot \frac{\delta}{\delta_1} \cdot \lambda}$$

multipliziert zu denken; hierbei ist $P$ das Geschossgewicht in Kilogramm; $R^2\pi$ der Geschossquerschnitt in qcm; $\delta$ das Gewicht von einem Kubikmeter Luft am Versuchstag in Kilogramm; $\delta_1$ dasselbe für den in der Ballistik meist zu Grunde gelegten mittleren Barometerstand 750 mm, die mittlere Temperatur 15° C. und die relative Feuchtigkeit 50%, also $\delta_1 = 1{,}206$ kg; $\lambda$ ist der mit der Geschossform veränderliche sogenannte Formkoeffizient, der für Kruppsche Geschosse nahezu $= 1$ ist und der am vorteilhaftesten aus der Erfahrung bestimmt wird, durch Entnahme der horizontalen Komponente der Anfangsgeschwindigkeit und Endgeschwindigkeit, die zu einer bekannten Schussweite gehören, und zwar werden letztere Zahlen entweder der Schusstafel für das betreffende Geschoss selbst oder wenigstens für ein Geschoss eines möglichst ähnlichen Geschütz- oder Gewehrsystems entnommen. Die Tabelle von Krupp liefert sodann die gesamte Horizontalprojektion der Geschossbewegung. (Weiterhin verfährt Krupp zur Bestimmung der Flugbahn selbst nach der in einer gewissen Weise modifizierten Siaccischen Methode mittelst der Siaccischen Funktionen $D$, $J$, $A$, $T$; die Versuche von Krupp haben dabei gezeigt, dass die Tabelle nicht nur für kleine Elevationen mit rasanter Flugbahn, sondern auch für grössere Elevationen Geltung behält.) Die mehrfach erwähnte Tabelle von Krupp ist zu umfangreich, um hier Platz finden zu können, ihr Anfang ist der folgende:

| $v_x$ m | $W$ kg | $\Delta x$ m | $\Sigma \Delta x$ m | $\Delta t$ Sek. | $\Sigma \Delta t$ Sek. |
|---|---|---|---|---|---|
| 700 | | | | | |
| 699 | 1,925 | 37 | 37 | 0,053 | 0,053 |
| 698 | 1,919 | 37 | 74 | 0,053 | 0,106 |
| 697 | 1,913 | 37 | 111 | 0,053 | 0,159 |

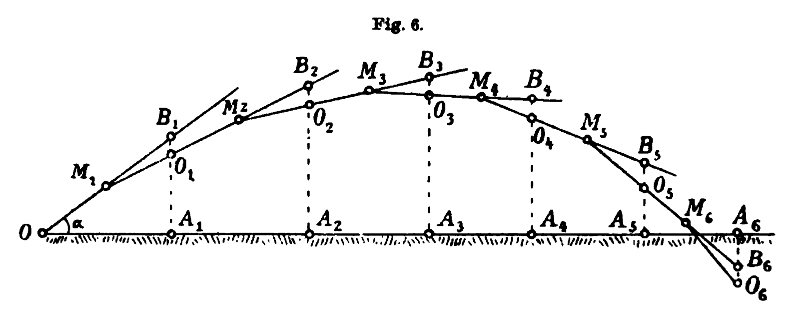
Damit kennt man in den successiven Punkten $O$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ ... der horizontalen Abscissenaxe durch den Abgangspunkt $O$ die Horizontalprojektionen $v_x$ der Bahngeschwindigkeit $v$ und die Zeiten $\Delta t_1$, $\Delta t_2$, ..., welche die Horizontalprojektion des Geschosses erfordert, um von $O$ nach $A_1$, von $A_1$ nach $A_2$ u. s. w. zu gelangen.



Der Abgangswinkel, also der Neigungswinkel der Anfangstangente $OB_1$ gegen den Horizont im Abgangspunkt $O$, sei gegeben gleich $\alpha$.

Es lässt sich nun von $O$ aus ein zweiter Flugbahnpunkt, nämlich derjenige, dessen Projektion $A_1$ ist, sogleich finden, indem man von $B_1$ aus die Strecke $B_1 O_1$ gleich $\frac{g}{2} \cdot \Delta t_1^2$ vertikal abwärts abträgt. Als Flugbahntangente in dem neuen Punkt $O$ wählen wir die Verbindungs-

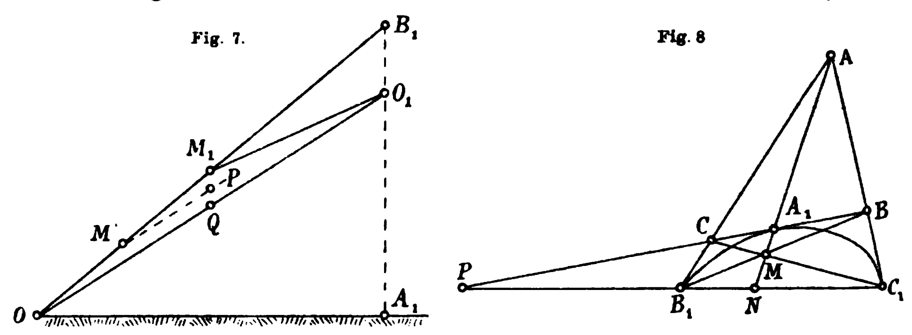
Fig. 6.




linie $M_1 O_1 B_2$ der Mitte $M_1$ von $OB_1$ mit $O_1$, dann lässt sich von $O_1$ aus ganz analog weiter konstruieren, wie vorhin von $O$ aus; die Vertikale $A_2 B_2$ in $B_2$ trifft nämlich die vorhin erwähnte $M_1 O_1$ bezw. ihre Verlängerung in $B_2$, von $B_2$ geht man um $B_2 O_2 = \frac{g}{2} \cdot \Delta t_2^2$ vertikal abwärts und zieht $M_2 O_2$, wo $M_2$ die Mitte von $O_1 B_2$; so ist $O_2$ ein dritter Flugbahnpunkt und $M_2 O_2$ die Bahntangente in diesem Punkt $O_2$ u. s. w.

Bei diesem Verfahren stellt sich die Flugbahn als Einhüllende ihrer Tangenten dar; und ferner kommt, wie leicht zu sehen ist, das

Fig. 7. Fig. 8




Verfahren darauf hinaus, die Flugbahn aus ebensovielen Bögen verschiedener Parabeln mit vertikaler Axe zusammenzusetzen, als man Stücke $OA_1$, $A_1 A_2$, ... auf der Abscissenaxe angenommen hat. In der That, betrachten wir z. B. das erste Parabelstück zwischen $O$ und $O_1$ (Fig. 7). Für dieses sind gegeben die beiden Punkte $O$ und $O_1$, die vertikale Axenrichtung, und die Tangente $OB_1$ im ersten Punkt $O$. Soll nun $M_1 O_1$ die Tangente einer solchen Parabel im zweiten Punkt $O_1$

sein, so muss $M_1$ die Mitte von $OB_1$ sein. Berühren nämlich die Seiten eines Dreiecks $ABC$ (Fig. 8) einen Kegelschnitt in den Punkten $A_1$, $B_1$, $C_1$ und zieht man $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, so gehen letztere Verbindungslinien nach dem Satz von Brianchon durch denselben Punkt $M$, und $P$, $B_1$, $N$, $C_1$ sind vier harmonische Punkte; lässt man nun die Seite $CB$ und damit $A_1$ ins Unendliche rücken, so wird der Kegelschnitt eine Parabel; deren Axe sei vertikal; die Verbindungslinie $MQ$ (Fig. 7) des Schnittpunkts $M_1$ der beiden Tangenten $M_1O$ und $M_1O_1$ mit der Mitte $Q$ von $OO_1$ wird Parabeldurchmesser, also vertikal und parallel zu $A_1B_1$.

Zugleich sieht man, dass die Mitte $P$ von $M_1Q$ ein weiterer Punkt der Parabel ist. Darin liegt ein sehr einfaches Mittel, beliebige weitere Flugbahnpunkte zu konstruieren und die Tangente in einem beliebigen Flugbahnpunkt zu ziehen, indem man diesem immer näher kommt: Verbindet man nämlich $M_1$ mit der Mitte $Q$ von $OO_1$ und halbiert $M_1Q$ in $P$, so ist $P$ ein weiterer Punkt der Flugbahn; die Tangente in diesem Punkt $P$ ist die Verbindungslinie von $P$ mit der Mitte von $OM_1$ u. s. f.

Es lässt sich noch fragen, in welcher Weise die Schussweite, also das Stück der Abscissenaxe zwischen Abgangspunkt $O$ und Auffallpunkt, in Teile $OA_1$, $A_1A_2$, $A_2A_3$ .. zerlegt werden soll. — Naturgemäss wird die Konstruktion um so genauer sein, je mehr Zwischenpunkte $A_1$, $A_2$, $A_3$ ... man annimmt; eine Grenze ist jedoch dadurch gegeben, dass das Ziehen der Verbindungslinien $M_1O_1$, $M_2O_2$, ... sicher genug erfolgen muss.

Dabei kann man entweder

a) die Einteilung so treffen, dass die Zeitteilchen $\Delta t_1$, $\Delta t_2$, ... alle gleich werden; dies giebt den Vorteil, dass die Fallhöhen $B_1O_1$, $B_2O_2$,... sämtlich mit gleicher Zirkelweite abgetragen werden können, dagegen die grössere Unbequemlichkeit, dass in der Kruppschen Tabelle interpoliert werden muss.

### Beispiel.

Panzergranate der 40 cm-Stahlkanone der italienischen Küstenartillerie.

Geschossgewicht $P = 920$ kg; Kaliber $2R = 40$ cm; Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 550$ m/sec; der Formkoeffizient $\lambda$ möge aus Mangel spezieller Daten $= 1$ angenommen werden.

Gegeben der Abgangswinkel $\alpha = 13\frac{1}{4}^0$.

Gesucht die Schussweite $X$, der Auffallwinkel $\alpha'$, die Flugzeit $T$, die Abscisse und Ordinate des Scheitels.

Es ist $\varkappa = \frac{P}{R^2\pi\cdot 1} = \frac{920}{20^2\, 3{,}14} = 0{,}732$. Die Zwischenzeiten $\Delta t_1$, $\Delta t_2$... mögen etwa sämtlich je gleich zwei Sekunden, also die Fallhöhen $B_1O_1$, $B_2O_2$, $B_2O_3$ ... unter sich gleich und rund $= 20$ m ge-

wählt werden. Man hat dann mit Benützung der Tabelle von Krupp, in der man von der horizontalen Komponente:

$$v_0 \cdot \cos\alpha = 550 \cdot \cos 13\frac{1}{4}^0 = 535 \text{ m}$$

auszugehen hat, folgende Zahlenreihe:

| | Horizontale Geschwindig-keit $v_x$ | $\Sigma\Delta x$, von $O$ ab gezählt | |
|---|---|---|---|
| | | in der Tabelle von Krupp | multipliziert mit 0,732 |
| in $O$ | 535 | 0 | 0 |
| „ $A_1$ | 506,5 | 1430 | 1045 |
| „ $A_2$ | 481 | 2775 | 2030 |
| „ $A_3$ | 458 | 4053 | 2960 |
| „ $A_4$ | 437 | 5280 | 3850 |
| „ $A_5$ | 418 | 6450 | 4710 |
| „ $A_6$ | 401 | 7560 | 5520 |
| „ $A_7$ | 386 | 8650 | 6315 |
| „ $A_8$ | 372,6 | 9660 | 7055 |
| „ $A_9$ | 360,5 | 10670 | 7780 |
| „ $A_{10}$ | 350,5 | 11650 | 8500 |
| „ $A_{11}$ | 341,6 | 12620 | 9200 |
| „ $A_{12}$ | 334 | 13510 | 9880 |
| | etc. | etc | etc. |

Es ist also $OA_1 = 1045$ m, $OA_2 = 2030$ m, u. s. w., ferner

$$B_1 O_1 = B_2 O_2 = \cdots = 20 \text{ m}; \quad \text{tg}\,\alpha = 0{,}2355.$$

Die Konstruktion (nach Fig. 6) wurde auf Millimeterpapier im Maßstab 1 mm = 10 m mit hartem Bleistift so genau als möglich ausgeführt; die einzelnen Meter konnten im Resultat geschätzt, die Winkel auf Minuten genau aufgetragen und erhalten werden.

Man setzt die Konstruktion soweit fort, bis man die horizontale Abscissenaxe wieder erreicht hat und etwas darunter kommt; wenn nötig, werden sodann nach der Konstruktion Figur 7 ein oder zwei weitere Flugbahnpunkte eingeschaltet; vielfach aber, und so auch hier, genügt proportionale Interpolation; es fand sich u. a. der Tangens des Auffallwinkels $\alpha'$ zwischen

$$\frac{283}{1000} \text{ und } \frac{310}{1000};$$

durch Interpolation proportional den Entfernungen wird

$$\alpha' = 17^0\,20';$$

zusammen ist das Resultat der graphischen Lösung:



| | | |
|---|---|---|
| Schussweite | $X = 9520$ m | (die Schusstafel* giebt 9500 m); |
| Auffallwinkel | $\alpha' = 17^0 20'$ | ( „ „ „ $17^0 42'$); |
| Flugzeit | $T = 23{,}0$ Sek. | ( „ „ „ 23,1 Sek.); |
| Abscisse des Scheitels | $x_s = 5100$ m; | |
| Ordinate „ „ | $y_s = 660$ m. | |

b) Oder aber können die Zwischenstrecken $\Delta x$ auf der horizontalen Abscissenaxe, also die Abstände $OA_1$, $A_1A_2$, $A_2A_3, \ldots$ unter sich gleich gross angenommen und aus der Kruppschen Tabelle die zugehörigen Geschwindigkeiten und Zwischenzeiten $\Delta t_1$, $\Delta t_2, \ldots$ entnommen werden.

Beispiel.

Panzergranate der Kruppschen 30,5 cm-Kanone für Küsten- und Schiffsartillerie** (1893 in Chicago ausgestellt).

Kaliber $2R = 30{,}5$ cm; Geschossgewicht $P = 455$ kg; Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 550$ m/sec.

Gesucht ist die Schussweite für den Abgangswinkel

$$\alpha = 22^0\, 27', \ (\operatorname{tg} \alpha = 0{,}41318).$$

Es seien die Zwischenstrecken

$$OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = 1000 \text{ m}$$

angenommen; dann findet sich für die einzelnen Flugzeiten $\Delta t_1$, $\Delta t_2, \ldots$ zwischen $O$ und $A_1$, $A_1$ und $A_2$ u. s. w. aus der Tabelle von Krupp der Reihe nach:

1,77; 1,87; 1,99; 2,12; 2,25; 2,40; 2,56;
2,77; 2,89; 3,05; 3,27; 3,46; 3,66; 3,87 Sekunden;

also sind die entsprechenden Fallhöhen $\frac{g}{2} \cdot \Delta t^2$, oder die Strecken $B_1O_1$, $B_2O_2$ u. s. w.:

15,3; 17,1; 19,4; 22,0; 24,8; 28,2; 32,1;
37,6; 40,9; 45,6; 52,3; 58,5; 65,7; 73,5 Meter.

Danach ist die Flugbahn nach Figur 6 mit den Zahlen

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4131{,}8}{10000}, \ OA_1 = A_1A_2 = \cdots = 1000 \text{ m}; \ O_1B_1 = 15{,}3 \text{ m}, \ B_2O_2 = 17{,}1 \text{ m}$$
u. s w.

aufzubauen. Die Ausführung der Zeichnung im Maßstab 1 mm = 20 m lieferte das folgende Resultat:

| | | |
|---|---|---|
| Schussweite | $X = 14250$ m | (die Schusstafel giebt 14000 m); |
| Auffallwinkel | $\alpha' = 34^0 10'$ | ( „ „ „ $32^0 30'$); |
| Endgeschwindigkeit | $v' = 341$ m | ( „ „ „ 341 m); |
| Flugzeit | $T = 38{,}5$ Sek. | ( „ „ „ 37,9 Sek.); |
| Scheitelabscisse | $x_s = 8400$ m; | |
| Scheitelordinate | $y_s = 1970$ m. | |

---

* Archiv für die Artillerie- und Ingenieuroffiziere des deutschen Reichs, Jahrgang 1891, S. 487 flg; Auszug aus dem Manuele d'Artigleria.

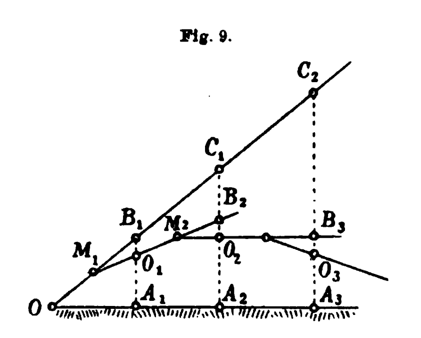
** Vergl. Waffenlehre von Wille, Generalmajor z. D., Berlin 1896, S. 210.

c) Endlich können die Zwischenpunkte $A_1, A_2, A_3$ .. der Horizontalprojektion auch beliebig angenommen und die zugehörigen Zwischenzeiten $\Delta t$ der Tabelle von Krupp entnommen werden. Dieses Verfahren ist dasjenige, welches am einfachsten und mühelosesten zum Ziel führt; man wird die Abstände $OA_1$, $A_1A_2$, $A_2A_3$... ungefähr gleich annehmen; doch so, dass in der Tabelle von Krupp nicht interpoliert werden muss. Beispiele sind weiter unten durchgeführt.

Will man vermeiden, dass bei flachen Flugbahnen die einzelnen Tangenten $M_1O_1$, $M_2O_2$, ... sich unter zu kleinen Winkeln schneiden, so vergrössert man allein den Maßstab der Ordinaten; die durch Zeichnung erhaltene Schussweite $X$ wird dadurch nicht geändert (denn man hat zwei kollineare Kurvensysteme mit der Abscissenaxe als Kollineationsaxe).

Soll ferner umgangen werden, dass man die mitunter sehr kleinen Fallhöhen $B_1O_1$, $B_2O_2$ ... einzeln mit dem Zirkel abzustechen und in der Zeichnung einzutragen hat, wodurch sich Fehler summieren können, so lassen sich auch (vergl. Fig. 9) die grösseren Strecken $B_1O_1$, $C_2O_2$, $C_3O_3$..., welche sämtlich von der Anfangstangente aus gerechnet sind, leicht berechnen und sodann als Ganzes eintragen.

Fig. 9.




Sind nämlich bei gleichen Zwischenstrecken

$$OA_1 = A_1A_2 = \cdots$$

die Fallhöhen $B_1O_1$, $B_2O_2$, $B_3O_3$ ... bezw. kurz mit $s_1$, $s_2$, $s_3$ ... bezeichnet, so ist leicht zu zeigen, dass man hat

$$\begin{aligned} B_1O_1 &= s_1, \\ C_2O_2 &= 3s_1 + s_2, \\ C_3O_3 &= 5s_1 + 3s_2 + s_3 \\ C_4O_4 &= 7s_1 + 5s_2 + 3s_3 + s_4 \end{aligned}$$

u. s. w.

Diese Längen erhält man durch blosse Addition nach dem Schema:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a+b$ | $2a+b$ | $3a+b$ |
| $c$ | $a+b+c$ | $3a+2b+c$ | $5a+3b+c$ |
| $d$ | $a+b+c+d$ | $4a+3b+2c+d$ | $7a+5b+3c+d$ |

u. s. w.

Z. B. waren in dem obigen Beispiel der 30,5 cm-Kanone die Strecken $B_1 O_1$, $C_2 O_2$, $C_3 O_3$, $C_4 O_4$ ... der Reihe nach:

15,3; 63,2; 147,5; 273,3; 445,8; 671,4; 957,3

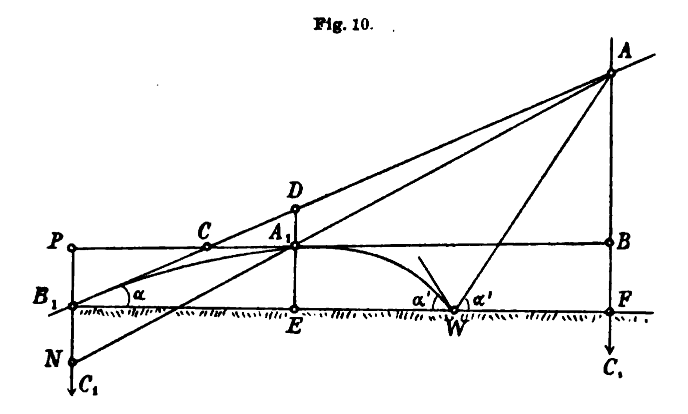
1313,8; 1746,9; 2267,4; 2885,8; 3615,1; 4468,5; 5461,1 m.

Übrigens wird bei diesem Verfahren, abgesehen von der Mühe der weiteren Vorberechnung, der Nachteil erzeugt, dass zur Verlängerung der Anfangstangente $OB_1$ ein sehr grosses Zeichenblatt verwendet werden muss. Es wird selten diese letztere Modifikation notwendig werden.

5. Wenigstens von theoretischem Interesse ist es, das im Vorhergehenden beschriebene Verfahren noch etwas zu verallgemeinern.

Es ist nicht notwendig, $M_1$ als Mittelpunkt von $O$ und $B_1$, $M_2$ als Mitte von $O_2$ und $B_2$ u. s. w. anzunehmen; man kann vielmehr auch $OB_1$, $O_1 B_2$ ... nach bestimmten andern Verhältnissen, die von 1 : 1 wenig

Fig. 10.




verschieden sind, in $M_1$, $M_2$ ... teilen. In diesem Fall kommt die Konstruktion darauf hinaus, die einzelnen Flugbahnstrecken zwischen $O$ und $O_1$, $O_1$ und $O_2$ u. s. w. aus ebensovielen verschiedenen Hyperbelbögen zusammenzusetzen, welche sich in den successiven Flugbahnpunkten $O_1$, $O_2$, $O_3$ ... berühren, und welche sämtlich eine vertikale Asymptote gemeinsam haben sollen (einer bekannten Eigenschaft der ballistischen Linie zufolge):

Man betrachte zu diesem Zweck wieder die obige Figur 8; hier werde $AB$ zur Asymptote, es rücke also allein der Berührungspunkt $C_1$ ins Unendliche; dann ist (Fig. 10) $PB_1 = NB_1$ und parallel der Asymptote $AB$, also vertikal; zieht man also noch durch $A_1$ die Parallele $DE$ zur Asymptote, so verhält sich

$$B_1 C : CD = PB_1 : DA_1 = B_1 N : DA_1 = B_1 D : B_1 A = B_1 F : EF;$$

$B_1 F$ ist in unserem Falle die horizontale Abscissenaxe, auf welcher die Punkte $B_1$ und $E$ (in Fig. 6 z. B. mit $O$ und $A_1$ bezeichnet) gegeben sind; falls die Lage der Asymptote, d. h. der Punkt $F$ gegeben

ist, kennt man somit das Verhältnis $B_1C:CD$, in welchem $B_1D$ zu teilen ist, um $C$ und damit die Tangente $CA_1$ in dem auf den Flugbahnpunkt $B_1$ folgenden nächsten Punkt $A_1$ zu erhalten. Kehren wir also zu den Bezeichnungen von Figur 6 oder auch Figur 9 zurück, so ist das Resultat folgendes: man teilt $OB_1$ im Verhältnis $OF:A_1F$ ($F$ der Schnittpunkt der vertikalen gemeinschaftlichen Asymptote mit der Abscissenaxe; der Teilpunkt sei $M_1$) dann ist $M_1O_1$ die Tangente in $O_1$. Ferner teilt man $O_1B_2$ in $M_2$ nach dem Verhältnis $A_1F:A_2F$ und zieht $M_2O_2$, so ist dies die Tangente in $O_2$ u. s. f.

Um jedoch die Lage der Asymptote zu finden, kann man mit Ökinghaus die Näherungsannahme machen, die Flugbahn sei eine einzige Hyperbel; lässt man dann den variablen Punkt $A_1$ (Fig. 10) mit dem Auffallpunkt $W$ zusammenfallen, so erkennt man leicht, dass der Punkt $A$ der Asymptote erhalten wird, indem man im Auffallpunkt $W$ den spitzen Auffallwinkel $\alpha'$ an die Abscissenaxe im Sinne wachsender Abscissen anträgt und den freien Schenkel mit der Abgangslinie $B_1D$ in $A$ zum Schnitt bringt; die Vertikale durch $A$ ist dann die Asymptote; da meist der Punkt $A$ über das Zeichenblatt hinausfallen würde, so wird man — die Richtigkeit ergiebt sich leicht aus dem Vorhergehenden — die Entfernung $B_1F$ der Asymptote vom Abgangspunkt mittelst des Ausdrucks berechnen:

$$X\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha'-\operatorname{tg}\alpha},$$

wobei $\alpha$ der Abgangswinkel, $\alpha'$ der Auffallwinkel, $X$ die Schussweite ist.

Man wird sonach zunächst die frühere Methode anwenden und einen ersten Wert $X$ der Schussweite, sowie den Auffallwinkel $\alpha'$ graphisch ermitteln und erhält mit dem eben angeführten Ausdruck die Lage der Asymptote, also den Punkt $F$; damit hat man die Verhältnisse, nach denen die Strecken

$$OB_1,\ O_1B_2,\ O_2B_3\ldots \quad \text{in} \quad M_1,\ M_2,\ M_3\ldots$$

zu teilen sind; so führt man die Konstruktion nochmals aus.

Zugleich sieht man, dass in der That in diesem Verfahren eine Verallgemeinerung des früheren liegt; nimmt man nämlich speziell die sämtlichen Verhältnisse $OM_1:M_1B_1$, $O_1M_2:M_2B_2$ u. s. w. unter sich gleich und gleich 1 an, so rückt $F$ ins Unendliche und die Hyperbel geht in den Grenzfall der Parabel über. Bei der praktischen Ausführung zeigt sich auch, dass diese Modifikation des früheren einfacheren Verfahrens vielfach nur darauf hinauskäme, beim Ziehen von $M_1O_1$, $M_2O_2\ldots$ das Lineal etwas näher an $M_1$, $M_2\ldots$ anzulegen, als an $O_1$, $O_2\ldots$

Um ein Beispiel anzuführen, so fanden wir oben bei der Kruppschen 30,5 cm-Kanone die Schussweite und den Auffallwinkel, daraus wird nun die Entfernung der Mündung von der vertikalen Asymptote $OF = 39800$ m; somit ist das Teilungsverhältnis $OM_1:M_1B_1$ im Anfang der Flugbahn $= 39800:38800 = 0{,}506$; dagegen am Ende der

Flugbahn wird dieses Verhältnis 26800 : 25800 = 0,509; die Zwischenwerte des Teilungsverhältnisses kann man durch Interpolation bestimmen. Auf diese Weise wurde die Flugbahn aufs neue stückweise konstruiert; es fand sich:

| | | |
|---|---|---|
| Schussweite | $X =$ | 14170 m, |
| Scheitelabscisse | $x_s =$ | 8300 m, |
| Scheitelordinate | $y_s =$ | 1910 m, |
| Flugzeit | $T =$ | 38,5 Sek., |
| Auffallwinkel | $\alpha' =$ | $34^0\ 10'$. |

Also ist der Unterschied zwischen der jetzigen und der nach dem früheren Verfahren erhaltenen Schussweite ein nur geringer. Die Ausführung der Konstruktion für zahlreiche Beispiele der Praxis zeigte dem Verfasser, dass die Verschärfung der Methode durch Anwendung der Hyperbelbögen bei weitem weniger ins Gewicht fällt, als die richtige Bestimmung des Formkoeffizienten $\lambda$ bei der Anwendung der Kruppschen Tabelle.

Wie schon oben angedeutet, empfiehlt es sich am meisten, den Faktor $\lambda$ empirisch zu bestimmen*; in solchen Fällen, wo hierfür nicht geeignete Schusstafelwerte vorliegen, leisten die Tabellen von Ingalls,** Vallier*** und von Wuich† gute Dienste.

Mit Rücksicht auf die praktische Verwendung möge unter den erwähnten Methoden die im Vorhergehenden als die einfachste und bequemste bezeichnete Methode besonders hervorgehoben, für die einzelnen ballistischen Aufgaben spezialisiert und durch Beispiele erläutert werden.

## Zusammenstellung der graphischen Methode.

### 1. Aufgabe.

Gegeben sei die Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ m, der Abgangswinkel $\alpha^0$; ferner Gewicht $P$ (kg) und Querschnitt $R^2\pi$ (qcm) des Geschosses, sowie dessen Formkoefficient $\lambda$.

Gesucht ist die Schussweite $X$, der spitze Auffallwinkel $\alpha'$, die Koordinaten $x_s$, $y_s$ des Scheitels, die ganze Flugzeit $T$, die Endgeschwindigkeit $v'$ und für eine beliebige Entfernung $x$ die Ordinate der Flugbahn, die Flugzeit $t$ und der Horizontalneigungswinkel $\omega$ der Tangente.

* Vergl. das oben angeführte Werk von Mayevski-Klussmann.

** James M. Ingalls, Captain, First Artillery: Journal of the United States Artillery, April 1895, Nr. 2, Vol. IV, p. 191; vergl. auch den Auszug dieser Arbeit in der Zeitschrift „Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens", Wien, Jahrgang 1896, 7. Heft, S. 411.

*** E. Vallier, chef d'escadron d'Artillerie, „balistique expérimentale", Paris 1894, p. 10.

† Nic. von Wuich, Oberst im Artilleriestab, „Lehrbuch der äusseren Ballistik", Wien 1882, S. 122 flg.

Man denkt sich die horizontale Schussweite (Abscissenaxe) in mehrere annähernd gleiche Teile $OA_1$, $A_1 A_2$, $A_2 A_3 \ldots$ geteilt und entnimmt, nach Ausrechnung des Faktors

$$\varkappa = \frac{P}{R^2 \pi \cdot \lambda \cdot \frac{\delta}{\delta_1}},$$

aus der Tabelle von Krupp die zu $A_1$, $A_2$, $A_3, \ldots$ gehörigen Werte der horizontalen Geschwindigkeiten $v_x$ und der Flugzeiten $t = \Sigma \Delta t$; zu den betreffenden Zwischenzeiten $\Delta t$ berechnet man die Fallhöhen $\frac{g}{2} \cdot \Delta t^2$ oder die Strecken $B_1 O_1$, $B_2 O_2$, $B_3 O_3 \ldots$ (Fig. 6) und konstruiert sodann die Flugbahn vom Abgangspunkt $O$ aus stückweise wie folgt: Auf Millimeterpapier trägt man in entsprechendem möglichst grossem Maßstab (Infanterie 1 mm = 2 m bis 5 m, Artillerie 1 mm = 5 m bis 20 m) die gewählten Zwischenstrecken $\Delta x$, also $OA_1$, $A_1 A_2$, $A_2 A_3 \ldots$ auf und zieht unter dem Abgangswinkel $\alpha$ die Linie $OB_1$, welche die Vertikale von $A_1$ in $B_1$ trifft; mache $B_1 O_1$ gleich der ersten Fallhöhe $\frac{g}{2} \Delta t_1^2$ und verbinde $O_1$ mit der Mitte $M_1$ von $OB_1$, so ist $O_1$ ein zweiter Flugbahnpunkt und $M_1 O_1$ die Tangente in diesem; ebenso mache $B_2 O_2$ gleich der zweiten Fallhöhe $\frac{g}{2} \cdot \Delta t_2^2$ und verbinde $O_2$ mit der Mitte $M_2$ von $O_1 B_2$, so ist $O_2$ der Flugbahnpunkt, dessen Projektion $A_2$ ist, und $M_2 O_2$ die Tangente in $O_2$. So fährt man fort, bis der Boden wieder erreicht ist und geht mit der Konstruktion noch etwas darunter.

Falls es notwendig wird, erhält man weitere Flugbahnpunkte durch die Konstruktion von Figur 7: Um z. B. zwischen $O$ und $O_1$ Punkte einzuordnen, zieht man $OO_1$, Mitte $Q$, dann ist die Mitte $P$ von $M_1 Q$ ein Flugbahnpunkt und die Tangente in $P$ ist die Verbindungslinie von $P$ mit der Mitte $M'$ von $OM_1$. Analog lässt sich noch ein weiterer Punkt samt seiner Tangente zwischen $O$ und $P$ einordnen u. s. f. Vielfach genügt aber proportionale Interpolation.

Der Flugbahnscheitel und der bestrichene Raum ergeben sich auf einem horizontal und vertikal eingeteilten Zeichenpapier ohne weiteres. Die Flugzeiten und die horizontalen Geschwindigkeiten $v_x$ hat man aus der Kruppschen Tabelle; eine Bahngeschwindigkeit $v$ selbst erhält man, indem man der Zeichnung den zugehörigen Neigungswinkel $\omega$ (auf Minuten genau, und zwar direkt den Tangens von $\omega$) entnimmt, mittelst $v = v_x : \cos \omega$.

Von besonderer Wichtigkeit für die Genauigkeit des Resultats ist die Kenntnis des richtigen Formkoeffizienten $\lambda$.

Ist die Flugbahn sehr rasant, so wird der Maßstab der Ordinaten entsprechend grösser gewählt, als der der Abscissen; hierdurch wird erreicht, dass die Fallhöhen $B_1 O_1$, $B_2 O_2 \ldots$ genauer abzutragen sind, und dass die successiven Tangenten sich nicht unter zu kleinen Winkeln in der Zeichnung schneiden.

Die Wahl der Grösse der Zwischenstrecken $OA_1$, $A_1A_2$, $A_2A_3$ ... geschieht derart, dass diese zwar annähernd gleich gross sind, dass aber in der Kruppschen Tabelle nicht interpoliert zu werden braucht; und die Zahl dieser Zwischenstrecken (8 — 15) wird darnach bemessen, dass die zu verbindenden Punkte $M_1$ und $O_1$, $M_2$ und $O_2$ u. s. w. nicht so nahe liegen, dass das Ziehen der Verbindungslinien unsicher wird.

Wenn die Abnahme der Luftdichte $\delta$ mit Zunahme der Höhe $y$ mit berücksichtigt werden soll, so kann dies in einfacher Weise dadurch geschehen, dass von Punkt zu Punkt andere Worte von $\delta$, also von $\varkappa$ benutzt werden.

### 1. Beispiel.

Schwere deutsche Feldkanone $C/73$, mit Schrapnel $C/91$ oder Sprenggranate.

Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 442$ m; Abgangswinkel $\alpha$ = Erhebungswinkel $15\frac{1}{2}^0$ + Abgangsfehlerwinkel $\frac{6}{16}^0 = 15\frac{14}{16}^0$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{273,2}{1000}$. Kaliber $2R = 8,8$ cm; Geschossgewicht $P = 7,5$ kg; $\delta = \delta_1$, $\lambda = 1,23$ (aus der Schusstafel bestimmt), also $\varkappa = \frac{P}{R^2\pi \cdot \lambda} = 0,100_4$; horizontale Anfangsgeschwindigkeit: $v_{x_0} = v_0 \cdot \cos\alpha = 442 \cdot \cos 15\frac{14}{16}^0 = 425$ m.

Die Zwischenstrecken $OA_1$, $A_1A_2$.. oder $\Delta x$ auf der horizontalen Abscissenaxe mögen so gewählt werden, dass sie um beiläufig 500 m fortschreiten; sonach müssen die Werte $\Sigma\Delta x$ in der Kruppschen Tabelle um beiläufig $\frac{500}{0,100_4} = 5000$ m fortschreiten, jedoch so, dass nicht interpoliert werden muss. Darnach hat man folgende Zahlen der Tabelle zu entnehmen:

| | Horizontale Geschwindigkeit $v_x$ | In der Tabelle von Krupp | | Durch Multiplikation mit 0,100 wahre Werte von | | Zugehörige Fallhöhen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\Sigma\Delta x$ | $\Sigma\Delta t$ | $\Sigma\Delta x$ m von $O$ ab | $\Delta t$ Sek. von $O$ ab | $\frac{g}{2}\cdot\Delta t^2$ m |
| in $O$ | 425 | 23711 | 36,93 | 0 | 0 | 0 |
| „ $A_1$ | 358 | 28619 | 49,57 | 491 | 1,264 | 7,8 |
| „ $A_2$ | 316 | 33734 | 64,87 | 1002 | 1,530 | 11,5 |
| „ $A_3$ | 287 | 38830 | 81,78 | 1512 | 1,691 | 14,0 |
| „ $A_4$ | 263 | 43858 | 100,07 | 2015 | 1,829 | 16,4 |
| „ $A_5$ | 242 | 48730 | 119,39 | 2502 | 1,930 | 18,2 |
| „ $A_6$ | 223 | 53655 | 140,61 | 2994 | 2,122 | 22,1 |
| „ $A_7$ | 206 | 58750 | 164,40 | 3504 | 2,379 | 27,8 |
| „ $A_8$ | 191 | 63961 | 190,69 | 4025 | 2,629 | 33,8 |
| „ $A_9$ | 179 | 68725 | 216,47 | 4501 | 2,578 | 32,6 |
| „ $A_{10}$ | 168 | 73624 | 244,74 | 4991 | 2,827 | 39,1 |

Somit ist für die Konstruktion nach Figur 6 zu nehmen: $OA_1 = 491$ m, $OA_2 = 1002$ m, $OA_3 = 1512$ m u.s.w.; $B_1O_1 = 7,8$ m, $B_2O_2 = 11,5$ m u.s.w.

Die Ausführung im Maßstab 1 mm = 5 m auf der Abscissenaxe und 1 mm = 2 m auf der Ordinatenaxe ist in beiliegender Tafel III gezeigt (bei der Vervielfältigung wurde die ursprüngliche Zeichnung auf die Hälfte reduziert und die Millimeterlinien weggelassen).

Die Resultate der graphischen Lösung sind die folgenden:

Schussweite $X = 4501$ m (d. Schusstfl.* giebt 4500 m),
Auffallwinkel $\alpha' = 24^0 53\frac{1}{2}'$, $\left(\operatorname{tg}\alpha' = \frac{232}{500}\right)$ $\left(\text{„ „ „ } 24\frac{14}{16}^0\right)$,
ganze Flugzeit $T = 18{,}0$ Sek. ( „ „ „ 18,1 Sek.),
horiz. Endgeschwind. = 179 m
also Endgeschwind. $v = \frac{179}{\cos 24^0\, 53\frac{1}{2}'} = 197{,}3$ m ( „ „ „ 198 m),
Abscisse des Scheitels = 2600 m,
Ordinate „ „ = 412 m.

Ferner lassen sich aus der Zeichnung direkt folgende Tangenten-Neigungswinkel $\omega$ und folgende Flughöhen $y$ abnehmen:

In der Entfernung:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x = 0$ m | $\omega = \alpha = 24^0\,52'$; | (tg = 0,2732, siehe oben; | $y = 0$), |
| $x = 491$, | $\omega = 12^0\,38'$ | (tg = 112 : 500), | $y = 126{,}0$ m, |
| $x = 1002$, | $\omega = 11^0\,31'$ | (tg = 102 : 500), | $y = 239{,}5$ m, |
| $x = 1512$, | $\omega = 8^0\,45'$ | (tg = 77 : 500), | $y = 329{,}5$ m, |
| $x = 2015$, | $\omega = 4^0\,55'$ | (tg = 43 : 500), | $y = 388{,}0$ m, |
| $x = 2502$, | $\omega = 0^0\,52'$ | (tg = 7,5 : 500), | $y = 411$ m, |
| $x = 2994$, | $\omega = -4^0\,50'$ | (tg = − 42,5 : 500), | $y = 394{,}5$ m, |
| $x = 3504$, | $\omega = -11^0\,5'$ | (tg = − 98 : 500), | $y = 325{,}5$ m, |
| $x = 4025$, | $\omega = -18^0\,0'$ | (tg = − 162,5 : 500), | $y = 188{,}5$ m, |
| $x = 4501$, | $\alpha' = -24^0\,53'$ | (tg = − 232 : 500), s. oben, | $y = 0$ bis crc 0,2 m. |

Zur Illustration des oben über das Einordnen weiterer Flugbahnpunkte Gesagten ist in der Zeichnung zwischen $O_8$ und $O_9$ der weitere Flugbahnpunkt $P$ einkonstruiert; es ist $O_8 O_9$ gezogen, in $Q$ halbiert, die Mitte von $M_9 Q$ ist $P$.

2. Beispiel.

Leichte Feldkanone. $2R = 7{,}85$ cm; $P = 5{,}07$ kg; $\lambda$ aus Mangel anderer Daten = 1 genommen; so ist $\varkappa = \frac{P}{R^2\pi} = 0{,}10476$; $v_0 = 465$ m.

Gegeben ferner $\alpha = 13^0\,35'\,17''$. Gesucht $X$, $\alpha'$, $v'$, $T$, $x_s$, $y_s$.

Es wird $v_0 \cdot \cos\alpha = 452{,}0$ m; die horizontalen Zwischenstrecken mögen wiederum so gewählt sein, dass die Abscissen um beiläufig 500 m fortschreiten. Man hat sodann aus der Tabelle von Krupp:

* Vergl. z. B. den Leitfaden für den Unterricht in der Waffenlehre auf den königl. Kriegsschulen. Auf Veranlassung der General-Inspektion des Militär-Erziehungs- und Bildungswesens ausgearbeitet. 8. Auflage. Berlin 1897. Verlag von E. S. Mittler und Sohn, Anhang.

| | Horizontale Komponenten der Geschwindigkeit | In der Tabelle von Krupp | | | Durch Multiplikation mit 0,10476 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\Sigma\Delta x$ | $\Sigma\Delta t$ | Diff. $\Delta t$ | Abscissen $x$ von $O$ ab | wahre Zeitdifferenzen | dazu gehörige Fallhöhen $\frac{g}{2}\cdot\Delta t^2$ |
| | m | m | Sek. | | m | Sek. | m |
| in $O$ | 452 | 11347 | 20,345 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| „ $A_1$ | 375 | 16418 | 32,702 | 12,357 | 531,2 | 1,294 | 8,2 |
| „ $A_2$ | 325 | 21663 | 47,831 | 15,129 | 1081,3 | 1,587 | 12,3 |
| „ $A_3$ | 294 | 26729 | 64,264 | 16,433 | 1611 | 1,722 | 14,5 |
| „ $A_4$ | 268 | 32013 | 83,040 | 18,776 | 2165 | 1,967 | 18,5 |
| „ $A_5$ | 245 | 37257 | 103,516 | 20,476 | 2714 | 2,145 | 22,5 |
| „ $A_6$ | 225 | 42353 | 125,237 | 21,721 | 3248 | 2,275 | 25,4 |
| „ $A_7$ | 208 | 47357 | 148,388 | 23,151 | 3772 | 2,425 | 28,8 |
| „ $A_8$ | 194 | 52110 | 172,066 | 23,678 | 4270 | 2,480 | 29,9 |

Somit hat man für die Konstruktion nach Figur 6 zu nehmen:

$$OA_1 = 531 \text{ m}, \quad OA_2 = 1081 \text{ m} \quad \text{u. s. w.};$$

$$B_1O_1 = 8{,}2 \text{ m}, \quad B_2O_2 = 12{,}3 \text{ m} \quad \text{u. s. w.}$$

Das **Resultat** wurde:

Schussweite $X = 4310$ m (die Schusstafel giebt für dasselbe $\alpha$ $X = 4300$ m),
Auffallwinkel $\alpha' = 20^0\,20'$ (tg = 370 : 1000),
Horizontale Endgeschwindigkeit $v'_x = 194$ m,
Flugzeit $T = 15{,}8$ Sek.,
Scheitelkoordinaten $\begin{cases} x_s = 2450 \text{ m}, \\ y_s = 325 \text{ m}. \end{cases}$

### 3. Beispiel.

**28 cm-Haubitze.** Kaliber $2R = 28$ cm; Geschossgewicht $P = 215$ kg; Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 355$ m; Formkoeffizient $\lambda = 0{,}9$. Abgangswinkel $\alpha = 45^0$.

Es wird
$$\varkappa = \frac{215}{14^2\cdot\pi} = 0{,}3880; \quad v_0 \cos\alpha = 251{,}3 \text{ m}.$$

Die Abscissen $OA_1, OA_2 \ldots$ mögen fortschreiten um ungefähr gleich viel, nämlich um ungefähr 1000 m, also müssen die Werte $\Sigma\Delta x$ der Tabelle von **Krupp** derart entnommen werden, dass sie in dieser Tabelle fortschreiten um ungefähr $\frac{1000}{0{,}388}$, d. h. 2564, jedoch so, dass nur für die erste horizontale Geschwindigkeit in $O$, aber später nicht mehr in der Tabelle interpoliert werden muss:

| | Horizontale Geschwindigkeit | $\Sigma \Delta x$ in der Tabelle m | Differenzen m | Diese Differenzen multipliziert mit 0,388; also wirkliche Abscissen von $O$ ab m | Zeiten $\Sigma \Delta t$ in der Tabelle Sek. | Differenzen Sek. | Daraus Fallhöhen m |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| in $O$ | 251,3 | 46511 | — | — | 110,39 | — | — |
| „ $A_1$ | 241 | 48973 | 2462 | 955 | 120,40 | 10,01 | 74 |
| „ $A_2$ | 231 | 51495 | 4984 | 1934 | 131,09 | 10,69 | 84,3 |
| „ $A_3$ | 221 | 54215 | 7704 | 2990 | 143,13 | 12,04 | 107 |
| „ $A_4$ | 212 | 56857 | 10346 | 4014 | 155,34 | 12,21 | 110 |
| „ $A_5$ | 204 | 59405 | 12894 | 5002 | 167,60 | 12,26 | 110,9 |
| „ $A_6$ | 196 | 62145 | 15634 | 6065 | 181,30 | 13,70 | 138,5 |
| „ $A_7$ | 190 | 64336 | 17825 | 6916 | 192,66 | 11,36 | 95,3 |
| „ $A_8$ | 183 | 67073 | 20562 | 7977 | 207,34 | 14,68 | 159 |
| „ $A_9$ | 177 | 69575 | 23064 | 8948 | 221,25 | 13,91 | 143 |
| „ $A_{10}$ | 171 | 72231 | 25720 | 9977 | 236,52 | 15,27 | 172 |
| „ $A_{11}$ | 166 | 74577 | 28066 | 10889 | 250,45 | 13,93 | 143 |

Somit ist $OA_1 = 955$ m, $OA_2 = 1934$ m u. s. w.;
$B_1 O_1 = 74$ m, $B_2 O_2 = 84$ m u. s. w.

Die Ausführung der Zeichnung im Maßstab 1 mm = 10 m gab als Resultate:

Schussweite $X = 9505$ m (beobachtet wurde 9588 m; die Berechnung nach der Methode Siacci-Krupp giebt 9482 m),

Auffallwinkel $\alpha' = 52^0\ 0' \left(\text{tg} = \frac{1280}{1000}\right)$;

Horizontale Endgeschwindigkeit $v'_x = 173,8$ (durch Interpolation), also Endgeschwindigkeit in der Bahn: $v' = \frac{173,8}{\cos 52^0} = 282,3$ m;

Scheitel: $x_s = 5010$ m; $y_s = 2677$ m.

Ferner z. B. für die Entfernung $x = 3000$ m ist Flughöhe $y = 2202$ m und Neigungswinkel der Tangente $\omega = 24^0\ 8'$ (tg = 448 : 1000).

## 2. Aufgabe.

Gegeben Schussweite $X$, Anfangsgeschwindigkeit $v_0$, sowie Masse und Form des Geschosses, also $P$, $2R$, $\lambda$.

Gesucht Abgangswinkel $\alpha$ und die übrigen ballistischen Elemente. — Man löst wie vorhin graphisch die Aufgabe, indem man für $\alpha$ probeweise einen Näherungswert $\alpha_1$ wählt — am besten durch Vergleichung der Schusstafel eines möglichst ähnlichen Gewehr- oder Geschützsystems. — Dadurch erhält man eine gewisse Schussweite $X_1$, die nicht mit der gegebenen $X$ zusammenfallen wird. Hierauf dreht („schwenkt") man die konstruierte Flugbahn wie eine starre krumme

Linie* um den Abgangspunkt $O$, bis die Schussweite die gegebene $X$ wird. Den Winkel $\Delta\alpha$, um welchen man die Flugbahn abwärts oder aufwärts drehen musste, hat man von dem zuerst angenommenen Abgangswinkel $\alpha_1$ abzuziehen resp. zu diesem hinzuzufügen. Damit hat man $\alpha$ und wie Nr. 1 auch die übrigen ballistischen Grössen, alles bezogen auf die Linie der wahren Schussweite als Abscissenaxe.

### 1. Beispiel.

Schwere Feldkanone $C/73$. Gegeben $v_0 = 442$ m, $X = 4300$ m; ferner $P = 7{,}5$ kg; $2R = 8{,}8$ cm; $\lambda = 1{,}23$. Gesucht $\alpha$.

Probeweise wird mit $\alpha_1 = 15^0\,52'$ die Flugbahn konstruiert (dies geschah im obigen Beispiel, siehe Fig. 11 der beiliegenden Tafel); die Schussweite $X_1$ wurde damit zu 4501 m gefunden; es wird nun die Flugbahn um $O$ gedreht, bis die Schussweite 4300 m wird; man beschreibt also einen Kreisbogen um $O$ mit Radius $OW_1 = 4300$, der die schon gezeichnete Flugbahn in $W$ trifft und zieht $OW$, so ist dies die wahre Abscissenaxe. Der Winkel $W_1OW$ oder $\Delta\alpha$, um welchen dabei gedreht wurde, ergiebt sich aus

$$\operatorname{tg}\Delta\alpha = \frac{97}{4000};\ \Delta\alpha = 1^0\,23';$$

dieser Winkel ist von dem vorher gewählten Abgangswinkel abzuziehen; vorher wurde gewählt $\alpha_1 =$ Erhebungswinkel $15\frac{1}{2}^0$ + konstant. Abgangsfehlerwinkel $\frac{6}{16}^0$, also ist der richtige Erhebungswinkel für die Schussweite 4300 m:

$$= 15^0\,30' - 1^0\,23' = 14^0\,07' \left(\text{die Schusstafel giebt } 14\frac{4}{16}^0\right).$$

### 2. Beispiel.

Leichte Feldkanone. Gegeben $v_0 = 465$ m, $X = 4000$ m; $\varkappa = 0{,}10476$. Gesucht $\alpha$.

Die Konstruktion werde probeweise mit dem Erhebungswinkel $13\frac{4}{16}^0$ ausgeführt (vergl. obiges Beispiel bei Nr. 1); es findet sich $X_1 = 4310$ m; es muss die Flugbahn gedreht werden um $\Delta\alpha$, wobei $\operatorname{tg}\Delta\alpha = \frac{106}{4000}$; $\Delta\alpha = 1^0\,35'$; also ist der Erhebungswinkel für die Schussweite 4000 m:

$$= 13^0\,15' - 1^0\,35' = 11^0\,40' \left(\text{die Schusstafel giebt } 11\frac{11}{16}^0\right).$$

### 3. Aufgabe.

Gegeben Schussweite $X$ und Abgangswinkel $\alpha$, ferner $P$, $2R$ und $\lambda$. Gesucht $v_0$ und die anderen Grössen.

Man wählt am einfachsten durch Vergleichung einer anderen Schusstafel einen Wert von $v_0$, der voraussichtlich dem gesuchten $v_0$ nahe kommt;

* Über dieses sogenannte „Prinzip des Schwenkens der Flugbahnen“, welches mit Rücksicht auf den Genauigkeitsgrad der Lösung in bestimmten Grenzen in der That gestattet ist und in der Ballistik sehr viel Verwendung findet, vergleiche u. a.: N. von Wuich, Lehrbuch der äusseren Ballistik, Wien 1882, S. 26. — A. Mieg, königl. bayer. Major z. D., theoretische äussere Ballistik, Berlin 1884, Verlag von Mittler & Sohn; hier ist das Prinzip durchweg verwendet; übrigens ist die Bemerkung S. 97, Schluss, nur mit Einschränkung richtig.

sodann entnimmt man von der horizontalen Geschwindigkeit $v_0 \cos \alpha$ ab die betreffenden Zahlen der Kruppschen Tabelle und führt die Zeichnung aus. Man erhält damit eine gewisse Schussweite $X_1$, die mit der gegebenen nicht identisch sein wird. Fällt $X_1$ kleiner als $X$ aus, so wählt man einen zweiten Wert von $v_0$ derart, dass nachher die Schussweite grösser als $X$ wird; hiermit wird eine zweite Zeichnung ausgeführt, die eine zweite Schussweite $X_2$ liefert. Durch Interpolation proportional den Differenzen zwischen $X_1$ resp. $X_2$ und $X$ erhält man sodann die gesuchte Anfangsgeschwindigkeit $v_0$. — Eine bedeutende Ersparnis der Mühe liegt darin, dass man nicht nötig hat, die ganze Liste der Werte $OA_1$, $A_1A_2 \ldots$, $B_1O_1$, $B_2O_2 \ldots$ zweimal zu berechnen; vielmehr wird man nur die ersten Zahlen neu aufstellen; man wird also nur das erste Intervall vergrössern oder verkleinern, sodass die übrigen Zahlen der Tabelle, welche man der Konstruktion zu Grunde legt, bleiben, dagegen die horizontale Geschwindigkeit in $O$, ferner die erste Zwischenstrecke $\Delta x_1$ oder $OA_1$ und die erste Fallhöhe $B_1O_1$ eine andere wird. — (Ganz analog muss bei dem rechnerischen Verfahren nach der Methode von Siacci die Flugbahn zweimal berechnet und sodann interpoliert werden.)

### 4. Aufgabe.

Gegeben $v_0$, $\alpha$ und $X$. Gesucht Faktor $\varkappa$ (z.B. gesucht $\lambda$, wenn $P$ und $2R$ gegeben ist).

Diese wichtige Aufgabe, welche bei dem Rechnungsverfahren nach Siaccis Methode eine zweimalige Berechnung und darauffolgende Interpolation erfordert, und welche nur bei Anwendung der Braccialini-Hojel-Vallierschen Methode mit Hilfe der sogenannten sekundären Funktionen im Fall kleiner Abgangswinkel weniger Mühe verursacht, verlangt auch hier, ganz analog dem Siaccischen Rechnungsverfahren, eine zweimalige Konstruktion der Flugbahn: Man versucht — am zweckmässigsten nach Betrachtung einer anderen verwandten Schusstafel — einen ersten Wert von $\varkappa$, konstruiert die Flugbahn und erhält einen Wert $X_1$ der Schussweite; versucht sodann einen zweiten Wert $\varkappa$ und erhält einen zweiten Wert $X_2$ der Schussweite; endlich wird proportional interpoliert.

---

Es zeigt sich so, dass das beschriebene graphische Verfahren für die Zwecke der Praxis völlig genügt und in manchen Fällen mit wenig Mühe zu einem übersichtlicheren Resultat führt als das rechnerische Verfahren. Bei Lösung einer grösseren Zahl von ballistischen Aufgaben der Praxis ergab sich dem Verfasser, dass, wenn nur der Formkoefficient $\lambda$ richtig ermittelt war und in genügend grossem Maßstab genau konstruiert wurde, der Fehler des Resultats gegenüber der Lage des mittleren Treffpunkts stets kleiner war als der mittlere Fehler eines einzelnen Schusses, und dass wenigstens in einigen Fällen dieses graphische Verfahren selbst den neusten Rechnungsmethoden an Genauigkeit überlegen war. — Möchten die Herren Ballistiker dieser graphischen Methode, welche keinerlei Hilfsmittel der höheren Mathematik erfordert, nähertreten.

---

# Über die Differentiation empirischer Funktionen.

Von

C. Runge

in Hannover.

---

Wenn wir die Vorgänge oder Zustände der Wirklichkeit messend verfolgen, so zeigt es sich nicht selten, dass unsere Apparate nicht die eigentlichen zu messenden Funktionswerte angeben, sondern Mittelwerte. Die Apparate integrieren über ein Intervall, statt uns den Funktionswert anzugeben und gleichen dadurch Schwankungen, die in der Wirklichkeit vorkommen, unter Umständen so weit aus, dass sie nicht mehr wahrgenommen werden.

Hierauf beruht es z. B., dass man bis zu den Versuchen von Langley* die grosse Ungleichmässigkeit des Windes nicht hinreichend erkannt hatte. Die gebräuchlichen Anemometer besassen soviel Trägheit, dass sie nicht die augenblickliche Geschwindigkeit der Luft erkennen liessen, sondern einen Durchschnittswert, der auch von den vorhergehenden Windgeschwindigkeiten beeinflusst war. Erst Langley baute Anemometer von sehr geringer Trägheit und verminderte so das Intervall der Integration.

Auf demselben Grunde beruht auch z. B. das beschränkte Trennungsvermögen optischer Apparate. Das Bild, das eine Linse von einem leuchtenden Punkte entwirft, ist, wenn man von den Diffraktionsringen absieht, die ihrer geringeren Intensität wegen nicht von Belang sind, eine kleine Scheibe, deren Fläche für Licht derselben Wellenlänge der Öffnung des Lichtkegels umgekehrt proportional ist, der in einem ihrer Punkte seine Spitze hat. Das Bild irgend eines Objektes ist deshalb nicht getreu, sondern immer bis zu einem gewissen Grade verwaschen, und die Intensität des Bildes an irgend einem Punkte ist nicht proportional der Intensität des Originals an dem entsprechenden Punkte, sondern ist ein Durchschnittswert der Intensität aller derjenigen Punkte des Originals, deren Scheiben den betreffenden Bildpunkt noch enthalten.

* Langley, Le Travail intérieur du vent. Revue de l'aeronautique. 1893.

Diese Integration der Apparate lässt sich bis zu einem gewissen Grade durch Rechnung wieder rückgängig machen, wie in dem Folgenden für einen besonderen Fall gezeigt werden soll. Ich nenne in der Überschrift diese Reduktion der beobachteten Integralwerte „Differentiation", obwohl sich der Begriff nicht ganz mit der Differentiation deckt. Die hier gegebene Methode ist von Herrn Paschen in ausgedehntem Maße bei der Reduktion seiner bolometrischen Messungen über die Strahlung erhitzter Körper verwendet worden.* Von ihm rührt die Formulierung des Problems der Reduktion seiner bolometrischen Messungen her.

Wenn man das Spektrum einer Lichtquelle entwerfen will, so verfährt man bekanntlich so, dass man das Licht durch einen Spalt schickt. Die Lichtstrahlen, die durch den Spalt dringen, werden durch passende Anordnung von Linsen oder Spiegeln so gelenkt, dass sie nach dem Passieren des zerstreuenden Apparates, mag das nun ein Prisma, ein Prismensatz, oder ein Gitter sein, sich wieder zu einem Spaltbilde vereinigen. Der zerstreuende Apparat bewirkt, dass die Spaltbilder verschiedener Farben nicht an derselben Stelle entworfen sind, sondern nunmehr zu einem Streifen ausgebreitet das Spektrum der Lichtquelle bilden. Die Bilder des Spaltes haben nun immer eine gewisse Breite. Selbst für einen unendlich feinen Spalt würde dies gelten. Auch sein Bild behält eine gewisse Breite, die von der Öffnung des Lichtbündels und von der Wellenlänge abhängt. Es vermischen sich daher die Spaltbilder nahe benachbarter Farben und das Spektrum wird unrein, um so mehr, je breiter der Spalt gemacht wird. Ist der Spalt nicht sehr enge, so können wir das Bild des rechteckigen Spaltes ohne merklichen Fehler als Rechteck betrachten. In einem unreinen Spektrum ist die Intensität an irgend einer Stelle des Spektrums nicht proportional der Intensität der betreffenden Farbe, sondern es ist ein Durchschnittswert der Intensitäten aller der Farben, deren Spaltbilder die betreffende Stelle noch enthalten. Es bezeichne $x$ die Längsausdehnung des Spektrums von einem festen Punkt bis zu irgend einer Stelle. An dieser Stelle liegt die Mitte des Spaltbildes einer gewissen Farbe, von deren Wellenlänge wir sagen wollen, dass sie dem Wert $x$ entspricht. Das Spaltbild möge sich von $x - \frac{a}{2}$ bis $x + \frac{a}{2}$ erstrecken und wir wollen annehmen, dass die Breite des Spaltbildes $a$ für alle Farben merklich dieselbe ist. Die Energiemenge des Lichtes, dessen Wellenlängen dem Intervall $x$ bis $x + dx$ entsprechen und das in einer gegebenen Zeit durch den Apparat geht, ist dann im Spektrum nicht auf das Intervall $x$ bis $x + dx$ konzentriert, sondern in dem Intervall $x - \frac{a}{2}$ bis $x + \frac{a}{2}$ ausgebreitet. Wir bezeichnen diese Energiemenge mit $a \cdot dE_x$, wo also $dE_x$ die Energiemenge

* F. Paschen, Über die Spektren fester Körper. Wied. Ann. 1897.

bedeutet, die einer Spaltbreite entspricht, für die das Spaltbild die Breite 1 hat.

Alsdann kommt auf das Intervall $x$ bis $x + dx$ nur der Bruchteil $dE_x \cdot dx$. Dafür aber greifen die Spaltbilder der benachbarten Farben, die den Werten $x - \frac{a}{2}$ bis $x + \frac{a}{2}$ entsprechen, über das Intervall, so dass wir im ganzen in dem Intervall $x$ bis $x + dx$ die Energiemenge erhalten:

$$dx \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \frac{dE_{x+v}}{dv} \cdot dv.$$

Die Intensität des Spektrums an der Stelle $x$ ist nun zu definieren als die Energie des unendlich kleinen Intervalls $x$ bis $x + dx$ dividiert durch $dx$. Mithin ist die Intensität des unreinen Spektrums gleich

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dE_{x+v}}{dx} dv = E\left(x + \frac{a}{2}\right) - E\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

Die Intensität des reinen Spektrums erhalten wir, wenn wir die Spaltbildbreite unendlich klein werden lassen:

$$\frac{dE_x}{dx} a.$$

Zugleich mit der Reinheit wird dann aber auch die Intensität unendlich klein. In Wirklichkeit lässt sich die Spaltbildbreite bei einem gegebenen Apparat nicht beliebig klein machen. Für einen unendlich schmalen Spalt behält das Spaltbild immer noch eine endliche Breite. Ein absolut reines Spektrum ist eine Abstraktion, die nicht verwirklicht werden kann.

Die Intensität des reinen Spektrums ist es, die wir suchen, wobei es aber auf einen Proportionalitätsfaktor nicht ankommt.

Bei bolometrischen Messungen wird nun auch die Intensität des eben betrachteten unreinen Spektrums nicht beobachtet. Man bringt hier bekanntlich einen Metallstreifen in das Spektrum und misst die Änderung, die sein elektrischer Widerstand durch die Bestrahlung erfährt. Die Messung liefert Grössen, die der Energiemenge des Lichtes proportional sind, das auf den Metallstreifen fällt. Nun hat aber der Metallstreifen eine gewisse Breite und wird daher die Energie eines gewissen Intervalls des oben betrachteten unreinen Spektrums anzeigen.

Liegt die Mitte des Bolometerstreifens bei $x$ und ist seine Breite $b$, so empfängt er in der gegebenen Zeit die Energiemenge:

$$F(x) = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} E\left(x + v + \frac{a}{2}\right) - E\left(x + v - \frac{a}{2}\right) dv;$$

dieser Funktion werden die Ausschläge des Galvanometers proportional und es kommt nun darauf an, durch Rechnung die Werte zu finden, die $\frac{dE_x}{dx}$ proportinal sind.

Wird $\frac{dE}{dx}$ mit $f(x)$ bezeichnet, so ergiebt sich nach der Taylorschen Reihe:

$$E\left(x + v + \frac{a}{2}\right) = E(x) + f(x)\left(v + \frac{a}{2}\right) + \frac{1}{2!}f'(x)\left(v + \frac{a}{2}\right)^2 + \cdots$$

und

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} E\left(x + v + \frac{a}{2}\right) dv = E(x)b + f(x)\frac{p^2 - q^2}{2!} + f'(x)\frac{p^3 - q^3}{3!} + \cdots$$

wo $p = \frac{a+b}{2}$, $q = \frac{a-b}{2}$ gesetzt ist.

Analog ist:

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} E\left(x + v - \frac{a}{2}\right) dv = E(x)b - f(x)\frac{p^2 - q^2}{2!} + f'(x)\frac{p^3 - q^3}{3!} + \cdots$$

Mithin
$$F(x) = 2\left(f(x)\frac{p^2 - q^2}{2!} + f''(x)\frac{p^4 - q^4}{4!} + \cdots\right).$$

Für hinreichend kleine Werte von $p$ und $q$ ist also in erster Annäherung:
$$F(x) = f(x)(p^2 - q^2) = f(x)ab.$$

Die Wirkung auf den Bolometerstreifen wächst daher annähernd proportional $ab$.

Der Unterschied zwischen dem vom Bolometer registrierten unreinen Spektrum $F(x)$ und dem reinen Spektrum $f(x) \cdot ab$ ist in erster Annäherung gleich
$$f''(x)\frac{p^4 - q^4}{3 \cdot 4} = f''(x) \cdot ab\frac{a^2 + b^2}{4!}.$$

Dieser Ausdruck giebt also ein Maß der Unreinheit an. Für eine gegebene Wirkung auf den Bolometerstreifen erzielt man möglichste Reinheit, wenn man das Verhältnis von $a$ und $b$ so wählt, dass
$$ab \cdot \frac{a^2 + b^2}{4!}$$
für einen gegebenen Wert von $ab$ möglichst klein wird. Daraus folgt $a = b$ als günstigstes Verhältnis. Der Bolometerstreifen muss gerade die

Breite des Spaltbildes haben, wenn bei gegebenen Ausschlägen das Spektrum möglichst rein sein soll.

Für $b = a$ erhalten wir nun:

$$F(x) = f(x)a^2 + f''(x)\frac{a^4}{3\cdot 4} + f^{(4)}(x)\frac{a^6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots$$

und es ergiebt sich die Aufgabe $f(x)$ zu finden, wenn $F(x)$ gegeben ist. Man könnte zunächst daran denken, $f(x)$ durch eine Summe von Gliedern darzustellen, die $F(x)$, $F''(x)$, $F^4(x)\ldots$ enthalten. Durch Differentiation erhält man sogleich

$$F''(x) = f''(x)\cdot a^2 + f^4(x)\frac{a^4}{3\cdot 4} + \cdots$$

$$F^4(x) = f^4(x)\cdot a^2 + f^6(x)\frac{a^6}{3\cdot 4} + \cdots$$

Und wenn man die Gleichungen der Reihe nach $C_1 C_2 C_3\ldots$ multipliziert und zu der Gleichung oben addiert, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}F(x) + C_1 F''(x) + C_2 F^{(4)}(x) + \cdots = f(x)a^2 &+ f''(x)\left(C_1 a^2 + \frac{a^4}{3\cdot 4}\right)\\ &+ f^{(4)}(x)\left(C_2 a^2 + C_1\frac{a^4}{3\cdot 4} + \frac{a^6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\right)\\ &+ \cdots\end{aligned}$$

Nun würde man $C_1$, $C_2\ldots$ durch die Rekursionsformeln zu bestimmen haben:

$$C_1 a^2 + \frac{a^4}{3\cdot 4} = 0,$$

$$C_2 a^2 + C_1\frac{a^4}{3\cdot 4} + \frac{a^6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 0$$

etc.

Es ist indessen viel zweckmässiger statt der Differentialquotienten $F''(x)$, $F^{(4)}(x),\ldots$ die Differenzen $\Delta^2 F$, $\Delta^4 F,\ldots$ einzuführen. Denn man muss bedenken, dass $F(x)$ nur empirisch, nicht analytisch gegeben ist, und dass daher die Differenzen leichter zu bilden sind, als die Differentialquotienten.

In symbolischer Schreibweise hat man:

$$F(x) = \frac{e^{aD} + e^{-aD} - 2}{D^2}\cdot f(x),$$

wo $Df$ für $\frac{df}{dx}$ steht. Daraus folgt durch zweimalige Differentiation:

$$\begin{aligned}D^2 F &= (e^{aD} + e^{-aD} - 2)f(x)\\ &= f(x+a) + f(x-a) - 2f(x)\\ &= \Delta^2 f(x).\end{aligned}$$

Anderseits folgt aus derselben Gleichung durch Differenzen bilden:

$$\begin{aligned}\Delta^2 F &= F(x+a) + F(x-a) - 2F(x)\\ &= \frac{e^{aD} + e^{-aD} - 2}{D^2}\cdot\Delta^2 f(x).\end{aligned}$$

Mithin:

$$\begin{aligned}\Delta^2 F &= (e^{aD} + e^{-aD} - 2)F(x) \\ &= \frac{(e^{aD} + e^{-aD} - 2)^2}{D^2} \cdot f(x).\end{aligned}$$

Bildet man hier von neuem die zweite Differenz, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}\Delta^4 F &= (e^{aD} + e^{-aD} - 2)^2 \Delta^2 F \\ &= \frac{(e^{aD} + e^{-aD} - 2)^3}{D^2} \cdot f(x).\end{aligned}$$

So fortfahrend beweist man allgemein die Formel:

$$\Delta^{2n} F = \frac{(e^{aD} + e^{-aD} - 2)^{n+1}}{D^2} \cdot f(x).$$

Sollen nun die Konstanten $C_1, C_2, C_3 \ldots$ so bestimmt werden, dass

$$F + C_1 \Delta^2 F + C_2 \Delta^4 F + \cdots = f(x) a^2$$

wird, so hat man demnach:

$$\begin{aligned}[(e^{aD} + e^{-aD} - 2) &+ C_1(e^{aD} + e^{-aD} - 2)^2 \\ &+ C_2(e^{aD} + e^{-aD} - 2)^3 + \cdots] \frac{f}{D^2} = f \cdot a^2\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}(e^{aD} + e^{-aD} - 2) &+ C_1(e^{aD} + e^{-aD} - 2)^2 \\ &+ C_2(e^{aD} + e^{-aD} - 2)^3 + \cdots = a^2 D^2.\end{aligned}$$

$C_1, C_2, \ldots$ dürfen dabei nicht von $D$ abhängen.

Führt man die Bezeichnungen:

$$u = aD,$$

$$z = e^u + e^{-u} - 2 = 4\,\mathfrak{Sin}^2 \frac{u}{2}$$

ein, so lässt sich die Bedingung, der die Faktoren $C_1, C_2, \ldots$ genügen sollen, auch so ausdrücken, dass

$$z + C_1 z^2 + C_2 z^3 + \cdots = u^2$$

für beliebige Werte von $u$ und konstante Werte von $C_1 C_2 \ldots$ erfüllt sein soll. Mit anderen Worten, es soll, wenn

$$z = 4\,\mathfrak{Sin}^2 \frac{u}{2}$$

ist, $u^2$ nach Potenzen von $z$ entwickelt werden. Zu dem Ende setzen wir

$$t = \mathfrak{Sin} \frac{u}{2}, \quad \text{also} \quad t^2 = \frac{z}{4}.$$

Dann ist

$$u = 2\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, t$$

$$u^2 = 4(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, t)^2.$$

Daraus folgt:

$$\frac{(du^2)}{dt} = \frac{8\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\frac{d^2(u^2)}{dt^2} = \frac{8}{1+t^2} - 8\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, t \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Mithin

$$(1+t^2)\frac{d^2(u^2)}{dt^2}+t\cdot\frac{d(u^2)}{dt}=8.$$

Nun ist:

$$u^2=2^2t^2+C_1 2^4t^4+C_2 2^6t^6+\cdots$$

und daher

$$\frac{d^2(u^2)}{dt}=2^2\cdot 2t+C_1 2^4\cdot 4t^3+C_2 2^6\cdot 6t^5+\cdots$$

$$\frac{d^2(u^2)}{dt^2}=2^2\cdot 2+C_1 2^4\cdot 4\cdot 3\cdot t^2+C_2 2^6\cdot 6\cdot 5t^4+\cdots$$

und folglich:

$$(1+t^2)\frac{d^2(u^2)}{dt^2}+t\frac{d(u^2)}{dt}=2^2\cdot 2+(C_1 2^4\cdot 4\cdot 3+2^2\cdot 2+2^2\cdot 2)t^2$$
$$+(C_2\cdot 2^6\cdot 6\cdot 5+C_1 2^4\cdot 4\cdot 3+C_1 2^4\cdot 4)t^4$$
$$+(C_3\cdot 2^8\cdot 8\cdot 7+C_2 2^6\cdot 6\cdot 5+C_2 2^6\cdot 6)t^6,$$
$$+\cdots$$

was für die gesuchten Konstanten die Rekursionsformeln ergiebt:

$$C_n\cdot 2^{2n+2}\cdot 2n+2\cdot 2n+1+C_{n-1}\cdot 2^{2n}\cdot 2n\cdot 2n=0,$$

oder

$$C_n=-\frac{n\cdot n}{2n+2\cdot 2n+1}\cdot C_{n-1},$$

$$C_1=-\frac{1\cdot 1}{4\cdot 3}.$$

Die gesuchte Intensität $f(x)a^2$ des reinen Spektrums ist mithin aus der beobachteten Funktion $F(x)$ nach der Formel zu berechnen

$$f(x)\cdot a^2=F-\frac{1\cdot 1}{4\cdot 3}\Delta^2F+\frac{2\cdot 2\cdot 1\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}\Delta^4F-\frac{3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}\Delta^6F+\cdots$$

Wenn von den Werten von $x$, für die $F(x)$ beobachtet worden ist, je zwei aufeinanderfolgende um die Grösse $a$ voneinander verschieden sind, so ist es am bequemsten die Differenzen $\Delta^2F$, $\Delta^4F,\ldots$ einfach auszurechnen. Sind dagegen diese Werte von $F(x)$ nicht gegeben, so kann man sie entweder interpolieren oder man kann eine graphische Darstellung von $F(x)$ benützen, um $\Delta^2F$ abzugreifen. Verbindet man nämlich die Punkte $A$, $B$ (Fig. 1) der Kurve, deren Abscissen $x-a$ und $x+a$ sind, so schneidet diese Sehne die zu $x$ gehörige Ordinate oder deren Verlängerung in einem Punkte $S$, der von dem betreffenden Punkte $C$ der Kurve um $\frac{\Delta^2F}{2}$ absteht, wobei der Abstand negativ zu rechnen ist, wenn der Schnittpunkt unter dem Kurvenpunkte liegt. Um $\Delta^4F$ zu finden, hat man $\Delta^2F$ als Ordinate aufzutragen und ebenso zu verfahren und so weiter, so lange bei der Genauigkeit der gegebenen Beobachtungen die Korrektionsglieder noch mit einiger Sicherheit ermittelt werden können.

Fig. 1.

Was die Konvergenz der Darstellung

$$f(x)a^2 = F - \frac{1\cdot 1}{4\cdot 3}\Delta^2 F + \frac{2\cdot 2\cdot 1\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}\Delta^4 F - \cdots$$

betrifft, so fanden wir oben, dass

$$4(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,t)^2 = 2^2 t^2 - \frac{1\cdot 1}{3\cdot 4}2^4 t^4 + \frac{2\cdot 2\cdot 1\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}2^6 t^6 - \cdots$$

war. Setzt man auf beiden Seiten $it$ an Stelle von $t$ und dividiert beide Seiten durch $-1$, so ergiebt sich:

$$4(arc \sin t)^2 = 2^2 t^2 + \frac{1\cdot 1}{4\cdot 3}\cdot 2^4\cdot t^4 + \frac{2\cdot 2\cdot 1\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}2^6 t^6 + \cdots$$

Diese Reihe konvergiert noch für $t = 1$ und ergiebt für diesen Wert:

$$\pi^2 = 2^2 + \frac{1\cdot 1}{4\cdot 3}\cdot 2^4 + \frac{2\cdot 2\cdot 1\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}\cdot 2^6 + \cdots$$

oder

$$\frac{\pi^2}{4} = 1 + \frac{1\cdot 1}{4\cdot 3}\cdot 4 + \frac{2\cdot 2\cdot 1\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}\cdot 4^2 + \cdots$$

Unsere Entwickelung von $f(x)a^2$ bleibt also selbst dann noch unbedingt und gleichmässig konvergent, wenn $\Delta^2 F$, $\Delta^4 F$, $\Delta^6 F\ldots$ nicht stärker als die Potenzen 4, $4^2$, $4^3$,.. oder Grössen, die diesen proportional sind, wachsen sollten.

Ist z. B. von $\Delta^6 F$ an jede Differenz $\Delta^{2n} F$ absolut genommen nicht grösser als

$$M\cdot r^n,$$

wo $r \leqq 4$ ist, so wird der Fehler, den man begeht, wenn man sich mit den beiden Korrektionsgliedern

$$-\frac{1\cdot 1}{4\cdot 3}\Delta^2 F + \frac{2\cdot 2\cdot 1\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}\Delta^4 F$$

begnügt, nicht grösser sein als

$$\frac{4\cdot 4\cdot 2\cdot 2\ 1\cdot 1}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}\cdot Mr^3 + \frac{6\cdot 6\cdot 4\cdot 4\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}Mr^4 + \cdots,$$

das heisst nicht grösser als

$$4\frac{M}{r}\left(arc \sin \tfrac{1}{2}\sqrt{r}\right)^2 - M\left(1 + \frac{1\cdot 1}{4\cdot 3}r + \frac{2\cdot 2\cdot 1\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}r^2\right).$$

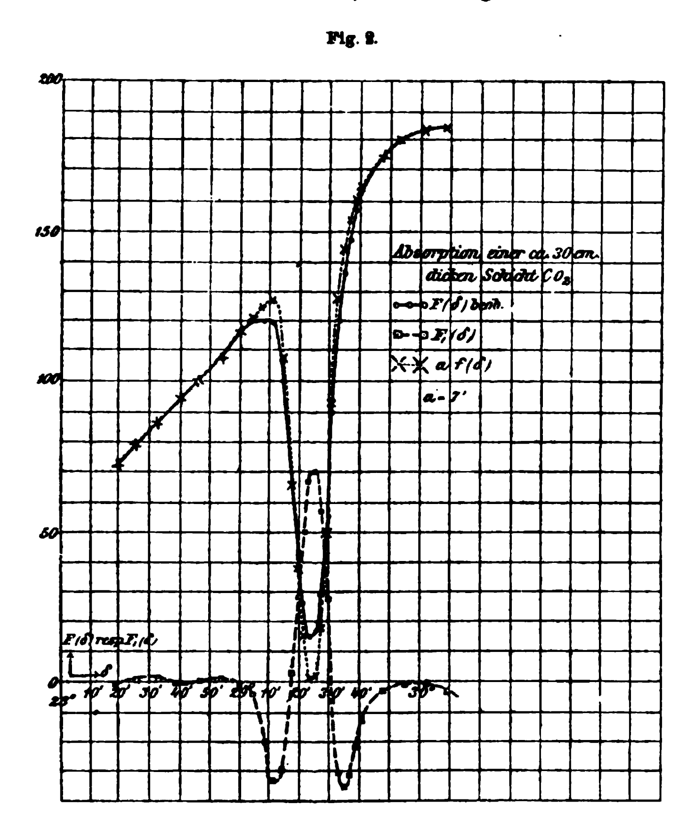
Für $r = 1$ z. B. ist der Fehler nicht grösser als

$$0{,}0022\ M.$$

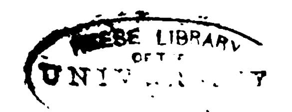
In der nebenstehenden Figur 2 ist die bolometrische Messung eines Absorptionsstreifens der Kohlensäure dargestellt, die Herr F. Paschen ausgeführt hat. Nach der Dicke der Gasschicht sollte man in der Mitte des Absorptionsstreifens die Ordinate Null erwarten. In dem beobachteten Spektrum ist das nicht der Fall. Aber nachdem die ersten beiden Korrektionsglieder angebracht sind, wird der Wert der Ordinate in der That unmerklich.

Man könnte die hier behandelte Aufgabe noch in mannigfacher Weise variieren und es liessen sich manche physikalische Messungen anführen, bei denen ebenfalls die gemessenen Funktionen Integrale sind, die man differentiieren muss, um die gesuchten Funktionen zu

Fig. 2.




finden. Die Integrale können dabei anders gebildet sein, als das hier behandelte. Es kann z. B. unter dem Integralzeichen ein Dämpfungsfaktor vorkommen, so dass die weiter abliegenden Funktionswerte weniger zum Werte des Integrals beitragen. Es möge indessen genügen, darauf hinzuweisen, dass sich solche Fälle ähnlich behandeln lassen, wie der hier ausgeführte.



## Über Zahlenteiler ganzer Funktionen.*

Von **K. Th. Vahlen** in Königsberg i. Pr.

Eine ganze Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ mit beliebigen Koeffizienten werde statt nach den Potenzen nach den Faktoriellen

$$\binom{x_\nu}{i_\nu} = \frac{x_\nu(x_\nu - 1)\ldots(x_\nu - i_\nu + 1)}{1\cdot 2\ldots i_\nu}$$

geordnet, also auf die Form gebracht:

$$\sum_{\substack{i_\nu = 0, 1, \ldots, N_\nu \\ \nu = 1, 2, \ldots, n}} A_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\binom{x_1}{i_1}\binom{x_2}{i_2}\cdots\binom{x_n}{i_n}.$$

Aus den Gleichungen:

$$\sum_{(i_1, \ldots i_n)} A_{i_1\ldots i_n}\binom{k_1}{i_1}\cdots\binom{k_n}{i_n} = f(k_1, k_2, \ldots k_n) \quad \begin{pmatrix} k_\nu = 0,\ 1, \ldots N_\nu \\ \nu = 1,\ 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

folgt durch Auflösung nach den Grössen $A_{i_1\ldots i_n}$ die Äquivalenz der beiden Systeme $A_{i_1\ldots i_n}$, und $f(k, \ldots k_n)$ entweder aus der Bemerkung, dass die Determinante jener in den $A_{i_1\ldots i_n}$ linearen Gleichungen in der Diagonale nur Einsen, rechts der Diagonale nur Nullen enthält; oder direkt, es ist nämlich:

$$\left|\begin{aligned} &\sum_{\substack{h_\nu = 0, 1, \ldots k_\nu \\ \nu = 1, 2, \ldots n}} (-1)^{h_1 + \cdots + h_n}\binom{k_1}{h_1}\cdots\binom{k_n}{h_n} f(h_1, \ldots, h_n) \\ &= \sum_{\substack{h_\nu = 0, \ldots, k_\nu \\ i_\nu = 0, \ldots N_\nu \\ \nu = 1, 2, \ldots n}} (-1)^{h_1 + \cdots + h_n} A_{i_1, \ldots i_n}\binom{k_1}{h_1}\binom{h_1}{i_1}\cdots\binom{k_n}{h_n}\binom{h_n}{i_n} \\ &= (-1)^{k_1 + \cdots + k_n} A_{k_1, \ldots k_n}, \end{aligned}\right.$$

weil $\sum_h (-1)^h \binom{k}{h}\binom{h}{i} = \sum_h (-1)^h \binom{k}{i}\binom{k-i}{k-h} = (-1)^k \binom{k}{i}(1-1)^{k-1}$ ist.

Also ist auch das durch:

$$f(x_1, \ldots x_n) = \sum_{(i_1, \ldots i_n)} A'_{i_1\ldots i_n}\binom{x_1 - g_1}{i_1}\cdots\binom{x_n - g_n}{i_n}$$

bei beliebigen ganzen Zahlen $g$ definierte System $A'_{i_1\ldots i_n}$ äquivalent jedem der drei Systeme:

$$f(g_1 + i_1, \ldots g_n + i_n), \quad A_{i_1\ldots i_n}, \quad f(i_1, \ldots i_n). \quad \begin{pmatrix} i_\nu = 0, 1, \ldots, N_\nu \\ \nu = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

---

* Den wesentlichen Inhalt dieser Zeilen hatte ich am 16. Juni 1893 im Mathematischen Verein zu Berlin als Beantwortung einer gestellten Frage mitgeteilt. Die damals unterlassene Veröffentlichung hole ich jetzt nach, da der Gegenstand inzwischen durch Herrn Hensels Aufsatz: „Über den grössten gemeinsamen Teiler aller Zahlen, welche durch eine ganze Funktion von $n$ Veränderlichen darstellbar sind" (Crelles Journal Band 116 S. 350—356) an Interesse gewonnen hat.

So ergiebt sich der Satz:

Soll eine ganze Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ mit beliebigen Koeffizienten für alle ganzzahligen Wertsysteme der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ganzzahlige Vielfache einer gegebenen Grösse $Q$ ergeben, so müssen die Koeffizienten in jeder ihrer Darstellungen:

$$\sum_{(i_1 \ldots i_n)} A_{i_1 \ldots i_n} \binom{x_1 - g_1}{i_1} \cdots \binom{x_n - g}{i_n}$$

ganzzahlige Vielfache von $Q$ sein; der grösste gemeinsame Teiler der ganzen Zahlen $\frac{A_{i_1 \ldots i_n}}{Q}$ ergiebt sich auch als grösster gemeinsamer Teiler der ganzen Zahlen:

$$\frac{f(g_1 + i_1, \ldots, g_n + i_n)}{Q}, \quad \begin{pmatrix} i_\nu = 0, \ldots N_\nu \\ \nu = 1, \ldots n \end{pmatrix}.$$

## Das erweiterte Theorem von Bour.

Von Dr. **F. Ebner** in Greiz i. V.

Nach dem schönen Theorem von Bour giebt es bekanntlich zweifach unendlich viele Schraubenflächen, die auf eine vorgelegte Rotationsfläche abwickelbar sind. Dieses Theorem ist indessen nur ein spezieller Fall eines allgemeineren, welches zuerst von Herrn M. Lévy ausgesprochen worden ist,* und welches lautet: es giebt zweifach unendlich viele Spiralflächen, welche auf eine vorgelegte Spiralfläche abwickelbar sind. Der Beweis dieses Theorems lässt sich in der folgenden vereinfachten Form führen:

Es sei eine Spiralfläche gegeben, deren Quadrat des Linienelements die charakteristische Form besitzt:**

$$1) \qquad ds^2 = e^{2kv} \cdot E^2(du^2 + dv^2)$$

unter $u$ und $v$ die isometrischen Koordinaten der Fläche, unter $k$ eine gegebene Konstante, unter $E$ eine gegebene Funktion von $u$ verstanden.

Die Gleichung irgend einer andern allgemeinen Spiralfläche lautet nun aber in räumlichen Polarkoordinaten:**

$$2) \qquad z = z_0 e^{kv}, \quad r = r_0 e^{kv}, \quad \varphi = \varphi_0 + cv$$

unter $k$, $c$ Konstanten, unter $z_0$, $r_0$, $\varphi_0$ Funktionen von $u$ verstanden. Soll also die Fläche 2) auf die Fläche 1) abwickelbar sein, so muss ihr Linienelement sich auf die Form 1) bringen lassen, was für die willkürlichen Grössen $c$, $z_0$, $r_0$, $\varphi_0$ auf die Bestimmungsgleichungen führt:

$$3) \qquad \left\{ \begin{aligned} & r_0'^2 + \varphi_0'^2 r_0^2 + z'^2 = E^2, \\ & r_0 r_0' + k\varphi_0' r_0^2 + z_0 z'_0 = 0, \\ & (1 + k_0^2) r_0^2 + z_0^2 = E^2, \end{aligned} \right.$$

* Vergl. Compt. rend. 1878. p. 789 flg. der Note vom 18. November.

** Vergl. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Band I, p. 109 und 110.

wo $k_0 = \frac{c}{k}$ gesetzt ist, und die Accente der Differentiation nach $u$ bezeichnen. Für $1 + k^2 = 0$, d. i. den Fall der imaginären Spiralflächen, wie wir zur Abkürzung sagen wollen, ergiebt die Elimination von $\varphi_0'$ und $z_0$ aus dem System 3) sofort die in $r_0^2$ lineare Differentialgleichung:

$$4)\qquad (E^2 - E'^2) r_0^2 + 2EE' r_0 r_0' + E^2 E'^2 = 0$$

aus der sich $r_0$ durch Ausführung einer blossen Quadratur bestimmt, worauf dann aus 3): $\varphi_0$ und $z_0$ folgen; da in 4) noch eine willkürliche Integrationskonstante auftritt, so giebt es einfach unendlich viele, durch blosse Quadraturen bestimmbare imaginäre Spiralflächen, die auf die vorgelegte Fläche 1) abwickelbar sind.

Ist dagegen: $1 + k^2 > 0$, so eliminiere man aus 3) $\varphi_0'$ und $r_0$, worauf man nach Ausführung der dazu erforderlichen Rechnung für $z_0$ auf die Differentialgleichung geführt wird:

$$5)\qquad z_0^2 + z_0'^2 = f^2(u),$$

wo $f^2(u) = \frac{k^2 E^2 - E'^2}{k^2}$ gesetzt ist. Das allgemeine Integral derselben enthält nun ausser der willkürlich bleibenden Konstanten $k$ noch eine willkürliche Integrationskonstante, d. h. es giebt zweifach unendlich viele Spiralflächen 2), die auf die vorgelegte Spiralfläche 1) abwickelbar sind, womit das erweiterte Theorem von Bour bewiesen ist.* Hat man $z_0$ aus 5) bestimmt, so erhält man aus 3): $r_0$ und nach Ausführung einer Quadratur auch $\varphi_0$. Die Differentialgleichung 5) ist nun — wie hier noch kurz bemerkt werden mag — im allgemeinen nicht auf Quadraturen zurückführbar, wie man am leichtesten aus ihrer durch die Substitutionen:

$$6)\qquad z_0 = \frac{tf}{\sqrt{1+t^2}},\quad z_0' = \frac{f}{\sqrt{1+t^2}}$$

bewirkten transformierten Form:

$$7)\qquad \frac{dt}{du} = (1 + t^2)\left(1 - \frac{f'}{f}\, t\right)$$

erkennt, welche zugleich die Gleichungsform der geodätischen Linien der Spiralflächen ist. Sie wird indessen auf Quadraturen zurückführbar, wenn:

$$\frac{d}{du}(\log f(u) = \frac{f'(u)}{f(u)} = \text{const}$$

wird, was z. B. der Fall ist für $E = e^{\alpha u}$; alle Spiralflächen, welche also auf die Fläche mit dem Linienelementquadrat:

$$8)\qquad ds^2 = e^{2kv + 2au}(du^2 + dv^2)$$

abwickelbar sind, können durch blosse Quadraturen bestimmt werden, welches auch die Konstante $a$ sei.

* Für $k = 0$ folgt aus diesem erweiterten Theorem wieder das ursprüngliche für die Schraubenflächen, die selbst nur ein besonderer Fall der Spiralflächen sind.



# Über einen Satz der Funktionentheorie und seine Anwendung auf isothermische Kurvensysteme und auf einige Theorien der mathematischen Physik.

Von

Prof. Dr. Holzmüller,

Direktor der Hagener Gewerbeschule.

## § 1. Die Linien gleicher Stromstärke und Stromrichtung bei stationärer Elektrizitätsströmung.

Ist $Z = f(z)$ oder $U + Vi = f(x + yi)$ eine Funktion komplexen Arguments, und ist $Z' = f'(z)$ oder

$$R(\cos\Phi + i\sin\Phi) = f'[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]$$

ihr Differentialquotient, so ist bekanntlich der absolute Betrag des letzteren

$$R = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2},$$

seine Abweichung aber, abgesehen von der Periode $\pi$,

$$\Phi = \arctan\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial x}}.$$

Dabei ist auch $Z'$ eine Funktion komplexen Arguments und genügt ebenso, wie ihr reeller und auch ihr imaginärer Teil, der partiellen Differentialgleichung $\Delta^2 u = 0$. Da nun aber auch $\lg Z'$ eine Funktion komplexen Arguments ist, die sich schreiben lässt:

$$\lg Z' = \lg[R(\cos\Phi + i\sin\Phi] = \lg R + \lg(\cos\Phi + i\sin\Phi)$$
$$= \lg R + \lg e^{\Phi i} = \lg R + i\Phi,$$

so müssen auch $\lg R$ und $\Phi$ der Differentialgleichung $\Delta^2 u = 0$ genügen.

Also:

Der Logarithmus des absoluten Betrags $R$ vom Differentialquotienten einer Funktion komplexen Arguments genügt der Differentialgleichung $\Delta^2 u = 0$. Dasselbe gilt von der Abweichung $\Phi$ des Differentialquotienten.

Aus diesem einfachen Satze entspringt eine Reihe von Folgerungen für die Geometrie und die mathematische Physik. Um diese zu erläutern, sei an einige Elementarsätze der Funktionentheorie erinnert.

Bekanntlich gilt bei der Abbildung $Z = f(z)$ für je zwei einander entsprechende Bogenelemente der $Z$- und $z$-Ebene die Gleichung $dS = Rds$, wo $R$ die obige Bedeutung hat. Diese Beziehung gilt an der betreffenden Stelle für alle Richtungen der Bogenelemente. Dagegen giebt die Abweichung $\Phi$ an, dass $dS$ gegen $ds$ um $+\Phi$, $ds$ gegen $dS$ um $-\Phi$ gedreht erscheint. $R$ giebt also ein Vergrösserungsverhältnis, $\Phi$ eine Drehung an.

Nun entsprechen bei jeder Abbildung $Z = f(z)$ oder

$$X + Yi = f(x + yi)$$

den Parallelen $X = a$ und $Y = b$ der $Z$-Ebene zwei orthogonale Isothermenscharen der $z$-Ebene, die sich, wenn der konjugierte Ausdruck $X - Yi$ mit $f_1(x - yi)$ bezeichnet wird, schreiben lassen als

$$\frac{f(x+yi)+f_1(x-yi)}{2} = a, \quad \frac{f(x+yi)-f_1(x-yi)}{2} = b.$$

In der $Z$-Ebene erhält man mit Hilfe einer arithmetischen Reihe, z. B.:

$$\ldots, -3c, -2c, -c, 0, c, 2c, 3c, \ldots,$$

deren Glieder der Reihe nach für $a$ und $b$ eingesetzt werden, eine quadratische Einteilung. Dieser Einteilung entspricht in der $z$-Ebene eine solche in unendlich kleine (krummlinige) Quadrate durch die beiden Isothermenscharen. Hat nun jedes kleine Quadrat der $Z$-Ebene die Seite $dS$, so hat jedes entsprechende „Quadrat“ der $z$-Ebene die Seite $ds = \frac{1}{R} ds$, der horizontalen Richtung von $dS$ entspricht aber eine Neigung $-\Phi$, der senkrechten von $dS_1$ eine Neigung $\frac{\pi}{2} - \Phi$.

Also:

Die Grösse der kleinen Quadratseiten in der $z$-Ebene ist umgekehrt proportional dem absoluten Betrage $R$ des Differentialquotienten $Z'$, ihre Neigungen aber sind gleich $-\Phi$ bezw. $\frac{\pi}{2} - \Phi$, wo $\Phi$ die Abweichung des Differentialquotienten ist.

Um diejenigen Quadrate der $z$-Ebene zu finden, die von gleicher Grösse sind, braucht man nur $R$ gleich einer Konstanten $k$ oder $e^c$ zu setzen. Längs jeder Kurve

$$1) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} = k = e^c,$$

oder

$$1^*) \qquad \lg \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} = \lg k = c,$$

wobei auch $V$ statt $U$ geschrieben werden kann, sind die kleinen Quadrate der $z$-Ebene gleich gross.

Will man hingegen die Stellen kennen lernen, wo die Bogenelemente der beiden Isothermenscharen der $z$-Ebene parallel sind, so hat man nur nötig, $\Phi$ gleich einer Konstanten $\gamma$ zu setzen. Längs jeder Kurve von der Gleichung

$$2)\qquad \arctan\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial x}}=\gamma$$

sind also die Bogenelemente jeder der beiden Isothermenscharen der $z$-Ebene gleichgerichtet, ihre Tangenten demnach parallel.

Bei der Schreibweise 1*) und 2) genügen die linken Seiten beider Kurvengleichungen der Differentialgleichung $\Delta^2 u = 0$, und da $\lg R + \Phi i$ eine Funktion komplexen Arguments ist, handelt es sich wieder um zwei orthogonale Isothermenscharen.

Das Gesamtresultat ist folgendes:

Jede Isothermenschar $U = a$ und ihre Orthogonalschar $V = b$ haben bei quadratischer Einteilung die gleichgrossen Quadrate auf Kurven von der Gleichung:

$$\lg\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2}=c \quad\text{oder}\quad \lg\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2}=c,$$

dagegen die gleichgeneigten Quadrate auf Kurven von der Gleichung:

$$\arctan\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial x}}=\gamma \quad\text{oder}\quad \arctan\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial x}}=\frac{\pi}{2}-\gamma.$$

Lässt man $c$ und $\gamma$ die Werte der Glieder derselben arithmetischen Reihe annehmen, so erhält man auch durch diese Kurven eine quadratische Einteilung.

Geometrisch folgt daraus:

Legt man in eine Isothermenschar eine Schar berührender Parallelen, so bilden die Berührungspunkte eine Kurve der Schar 2). Wählt man als Neigungen verschiedener Parallelenscharen die Werte der Glieder einer arithmetischen Reihe, so erhält man eine sogenannte isothermische Einteilung.

Man kann z. B. die Reihe

$$0,\quad \pm\frac{2\pi}{n},\quad \pm\frac{4\pi}{n},\quad \pm\frac{6\pi}{n},\cdots$$

wählen.

Ob man von der gewählten Isothermenschar oder ihrer Orthogonalschar ausgeht, ist dabei gleichgiltig.

Die Schar 1) ist weniger bequem zu konstruieren.

Kennt man den Umfang $u_1$ einer Kurve $R = k$ der Schar 1), so ist für die entsprechende Kurve der $Z$-Ebene der Umfang gleich $u_1 R = u_1 k$.

Beispiel. Das Kreisbüschel durch die Punkte $\pm 1$ und die orthogonale Kreisschar seien gegeben. Es wird behauptet, dass die „Kurven gleicher Abweichung“ ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln durch die Punkte $\pm 1$ sind, die „Kurven gleichen Vergrösserungsverhältnisses“ dagegen die zugehörige Lemniskatenschar bilden.

Beweis. In isothermischer Schreibweise lautet die Gleichung der Kreisschar:

$$\lg \frac{p}{q} = c_1,$$

oder

$$U = \lg \sqrt{\frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2}} = \frac{1}{2}\{\lg[(x+1)^2 + y^2] - \lg[(x-1)^2 + y^2]\} = c_1.$$

Die linke Seite giebt:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = R^2 = \frac{4}{p^2 q^2}, \quad \text{oder} \quad R = \frac{2}{pq}.$$

Die Kurven $\frac{2}{pq} = c$, oder $pq = \frac{2}{c}$ sind aber konfokale Lemniskaten.

Das Kreisbüschel hat die Gleichung $\vartheta_2 - \vartheta_1 = \gamma_1$ ($\gamma_1$ ist der konstante Peripheriewinkel), oder

$$V = \arctan \frac{y}{x-1} - \arctan \frac{y}{x+1} = \gamma.$$

Die linken Seiten geben:

$$\Phi = \arctan \frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \arctan \frac{2xy}{x^2 - y^2 - 1} = \arctan \frac{y}{x+1} + \arctan \frac{y}{x-1}$$
$$= \vartheta_1 + \vartheta_2.$$

Die Kurven $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \gamma$ sind aber ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln durch $\pm 1$. Bildet man $R$ mit Hilfe von

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2,$$

so erhält man dasselbe wie vorher. Vertauscht man in der Berechnung von $\Phi$ die Grössen $V$ und $U$, so erhält man:

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{\pi}{2} - \gamma.$$

Dabei war vorausgesetzt, dass eine Funktion $U + Vi = f(x + yi)$ existiert, die das Kreisbüschel und die Kreisschar in die Parallelenscharen der $Z$-Ebene verwandelt. Diese Funktion ist bekanntlich

$$Z = \lg \frac{z+1}{z-1}.$$

Man findet sie aus:

$$U + Vi = \lg \frac{p}{q} + i(\vartheta_1 - \vartheta_2) = \lg \left[\frac{p}{q}[\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)]\right]$$
$$= \lg \frac{p(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)}{q(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2} = \lg \frac{x + yi + 1}{x + yi - 1},$$

oder

$$U + Vi = \lg \frac{z+1}{z-1}.$$

Dabei ist $Z' = \frac{2}{(z+1)(z-1)}$. Multiplikation mit der Konjugierten giebt $R^2 = \frac{4}{pq}$ oder $R = \frac{2}{pq}$, wie oben. Dazu gehört als zugeordnete Funktion $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \gamma$.

Bekanntlich kann man den Umfang der Lemniskaten zweiter Ordnung bestimmen. Will man die Kurven erhalten, die ihnen bei obiger Abbildung in der $Z$-Ebene entsprechen, so schreibe man ihre Gleichung in der Form:

$$p \cdot q = \sqrt{[(x+1)^2 + y^2] \cdot [(x-1)^2 + y^2]}$$
$$= \sqrt{(x+1+yi)(x+1-yi)(x-1+yi)(x-1-yi)} = \frac{2}{c}.$$

Aus $Z = \lg \frac{z+1}{z-1}$ folgt $z = \frac{e^Z+1}{e^Z-1}$ oder $x + yi = \frac{e^{X+Yi}+1}{e^{X+Yi}-1}$, zugleich folgt $x - yi = \frac{e^{X-Yi}+1}{e^{X-Yi}-1}$.

Setzt man dies ein, so ergiebt sich als entsprechende Kurvenschar:

$$3) \qquad \frac{4e^X}{e^{2X} - 2e^X \cos Y + 1} = \frac{2}{c}.$$

Die rechte Seite ist für $c = 2$ oder $R = 2$ gleich 1 und dies entspricht der gewöhnlichen Lemniskate. Für diesen Fall ist der Umfang der letzten Kurve das Doppelte von dem der Lemniskate. Man erhält also bei solchen Abbildungen Kurvenscharen, deren Rektifikation sich leicht erledigen lässt, sobald nur die eine Schar rektifizierbar ist.

Die behandelten Kurven haben auch eine kartographische Bedeutung, denn die im Beispiele besprochene Abbildungsfunktion giebt die direkte Übertragung der Karte der östlichen Halbkugel auf die Merkartorkarte. Es handelt sich also bei 3) um die Kurven gleichen Kartenfaktors, d. h. konstanten Vergrösserungsverhältnisses für die beiden Darstellungen des Globus. Die Kurven gleicher Abweichung zu bestimmen, ist ein einfaches Übungsbeispiel.

Allgemein bekannt ist ferner die Deutung isothermischer Kurvensysteme für die stationäre elektrische und Wärme-Strömung. In der $Z$-Ebene handle es sich um die Parallelströmung in der Richtung der positiven reellen Axe, dann sind die Linien $U = a$ die Linien gleichen Potentials für die $z$-Ebene, die Linien $V = b$ die Stromlinien. Bei der quadratischen Einteilung handelt es sich um konstante Potentialdifferenzen, also ist das Gefälleverhältnis des Potentials umgekehrt proportional den Dimensionen der Quadrate, und dasselbe gilt von der Stromgeschwindigkeit, ebenso auch von der Stromdichte oder Stromstärke, denn die gleiche Anzahl von Stromfäden wird bald auf einen breiteren, bald auf einen engeren Kanal verteilt, und zwar bei gleicher Dicke $\delta$ der unendlich dünnen Platte. Folglich:

Bei der stationären elektrischen Strömung sind nicht nur die Strom- und Niveaulinien, sondern auch die Linien gleicher Stromstärke und gleicher Stromrichtung Orthogonalscharen von Isothermen.

Entsprechendes gilt von der Wärmeströmung. Auf Deutungen für andere physikalische Theorien soll unten eingegangen werden.

Am einfachsten gestaltet sich alles bei punktförmigen Elektroden von beliebiger Anzahl bei unbegrenzter Platte. Bei einiger Kenntnis der isothermischen Kurvenscharen und der entsprechenden Abbildungsfunktionen lassen sich die Resultate sofort hinschreiben. Aber auch lineare Aus- und Einströmungen lassen sich in grosser Zahl behandeln. Zahlreiche Beispiele nebst Zeichnungen findet man in meiner Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften (Leipzig bei B. G. Teubner). Dort sind jedoch nur die Strom- und Niveaulinien behandelt, nicht die der gleichen Stromstärke und Stromrichtung. Daher sollen einige Beispiele für die letzteren unter Auslassung der eigentlichen Rechnungen angegeben werden.

### § 2. Einige Beispiele von Linien gleicher Stromrichtung und Stromstärke.

1. Bei allen Abbildungen von der Form $Z = \lg z^n$ ist $Z' = \frac{n}{z}$, also der absolute Betrag des Differentialquotienten $\frac{n}{r}$. Bei reellem $n$ sind die Linien gleicher Stromstärke von der Form $\frac{n}{r} = c$ oder $r = \frac{n}{c}$ d. h. konzentrische Kreise um den Nullpunkt. Die Linien gleicher Stromrichtung ergeben sich aus dem Richtungskoeffizienten

$$\frac{1}{\cos\vartheta + i\sin\vartheta} = \cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta),$$

sodass es sich um Gerade durch den Nullpunkt $\vartheta = \gamma_1$ handelt. Dies ist von Wichtigkeit für die Geometrie der hierher gehörigen Strom- und Niveaulinien, deren Gleichungen durch

$$r^n \cos n\vartheta = c \quad \text{und} \quad r^n \sin n\vartheta = c$$

gegeben sind. Diese Kurven sind als Scharen von regulären Hyperbeln $n^{\text{ter}}$ Ordnung zu betrachten. Sie spielen eine Rolle in einer grossen Gruppe Saint Venantscher Torsionsprobleme.

2. Die Abbildung $Z = \lg[(z - z_1)(z - z_2)]$ verwandelt die konfokalen Lemniskaten und das Büschel gleichseitiger Hyperbeln in die Parallelenscharen der $Z$-Ebene. Dabei ist

$$Z' = 2\,\frac{z - \frac{z_1 + z_2}{2}}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

mit Hilfe des konjugierten Ausdrucks und Ausziehung der Quadratwurzel erhält man als absoluten Betrag $R = \frac{2\varrho}{r_1 r_2}$, wo die Radii vec-

tores $r_1$ und $r_2$ von den Punkten $z_1$ und $z_2$ ausgehen, $\varrho$ vom Schwerpunkte $\frac{z_1+z_2}{2}$. Aus $\lg\frac{R}{2} = \lg\varrho - (\lg r_1 + \lg r_2)$ geht hervor, dass die ergänzende Funktion $\varphi - (\vartheta_1 + \vartheta_2)$ ist, wobei es sich um die Neigungswinkel der Radii vectores handelt. Die Linien gleicher Stromstärke $\frac{\varrho}{r_1 r_2} = c$ und $\varphi - (\vartheta_1 + \vartheta_2) = \gamma$ sind mehrfach in meiner Einführung abgebildet.

3. Durch $Z = \lg[(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)]$ verwandelt man Lemniskaten und Hyperbeln dritter Ordnung in die Parallelscharen. Legt man den Koordinatenanfang in den Schwerpunkt der Wurzelpunkte, so geht das ausgerechnete Produkt über in

$$z^3 + z(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) - z_1 z_2 z_3,$$

denn das Glied $z^2(z_1 + z_2 + z_3)$ fällt weg, da für den Schwerpunkt $\frac{z_1+z_2+z_3}{3} = 0$ ist. Jetzt wird

$$Z' = 3\,\frac{z^2 + \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{3}}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} = 3\,\frac{(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)},$$

wo $\zeta_1$ und $\zeta_2$ die Wurzelpunkte des Zählers sind. Mit Hilfe der Konjugierten etc. erhält man als absoluten Betrag:

$$R = 3\,\frac{\varrho_1 \varrho_2}{r_1 r_2 r_3}.$$

Aus $\lg\frac{R}{3} = \lg\varrho_1 + \lg\varrho_2 - (\lg r_1 + \lg r_2 + \lg r_3)$ erkennt man, dass die Abweichung ist: $\Phi = (\varphi_1 + \varphi_2) - (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3)$.

Zu den Niveaulinien $p_1 p_2 p_3 = c$ und den Stromlinien $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 = \gamma$ gehören also als Linien gleicher Stärke und Richtung der Strömungen die Kurven

$$\frac{\varrho_1 \varrho_2}{r_1 r_2 r_3} = c \quad \text{und} \quad (\varphi_1 + \varphi_2) - (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) = \gamma,$$

die selbst Lemniskaten und Hyperbeln gebrochener Ordnung sind.

Ist das Dreieck ein regelmässiges, so wird

$$R = 3\,\frac{\varrho^2}{r_1 r_2 r_3}, \quad \Phi = 2\varphi - (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3).$$

4. Durch $Z = \lg[(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)]$ verwandelt man Lemniskaten und Hyperbeln $n^{\text{ter}}$ Ordnung in Parallelenscharen. Ihre Gleichungen sind $p_1 p_2 \cdots p_n = c$ und $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n = \gamma$.

Die Asymptoten der letzteren gehen durch den Schwerpunkt der Wurzelpunkte. Wählt man diesen als Koordinatenanfang, so fällt das zweite Glied des ausgerechneten Bruches weg (Reduktion der Gleichungen durch Substitution). Nötig ist aber diese Verlegung nicht. Hier ist

$$Z' = \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \cdots + \frac{1}{z-z_n}.$$

Die Vereinigung der Brüche giebt eine Funktion, die im Nenner $n^{\text{ten}}$ Grades, im Zähler $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ist. Letzterer ist also ein Produkt von $(n-1)$ Faktoren, sodass man schliesslich hat:

$$Z' = \frac{(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\dots(z-\zeta_{n-1})}{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)};$$

daraus folgt als absoluter Betrag bezw. Abweichung, abgesehen vom Faktor $n$,

$$R = \frac{\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_{n-1}}{r_1 r_2\dots r_n},$$

$$\Phi = (\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_{n-1}) - (\vartheta_1+\vartheta_2+\dots+\vartheta_n).$$

Liegen die gegebenen Punkte regelmässig verteilt auf einem Kreise, so wird:

$$R = n\frac{\varrho^{n-1}}{r_1 r_2\dots r_n},\quad \Phi = (n-1)\varphi - (\vartheta_1+\vartheta_2+\dots+\vartheta_n).$$

Den Fall der Regelmässigkeit habe ich im 83. Bande des Crellschen Journals behandelt, den der allgemeinen Lage und die noch folgenden im Programm 1880 der Hagener Gewerbeschule. Weitere Litteratur ist in der „Einführung“ angegeben. Der erstgenannte Fall ist wichtig für die Geometrie der Kegelflächen.

5. Die Abbildung $Z = \lg\frac{(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\dots(z-\zeta_n)}{(z-\eta_1)(z-\eta_2)\dots(z-\eta_n)}$ verwandelt die Lemniskaten und Hyperbeln von der Ordnung $\frac{n}{n}$, nämlich die Kurven:

$$\frac{p_1p_2\dots p_n}{q_1q_2\dots q_n} = c,\quad (\vartheta_1+\vartheta_2+\dots+\vartheta_n) - (\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_n) = \gamma$$

in Parallelenscharen. Dabei ist der Differentialquotient:

$$Z' = \sum_1^n \frac{1}{z-\zeta_m} - \sum_1^n \frac{1}{z-\eta_m}.$$

Man kann alles in einem einzigen Bruch vereinigen, dessen Nenner vom $2n^{\text{ten}}$ Grade, dessen Zähler vom $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist. Zerlegt man auch den letzteren in Faktoren, so erhält man:

$$Z' = \frac{\prod_1^{2n-1}(z-\varkappa_m)}{\prod_1^n(z-\zeta_m)\prod_1^n(z-\eta_m)}.$$

Der absolute Betrag wird von der Form:

$$R = \frac{\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_{2n-1}}{p_1p_2\dots p_n\cdot q_1q_2\dots q_n}.$$

Die Abweichung wird von der Form:

$$\Phi = (\psi_1+\psi_2+\dots+\psi_{2n-1}) - [(\vartheta_1+\vartheta_2+\dots+\vartheta_n) + (\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_n)].$$

$R = c$ und $\Phi = \gamma$ geben die Linien gleicher Stromstärke und Stromrichtung.

Ist die Zahl der Faktoren im Zähler und Nenner ungleich, z. B. oben $n$, unten $m$ und $n > m$, so folgt für den Fall gleicher Mächtigkeit

der Ein- und Ausströmungen in allen Elektroden, dass der überschiessende Teil einströmender Elektrizität nach dem Unendlichen abfliessen muss. Bei $n < m$ muss das Fehlende aus der Unendlichkeit heranströmen. In der Gestalt der Gleichungen wird wesentliches nicht geändert.

6. Sind die Mächtigkeiten der Einströmungen durch die Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$, die der Ausströmungen durch $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_m$ charakterisiert, so muss, wenn keine Elektrizität nach dem Unendlichen abströmen oder von dort heranströmen soll,

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m$$

sein. Diese Bedingung braucht aber nicht erfüllt zu werden, dann hat man den allgemeinsten Fall punktförmiger Elektroden. Dabei hat man sich bei jeder Elektrode $\nu_1, \nu_2 \ldots, \nu_n, \mu_1, \mu_2 \ldots, \mu_m$ Einzelelektroden gleicher Mächtigkeit zu denken und erhält dann folgendes:

Die abbildende Funktion wird

$$Z = \lg \frac{(z-\zeta_1)^{\nu_1}(z-\zeta_2)^{\nu_2}\ldots(z-\zeta_n)^{\nu_n}}{(z-\eta_1)^{\mu_1}(z-\eta_2)^{\mu_2}\ldots(z-\eta_m)^{\nu_m}} = \sum_1^n \nu \lg(z-\zeta) - \sum_1^m \mu \lg(z-n).$$

Die Niveaulinien werden von der Form:

$$\frac{p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots p_n^{\nu_n}}{q_1^{\mu_1} q_2^{\mu_2} \ldots q_m^{\mu_m}} = c;$$

die Stromlinien von der Form:

$$(\nu_1 \vartheta_1 + \nu_2 \vartheta_2 + \cdots + \nu_n \vartheta_n - (\mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \cdots + \mu_m \varphi_m) = \gamma.$$

Dabei wird

$$Z' = \sum_1^n \frac{\nu}{z-\zeta} - \sum_1^m \frac{\mu}{z-\eta},$$

d. h., wenn man alle Brüche in einen einzigen zusammenfasst, eine Funktion, die im Nenner vom $(n+m)^{\text{ten}}$ Grade, im Zähler vom $(n+m-1)^{\text{ten}}$ Grade, also nach entsprechender Produkterlegung von der Form:

$$Z' = \frac{\prod_1^{n+m-1}(z-\varkappa)}{\prod_1^n (z-\zeta)\prod_1^m (z-\eta)}$$

wird. Daraus folgt, dass der absolute Betrag von der Form:

$$R = \frac{\prod_1^{n+m-1} \varrho}{\prod_1^n p \prod_1^m q},$$

die Abweichung von der Form:



$$\Phi = \sum_1^{n+m-1} \psi - \left[ \sum_1^n \vartheta + \sum_1^m \varphi \right]$$

wird. Durch $R = c$ und $\Phi = \gamma$ sind wiederum die Linien gleicher Stromstärke und Stromrichtung gegeben.

7. Absichtlich wurden die positiven und negativen Elektroden bisher getrennt behandelt, um die Anschauung zu erleichtern. Man erzielt aber eine elegantere Schreibweise, wenn man diesen Unterschied fallen lässt, und $n$ Elektroden annimmt, die von den teils positiv, teils negativ anzunehmenden Mächtigkeiten $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ sind. Man erhält jetzt als abbildende Funktion einfacher:

$$Z = \lg[(z - \zeta_1)^{\nu_1}(z - \zeta_2)^{\nu_2} \ldots (z - \zeta_n)^{\nu_n}] = \sum_1^n \nu \lg (z - \zeta),$$

als Niveau- und Stromlinien:

$$p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots p_n^{\nu_n} = c \quad \text{oder} \quad \prod_1^n p^\nu = c,$$

bezw.

$$\nu_1 \vartheta_1 + \nu_2 \vartheta_2 + \cdots + \nu_n \vartheta_n = \gamma \quad \text{oder} \quad \sum_1^n \nu \vartheta = \gamma.$$

Dabei wird der Differentialquotient von der Form:

$$Z' = \sum_1^n \frac{\nu}{z - \zeta} = \frac{\varphi(z)}{(z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \ldots (z - \zeta_n)} = \frac{(z - \varkappa_1)(z - \varkappa_2) \ldots (z - \varkappa_{n-1})}{(z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \ldots (z - \zeta_n)},$$

sein absoluter Betrag von der Form:

$$R = \frac{\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{n-1}}{r_1 r_2 \ldots r_n} = \frac{\prod_1^{n-1} \varrho}{\prod_1^n r},$$

die Abweichung von der Form:

$$\Phi = (\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_{n-1}) - (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n) = \sum_1^{n-1} \psi - \sum_1^n \vartheta.$$

Damit sind die Linien gleicher Stromstärke und Stromrichtung als Kurven

$$R = c, \quad \Phi = \gamma$$

charakterisiert.

Das bisherige Gesamtresultat ist demnach folgendes:

Für alle Fälle punktförmiger positiver und negativer Elektroden bei unbegrenzter Platte sind nicht nur die Niveau- und Stromlinien, sondern auch die Linien gleicher Stromstärke und gleicher Stromrichtung Isothermenscharen von der Gestalt der allgemeinsten Lemniskaten und Hyperbeln ganzer oder gebrochener Ordnung.

Von den Niveau- und Stromlinien war dies bekannt. Für die Linien gleicher Stromrichtung und Stromstärke habe ich in der mir

zugänglichen reichen Litteratur das angegebene Resultat bisher nicht vorgefunden. Sollte es trotzdem schon ausgesprochen sein, so würde ich entsprechende Mitteilungen aus dem Leserkreise dankbar entgegennehmen und entsprechende Prioritätsansprüche selbstverständlich anerkennen.

Die Bedeutung der Lemniskaten und Hyperbeln höherer Ordnung ist aber eine noch weiter gehende. Bei jedem Stromnetze können nämlich die Strom- und Niveaulinien ihre Rolle vertauschen, ohne dass dabei die Linien gleicher Stromstärke und Stromrichtung ihre Rolle ändern.

Es handelt sich dann nämlich statt der Abbildung $Z = U + Vi$ um die Abbildung $Z_1 = Zi = Ui + iVi = -V + Ui$, was die vorigen Isothermenscharen in die um 90° gedrehten Parallelenscharen verwandelt. Die Linien gleicher Stromstärke werden jetzt durch

$$\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} = c$$

charakterisiert, was mit dem Früheren übereinstimmt.

Bei dieser Vertauschung treten aber an Stelle der punktförmigen Elektroden lineare, sodass zu jedem Punktproblem ein Linearproblem gehört.

Nun ändert sich aber nichts, wenn man längs der Stromlinien des Punktproblems Teile der unbegrenzten Ebene ausschneidet, z. B. eine Sichel zwischen zwei Büschelkreisen des Zweipunkt-Problems. Trifft man also das Arrangement so, dass längs der Stromlinien ein begrenztes, einfach zusammenhängendes Stück der Ebene ausgeschnitten wird, und führt man dann das Vertauschungsproblem ein, so erhält man ein sogenanntes Randproblem und kann ohne weiteres aus den Gleichungen des Punktproblems die des Randproblems ablesen, womit man zur Lösung einer der Fundamentalaufgaben der neueren Funktionentheorie gelangt.

An einem einfachen Beispiele soll dies erläutert werden.

Vorläufig aber sei bemerkt, dass die obigen Betrachtungen nicht nur für Punktprobleme gelten, sondern auch für Linearprobleme. So wird z. B. durch die Abbildung

$$Z = \arccos z$$

das Netz der konfokalen Ellipsen und Hyperbeln in das der Parallelen verwandelt. Dabei kann man die Brennlinie als Elektrode annehmen und die Elektrizität im Unendlichen ableiten, sodass die konfokalen Hyperbeln Stromlinien sind; oder man kann die beiderseitigen Fortsetzungen der Brennlinien als positive und negative Elektrode betrachten, wobei die konfokalen Ellipsen Stromlinien werden. Dabei ist

$$Z' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{1}{\sqrt{(1+z)(1-z)}}.$$

Multiplikation mit dem konjugierten Ausdrucke giebt

$$R^2 = \frac{1}{\sqrt{r_1^{\,2} r_2^{\,2}}} = \frac{1}{r_1 r_2},$$

sodass der absolute Betrag $R = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}$, die Abweichung:

$$\Phi = -\frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

ist. Demnach sind die Linien gleicher Stromstärke und Stromrichtung konfokale Lemniskaten mit den Brennpunkten $\pm 1$ und das zugehörige Hyperbelbüschel, was schon bei dem Kreisbüschel und der Kreisschar der Fall war.

Man kann aus dieser Übereinstimmung geometrische Schlüsse ziehen. Zu den Brennpunkten $\pm 1$ gehört erstens die Doppelschar konfokaler Ellipsen und Hyperbeln, sodann ein Kreisbüschel nebst Kreisschar. Denkt man sich beide Netze mit den Brennpunkten aufeinandergelegt, so herrscht längs jeder durch $\pm 1$ gehenden gleichseitigen Hyperbel ein konstanter Richtungsunterschied zwischen den Stromlinien beider Netze, längs jeder konfokalen Lemniskate aber ein konstantes Verhältnis in den Dimensionen der kleinen Quadrate beider Netze. Auf diesen Punkt soll später noch einmal eingegangen werden.

In der „Einführung“ sind noch andere lineare Einströmungsfälle behandelt worden, die mit dem doppeltperiodischen Funktionen zusammenhängen. Auch für diese kann man die Linien gleicher Stromstärke und Stromrichtung sofort hinschreiben. Die dort behandelten Kurvenscharen lassen sich durch stereographische Projektion aus den sphärischen Kegelschnitten ableiten, was ihnen ein besonderes Interesse verleiht. Es lassen sich also entsprechende Betrachtungen auch für die Kugeloberfläche und mittels der Jacobischen Abbildung für die Ellipsoidfläche durchführen. Nur sei darauf aufmerksam gemacht, dass bei einer Abbildung zwar die Strom- und Niveaulinien wieder in solche übergehen, im allgemeinen aber nicht die Linien gleicher Stromstärke und -Richtung. Geht nämlich $Z$ in $Z_1$ über, so geht nicht $Z'$ in $Z'_1$ über, denn es ist für $Z_1 = Z[f(z)]$ der Differentialquotient:

$$Z'_1 = Z' \frac{df(z)}{dz} = Z' f'(z).$$

Zwischen $Z'_1$ und $Z'$ besteht also ein anderer funktionaler Zusammenhang als zwischen $Z_1$ und $Z$.

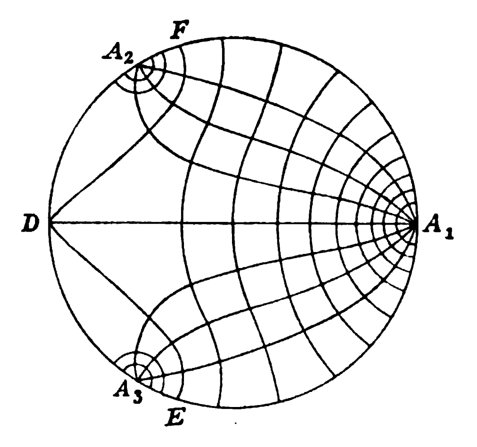
Zur Frage der höheren Differentialquotienten und ihrem Zusammenhang mit den Krümmungsradien vergleiche man § 46 der Einführung. Hier soll darauf nicht eingegangen werden. Dagegen sei bemerkt, dass man jeden Aus- und Einströmungspunkt als Projektion eines unendlich langen Drahtes betrachten kann, in dem sich ein Strom in der einen oder anderen Richtung bewegt. Die Niveau- und Kraftflächen des Feldes geben in den Normalschnitten die hier behandelten Kurven. Die Linien gleicher Intensität und Richtung werden aus ihnen ebenso, wie oben, abgeleitet.

### § 3. Übergang von den Punkt- zu den Randproblemen.

Liegen sämtliche Elektroden auf einer Geraden, so findet gegen diese Linie Symmetrie des Stromnetzes statt. Liegen sie sämtlich auf einem Kreise, so findet gegen diesen Reziprozität statt. Dabei muss jedoch ein Abfliessen der Elektrizität nach dem Unendlichen und ein Zuströmen von dorther ausgeschlossen werden, weil sonst noch ausserhalb des Kreises eine Elektrode liegen würde. Reziprozität würde in solchem Falle nur möglich sein, wenn der Mittelpunkt des Kreises ebenfalls Elektrode wäre. Sollen diese Fälle ausgeschlossen werden, so handelt es sich um die oben besprochene Beziehung:

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \cdots + \nu_n = 0.$$

Wählt man unter dieser Voraussetzung den Fall dreier punktförmiger Elektroden, durch die sich stets ein Kreis legen lässt, so gehört dieser zu den Stromlinien und man hat ein besonders einfaches Beispiel.




In nebenstehender Figur ist des bequemen Skizzierens halber der symmetrische Fall gewählt, wo die Elektroden $A_1$, $A_2$ und $A_3$ ein gleichseitiges Dreieck bilden und $A_2$ und $A_3$ von gleicher Mächtigkeit sind, so dass z. B.:

$$\nu_1 = \quad 2,$$
$$\nu_2 = -1,$$
$$\nu_3 = -1$$

ist. Dann gehört der Durchmesser $A_1 D$ zu den Stromlinien. Die abbildende Funktion ist nach dem Früheren:

$$Z = \lg [(z - \zeta_1)^2 (z - \zeta_2)^{-1} (z - \zeta_3)^{-1}],$$

der Differentialquotient:

$$Z' = \frac{2}{z - \zeta_1} - \frac{1}{z - \zeta_2} - \frac{1}{z - \zeta_3} = \frac{(z-\zeta_2)(z-\zeta_3) - (z-\zeta_3)(z-\zeta_1) - (z-\zeta_1)(z-\zeta_2)}{(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)(z-\zeta_3)}.$$

Setzt man den Zähler gleich Null und löst man die quadratische Gleichung auf, so findet man die Wurzelpunkte $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, sodass wird:

$$Z' = \frac{(z - \varkappa_1)(z - \varkappa_2)}{(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)(z - \zeta_3)}.$$

Die Linien gleichen Potentials werden nach Obigem

$$1) \qquad p_1^{\,2} p_2^{\,-1} p_3^{\,-1} = c,$$

also Lemniskaten höherer Ordnung, deren Radii vectores von $A_1$, $A_2$, $A_3$ ausgehen.

Die Strömungslinien werden von der Form:

2) $$2\vartheta_1 - (\vartheta_2 + \vartheta_3) = \gamma,$$

wo die $\vartheta$ die Neigungswinkel der genannten Radii vectores sind.

Die Linien gleicher Stromstärke werden, da $R = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{p_1 p_2 p_3}$ ist,

3) $$\frac{\varrho_1 \varrho_2}{p_1 p_2 p_3} = c_1,$$

wobei $\varrho_1$ und $\varrho_2$ von den Wurzelpunkten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ des Zählers von $Z'$ ausgehen. Die Linien gleicher Stromrichtung endlich:

4) $$\psi_1 + \psi_2 - (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) = \gamma_1.$$

Sämtliche Gleichungen gelten zugleich für das Vertauschungsproblem. Bei diesen handelt es sich um Elektrizitäts- oder Wärmeströmungen, die dadurch entstehen, dass Bogen $A_3 A_1$ auf konstantem Potential oder Temperatur gehalten wird, ebenso Bogen $A_1 A_2$ und Bogen $A_2 A_3$. Es fragt sich nur, wie die Potentiale zu wählen sind, damit volle Identität erhalten bleibt. Vorher strömten von $A_1$ doppelt soviel Stromlinien aus, als in $A_1$ bezw. $A_2$ mündeten. Jetzt münden, wenn Übereinstimmung herrscht, in $A_1$ doppelt soviel Isothermen als in $A_2$ bezw. $A_3$. Von Isotherme zu Isotherme hat man bei der Quadrateinteilung konstanten Potentialunterschied. Die Potentialdifferenz zwischen den Bogen $A_3 A_1 = b_1$ und $A_1 A_2$ ist also doppelt so gross, wie die zwischen $A_1 A_2 = b_2$ und $A_2 A_3 = b_3$ bestehende, und auch doppelt so gross, wie die zwischen $A_2 A_3 = b_3$ und $A_3 A_1 = b_1$ bestehende. Nennt man die den Bogen $b_1$, $b_2$, $b_3$ entsprechenden Potentiale oder Temperaturen $t_1$, $t_2$, $t_3$, so muss demnach sein:

$$(t_1 - t_2) : (t_2 - t_3) : (t_3 - t_1) = \nu_1 : \nu_2 : \nu_3 = 2 : -1 : -1.$$

Wählt man z. B. für $b_1$ die konstante Temperatur $16^0$, für $b_2$ dagegen $0^0$, für $b_3$ endlich $8^0$, so hat man

$$t_1 - t_2 = 16^0, \quad t_2 - t_3 = -8^0, \quad t_3 - t_1 = -8^0,$$

sodass der obigen Proportion genügt ist. Abgesehen von einem konstanten Faktor $\varkappa_1$, den man nach rechts werfen kann, hat man die Gleichungen des Problems, sobald man für $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$ in die obigen Gleichungen $(t_1 - t_2)$, $(t_2 - t_3)$, $(t_3 - t_1)$ einsetzt.

Ganz ebenso ist es, wenn man statt von 3, von $n$ Teilbogen ausgeht. Folglich:

Werden die aufeinanderfolgenden Bogen $b_1, b_2, \ldots b_n$ eines Kreises auf konstanten Temperaturen oder Potentialen $t_1$, $t_2, \ldots t_n$ gehalten, so sind die Niveaulinien von der Form:

1) $$\vartheta_1(t_1 - t_2) + \vartheta_2(t_2 - t_3) + \cdots + \vartheta_n(t_n - t_1) = \gamma,$$

die Stromlinien von der Form:

2) $$(t_1 - t_2)\lg p_1 + (t_2 - t_3)\lg p_2 + \cdots + (t_n - t_1)\lg p_n = c,$$

die Linien gleicher Stromstärke von der Form:

3) $$\frac{\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_{n-1}}{p_1 p_2 \dots p_n} = c_1,$$

die Linien gleicher Stromrichtung:

4) $$(\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_{n-1}) - (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_n) = \gamma_1.$$

Dabei sind die Teilpunkte des Kreises die Ausgangspunkte der Radii vectors $p$, die Wurzelpunkte des Zählers vom Differentialquotienten der abbildenden Funktion dagegen sind die Ausgangspunkte der $\varrho$. Diese abbildende Funktion ist (abgesehen von einem konstanten Faktor und einer additiven Konstanten):

5) $$Z = (t_1 - t_2)\lg(z - z_1) + (t_2 - t_3)\lg(z - z_2) + \dots + (t_n - t_1)\lg(z - z_n),$$

ihr Differentialquotient:

$$Z' = \frac{t_1 - t_2}{z - z_1} + \frac{t_2 - t_3}{(z - z_2)} + \dots + \frac{t_n - t_1}{z - z_n}.$$

Vereinigt man die Brüche, so wird der Zähler vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, lässt sich also in $(n-1)$ lineare Faktoren vereinigen, sodass man hat

$$Z' = \frac{(z - \varkappa_1)(z - \varkappa_2) \dots (z - \varkappa_{n-1})}{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)}.$$

Um für jeden Punkt des Innern den Spannungs- oder Temperaturwert genau anzugeben, sodass auch die Konstanten bestimmt sind, kann man folgendermassen verfahren: Man schreibe Gleichung 1) in der Form

1*) $$t_1(\vartheta_1 - \vartheta_2) + t_2(\vartheta_2 - \vartheta_3) + \dots + t_n(\vartheta_n - \vartheta_1) = \gamma.$$

Hier bedeuten die Klammern die Winkel zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Radii vectores $p$. Rückt nun der Punkt, dem sie angehören, in das Kreiszentrum, so nehmen die Klammern die Werte $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$ der Centriwinkel an, die zu den Kreisbogen $b_1, b_2 \dots b_n$ gehören. Rückt dagegen der Punkt auf den Kreisrand, so handelt es sich im wesentlichen um Peripheriewinkel, wobei nur ein Winkel eine Ausnahme macht. Rückt nämlich der Punkt auf den Bogen $b_1$, so bleibt der diesem Bogen zugehörige Winkel $(\vartheta_1 - \vartheta_2)$ eine Art von Aussenwinkel von der Grösse $\pi + \frac{\beta_1}{2}$ $\left(\text{denn die des zugehörigen Sehnenvierecks sind } \frac{\beta_1}{2} \text{ und } \pi - \frac{\beta_1}{2}\right)$. Die übrigen Winkel werden

$$\frac{\beta_2}{2}, \quad \frac{\beta_3}{2}, \dots \frac{\beta_n}{2}.$$

Auf dem Bogen $b_1$ also handelt es sich um den Funktionswert:

$$t_1\left(\pi + \frac{\beta_1}{2}\right) + t_2\frac{\beta_2}{2} + t_3\frac{\beta_3}{2} + \dots + t_n\frac{\beta_n}{2} = \gamma_1,$$

oder um

$$t_1\pi + \frac{t_1\beta_1 + t_2\beta_2 + \dots + t_n\beta_n}{2} = \gamma_1.$$

Demnach ist für den Rand bei $b_1$:

$$t_1 = \frac{\gamma_1}{\pi} - \frac{t_1\beta_1 + t_2\beta_2 + \cdots + t_n\beta_n}{2\pi}.$$

Setzt man statt $\gamma_1$ den allgemeinen Funktionswert ein, so erhält man als allgemeinen Ausdruck für die Temperatur in jedem Punkte des Innern:

$$1^{**})\quad t = \frac{t_1(\vartheta_1 - \vartheta_2) + t_2(\vartheta_2 - \vartheta_3) + \cdots + t_n(\vartheta_n - \vartheta_1)}{\pi} - \frac{t_1\beta_1 + t_2\beta_2 + \cdots + t_n\beta_n}{2\pi}.$$

Die Probe zeigt, dass dieser Ausdruck in der That auf jedem Bogen den vorgeschriebenen Temperaturwert annimmt. Im Kreiszentrum nimmt er den Wert:

$$t_m = \frac{t_1\beta_1 + t_2\beta_2 + \cdots + t_n\beta_n}{\pi} - \frac{t_1\beta_1 + t_2\beta_2 + \cdots + t_n\beta_n}{2\pi},$$

oder

$$t_m = \frac{t_1\beta_1 + t_2\beta_2 + \cdots + t_n\beta_n}{2\pi}$$

an, oder, wenn man oben unten mit $r$ multipliziert, den Wert

$$t_m = \frac{t_1 b_1 + t_2 b_2 + \cdots + t_n b_n}{2r\pi},$$

sodass es sich um den mittleren Randwert handelt. Der Temperatur- oder Potentialwert für das Kreiszentrum ist also der Mittelwert der gegebenen Randwerte. Dieses Resultat erscheint ganz naturgemäss, da der Einfluss aller Randpunkte der gleichen Entfernung wegen für das Zentrum derselbe ist.

In der Figur handelt es sich bei den Temperaturen $16^0$, $0^0$, $8^0$ in der Mitte in der That um $8^0$. Die Stromlinien enthalten eine ausnahmsweise gebrochene Linie $EDF$. Rechts von dieser Linie strömt Wärme vom Bogen $EA_1$ nach $FA_1$. Links davon geschieht zweierlei, Wärme strömt vom Bogen $EA_3$ nach $A_3D_1$ und ebenso strömt Wärme von $DA_2$ nach $A_2F$. Die Isotherme $A_1D$ gabelt sich bei $D$ in die beiden Kreisbogen $DA_3$ und $DA_2$.

Für die Teilpunkte des Randes ist die Funktion $t$ unstetig, denn sie springt von den einen der gegebenen Werte plötzlich zum anderen über. Es handelt sich dort um singuläre Punkte.

Damit ist folgende Aufgabe der Potential- und Funktionentheorie gelöst:

Es soll eine reelle Funktion $U$ bestimmt werden, die der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ genügt und auf dem Rande eines gegebenen Kreises bogenweise die vorgeschriebenen reellen Werte $t_1, t_2, \ldots t_n$ annimmt. Die Funktion soll im Innern des Kreises überall stetig, endlich und eindeutig sein. Wie lautet der Funktionswert für jeden Punkt des Kreisinnern?

Die Auflösung ist:

$$U = \frac{t_1(\varphi_1-\varphi_2)+t_2(\varphi_2-\varphi_3)+\cdots+t_n(\varphi_n-\varphi_1)}{\pi} - \frac{t_1\beta_1+t_2\beta_2+\cdots+t_n\beta_n}{2\pi},$$

oder auch
$$U = \frac{1}{\pi}[\vartheta_1(t_1-t_2)+\vartheta_2(t_2-t_3)+\cdots+\vartheta_n(t_n-t_1)] + C,$$

wo
$$C = \frac{t_1\beta_1+t_2\beta_2+\cdots+t_n\beta_n}{2\pi} = \frac{t_1 b_1+t_2 b_2+\cdots+t_n b_n}{2r\pi}$$

ist. $U$ ist zugleich reeller Teil derjenigen Funktion komplexen Arguments $Z = U + Vi$, deren reeller Teil auf dem Rande die vorgeschriebenen Werte annimmt. Die ergänzende Funktion $V$ ist nach Gleichung 2) von der Form:

$$2^*)\quad V = (t_1-t_2)\lg p_1 + (t_2-t_3)\lg p_2 + \cdots + (t_n-t_1)\lg p_n + C_1.$$

Ist ihr Wert für einen einzigen Punkt des Innern vorgeschrieben, z. B. als $V_1$, so hat man

$$V_1 = (t_1-t_2)\lg p'_1 + (t_2-t_3)\lg p'_2 + \cdots + (t_n-t_1)\lg p'_n + C_1,$$

und nun kann die willkürliche Konstante $C_1$ durch beiderseitige Subtraktion entfernt werden. Abgesehen von den Konstanten handelt es sich um die Funktion komplexen Arguments, die unter 5) angegeben ist.

Der Übergang zu unendlich vielen vorgeschriebenen Randwerten kann nun auf dem gebräuchlichen Wege geschehen, der Übergang zu anderen einfach zusammenhängenden Flächenformen durch Abbildung.

Damit ist unter Benutzung der Lemniskaten und Hyperbeln höherer Ordnung ein synthetischer Weg zu einem grundlegenden Satz der Funktionentheorie gegeben, der ohne weitergehende Vorkenntnisse gangbar ist und bei der unausgesetzten Berührung mit der mathematischen Physik sehr anschaulich bleibt. Ist auf diesem Wege das Verständnis angebahnt, so wird auch die analytische Betrachtungsweise keine Schwierigkeiten bieten.

Ich habe auf diesen Punkt schon im 33. Bande dieser Zeitschrift im Anschluss an eine lehrreiche Arbeit des Herrn Dr. Veltmann aufmerksam gemacht. Dort trat aber die Form der Funktion zu unvermittelt auf, während im obigen der Begriff des Vertauschungsproblems genügte, einem naturgemässen Übergang von dem leichten Punktprobleme zum Randprobleme zu geben. Damit dürfte die funktionentheoretische Bedeutung der Lemniskaten und Hyperbeln höherer Ordnung zur Genüge klar gelegt sein.

## § 4. Physikalische Bemerkungen.

Die Lemniskaten und Hyperbeln höherer Ordnung sind von mir im 83. Bande des Crelleschen Journals und im Programm 1880 der Hagener Gewerbeschule eingehend behandelt worden. Die bis 1882 reichende Litteratur, an der auch die Namen Darboux, Lucas,

Haton de la Goupillière beteiligt sind, ist in meiner Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften angegeben. Später hat sich auch Herr Prof. Biermann im 89. Bande der Sitzungsberichte der Wiener Akademie (Sitzung vom 10. Januar 1884) mit diesen Kurven beschäftigt. Sie können zur Kontrolle bei Erledigung gewisser physikalischer Streitfragen benutzt werden, auf die mit einigen Worten hingewiesen werden möge.

Bekanntlich hat Herr Professor A. Guébhard zu Paris den Versuch gemacht, die Linien gleichen Potentials bei stationärer Strömung in Gestalt von Interferenzringen galvanischer Niederschläge zu veranschaulichen. In den Berichten der Académie des Sciences, im Electricien, im Journal de Physique ist im Anfang der achziger Jahre vielfach darüber berichtet worden (für Litteratur vergl. die Einführung). Während nun die Schönheit der Guébhardschen Farbenringe und ihre Ähnlichkeit mit den Potentialkurven überall Erstaunen erregte, wurde die Angelegenheit von anderer Seite kritisch behandelt. Teils wurden Messungen und Vergleichungen mit den theoretisch konstruierten Kurven durchgeführt, teils wurden theoretische Erläuterungen für die Guébhardschen Ringe gegeben. Wenn von einigen Seiten behauptet wurde, durch Riemanns Theorie der Nobilischen Farbenringe sei die Angelegenheit bereits zu Ungunsten der Guébhardschen Auffassung entschieden, so ist dies nicht ohne weiteres berechtigt, da die Experimente Guébhards eine abweichende Anordnung haben. Wurde ferner behauptet, die Guébhardschen Ringe seien Kurven gleicher Stromstärke, so beruht dies, soweit es sich um Strömung in der Platte oder in einer Flüssigkeitsschicht von geringer Höhe, also um ein zweidimensionales Problem handeln soll, auf einem Irrtum. Die oben behandelten Kurven gleicher Stromstärke weichen von den Guébhardschen Ringen derart ab, dass von einem Vergleiche gar nicht die Rede sein kann. Im übrigen ist oben gezeigt worden, dass ein System von Linien gleicher Stromstärke ganz verschiedenen Stromnetzen zugleich angehören kann, z. B. das der Lemniskaten und Hyperbeln sowohl dem Probleme des Kreisbüschels, als auch dem der konfokalen Ellipsen.

Anders ist es, wenn von einer Strömung im Raume, d. h. in der Flüssigkeit und Platte zugleich die Rede sein soll. Die Frage aber, welchen Anteil die Platte an der Erscheinung nimmt, und welche Rolle die Polarisation bei der Angelegenheit spielt, ist durchaus noch nicht erledigt. Wenigstens hat mir im Jahre 1890 Helmholtz (gelegentlich der Berliner Schulkonferenz) erklärt, weder die Abhandlungen der Herren H. Meyer und W. Voigt, noch die der Herren Mach und Ditscheiner reichten aus, die grosse Ähnlichkeit der Guébhardschen Ringe mit dem Potentialkurven aufzuklären. Er selbst vermute einen ganz anderen Zusammenhang und habe das Problem schon dreimal durch hervorragend beanlagte Schüler im Physikalischen Institut behandeln lassen. Leider seien jedesmal Störungen in den persönlichen Verhältnissen

dieser Herren eingetreten, die den Abschluss der Untersuchungen vereitelt hätten. Dies werden gewisse Herren, die Helmholtz näher standen, bestätigen können. Helmholtz erklärte mir ferner, er habe die Absicht, die Frage demnächst noch einmal aufzugreifen. — Ich selbst enthalte mich in der Angelegenheit der Experimente jedes Urteils. Sollten jedoch irgend welche Physiker die Frage der Guébhardschen Ringe noch einmal bearbeiten wollen, so stehen ihnen nach obigem zum Zweck der Kontrolle nicht nur die Gleichungen der Niveau- und Stromlinien, sondern auch die der Linien gleicher Stromstärke und Stromrichtung für alle Arten von punktförmiger Ein- und Ausströmung zur Verfügung. Die Frage der linearen Einströmung scheint nach einer Mitteilung des Herrn Margules in den Wiener Berichten insofern Schwierigkeit zu machen, als die Annahme konstanten Potentials in der Einströmungslinie gewagt erscheint. (Bericht vom 11. Mai 1877.) Herr Haubner hat die Untersuchung der stationären Strömung auch für Fälle wechselnden Leitungsvermögens angebahnt. (Wiener Berichte, 12. Januar 1882.)

### § 5. Zur Umkehrung der ersten Aufgabe.

Oben wurde die Aufgabe gelöst, für ein gegebenes Strömungsnetz die Linien gleicher Stromstärke und Stromrichtung zu finden. Man kann fragen, ob man umgekehrt zu einem gegebenen Netz der letzteren Linien das zugehörige Strömungsnetz bestimmen kann. Es wird sich zeigen, dass für jeden Fall unendlich viele Lösungen möglich sind.

1. Schon in § 1 wurde gezeigt, dass sämtliche Strömungsnetze von der Form:

$$r^n \cos n\vartheta = c, \quad r^n \sin n\vartheta = c_1,$$

also von der Form der Hyperbelscharen beliebiger Ordnung ein und dasselbe System von Isothermen die konzentrischen Kreise und ihre Radien als Linien gleicher Stromstärke und Stromrichtung haben. Allerdings gehört zu jedem $n$ eine besondere Potenz von $r$, die den absoluten Betrag des Differentialquotienten giebt, und ebenso erhält für jeden Fall das zugehörige $\varphi$ seinen besonderen Faktor. In den verschiedenen Fällen handelt es sich also nicht um dieselben Individua der Kurvenschar, aber das Gesamtsystem ist dasselbe. Man kann daher allgemein folgenden Satz aussprechen:

Sämtliche Funktionen $Z = f(z)$, bei denen der Differentialquotient $Z'$ als absoluten Betrag eine reelle Funktion

$$R = \varphi(r)$$

hat, geben an Stelle der Parallelenscharen $X = a$ und $Y = b$ der $Z$-Ebene in der $z$-Ebene Strömungskurven, denen dasselbe Netz von Linien gleicher Stromstärke und Richtung $r = c$ und $\vartheta = \gamma$ zugehört. Hierzu gehören z. B. alle Funktionen $Z = z^n$

Legt man zwei solche Netze mit den Koordinatenaxen aufeinander, so herrscht auf jedem Kreise $r = c$ um den Nullpunkt zwischen den kleinen Quadraten beider Netze dasselbe Vergrösserungsverhältnis, und auf jeden vom Nullpunkte ausgehenden Strahle ein konstanter Richtungsunterschied der Stromlinien beider Netze, von deren Niveaulinien ganz dasselbe gilt.

2. Ebenso kann man fragen, **welche Stromnetze die konfokalen Lemniskaten zweiter Ordnung mit den Brennpunkten $\pm 1$ zu Linien gleicher Stromstärke haben.** Es handelt sich um sämtliche Funktionen $Z = f(z)$, deren Differentialquotient einen absoluten Betrag $R = \varphi(r_1 r_2)$ hat, wo $\varphi$ reelle Funktion der betreffenden Radii vectores ist. Bei diesen Funktionen entsprechen den Linien $X = a$ und $Y = b$ zu $Z$-Ebenen in den $z$-Ebenen Kurven, bei denen das Verlangte stattfindet.

Soll es sich z. B. um $R = (r_1 r_2)^m$ handeln, so gehört dazu als Differentialquotient der abbildenden Funktion $Z' = [(1+z)(1-z)]^m$, sodass die Funktionen

$$Z = \int [1 - z^2]^m dz$$

eine Gruppe der betreffenden Funktionen bilden.

Für $m = -1$ erhält man

$$\int \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2} \lg \frac{1+z}{1-z},$$

was auf das Kreisbüschel durch $\pm 1$ und die zugehörige Kreisschar führt. Für $m = -\frac{1}{2}$ findet man

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = - \arccos z,$$

was auf die konfokalen Ellipsen und Hyperbeln mit den Brennpunkten $\pm 1$ führt. Dies waren die oben behandelten Beispiele.

Für $m = 1$ erhält man

$$\int (1 - z^2) dz = z - \frac{z^3}{3},$$

was Kurven dritten Grades von der Gleichung:

$$-\frac{x^3}{3} + x + xy^2 = c \quad \text{bezw.} \quad \frac{y^3}{3} + y - x^2 y = c_1$$

giebt. So kann man weiter fortfahren.

3. Soll es sich um die schon sehr allgemeinen Lemniskaten höherer Ordnung

$$R = \frac{\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{n-1}}{r_1 r_2 \ldots r_n}$$

handeln, wo die $r$ von Punkten $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ ausgehen, die $\varrho$ von den Wurzelpunkten des Zählers von $\sum_1^n \frac{\nu}{z-\zeta}$, so giebt:

$$Z' = \left[ \sum_1^n \frac{\nu}{z - \zeta} \right]^m$$

eine Gruppe der verlangten Kurven durch die Funktion:

$$Z = \int \left[ \sum_1^n \frac{\nu}{z - \zeta} \right]^m dz.$$

In ähnlicher Weise kann man zu schwierigeren Fällen übergehen. Hier jedoch soll darauf nicht näher eingegangen werden. Der Hinweis auf die Vieldeutigkeit der Lösung bei der angenommenen Fragestellung dürfte für die Bemerkungen des vorigen Abschnitts genügen.

## § 6. Zusammenhang mit der Torsionstheorie von Saint Venant.

In den Mémoires des Savants Etrangers XIV (1856) von Seite 234 bis 560 entwickelt Saint Venant seine berühmt gewordene Theorie der Torsion von Prismen. Im 9. Kapitel von Seite 415 ab beweist er über die Krümmung der ursprünglich ebenen Querschnitte einen Satz, dessen Inhalt in der hier üblichen Schreibweise folgendermassen dargestellt werden möge.

$U$ sei der reelle Teil einer Funktion komplexen Arguments, $Vi$ der zugehörige imaginäre Teil, der sich aus $U$ bestimmen lässt als Integral der Differentialgleichung:

$$dV = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = 0,$$

sodass

$$1) \qquad V = -\int dx \frac{\partial u}{\partial y} + \int dy \frac{\partial u}{\partial x} + \int dx \int dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ist. Sollen nun die durch $V = c$ dargestellten Isothermen die Niveaulinien für die gekrümmten Querschnitte des auf Torsion beanspruchten Cylinders darstellen, so hat man $V$ in die Lösung der Differentialgleichung:

$$\alpha(x dx + y dy) + \left( \frac{\partial u}{\partial y} dx - \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) = 0,$$

d. h. in

$$2) \qquad \alpha \frac{x^2 + y^2}{2} - V = 0$$

einzusetzen, um die Randkurve für das Prisma zu finden, welches der Forderung genügen soll.

Dabei bedeutet $\alpha$ die Drehung für die Stablänge $l = 1$. Die Fläche jedes gekrümmten Querschnitts gehorcht der Gleichung:

3) $$z = V + c,$$

sodass in der That die Projektionen der Niveaulinien die Kurvenschar $V = c$ geben, während die Kurven $U = c$ die Projektionen der Steilungslinien sind, d. h. die der Linien grösster Steilheit.

Beispiel 1. Im Kapitel VI behandelt Saint Venant das Beispiel des elliptischen Cylinders, auf welches man nach obigem Satze folgendermassen gelangt. Man wähle willkürlich als $U$ die Funktion $U = -4Axy$ und bestimme daraus $V = 2A(x^2 - y^2)$, was die bekannten Scharen gleichseitiger Hyperbeln zweiter Ordnung bedeutet (vergl. Fig. 28 meiner Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaft). Einführung von $V$ in Gleichung 2 giebt als Randkurve:

$$\frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2) - 2A(x^2 - y^2) = C,$$

oder

5) $$x^2 \frac{\alpha - 4A}{2C} + y^2 \frac{\alpha + 4A}{2C} = 1,$$

sodass es sich um eine Ellipse mit den Halbaxen

$$a = \sqrt{\frac{2C}{\alpha - 4A}} \quad \text{und} \quad b = \sqrt{\frac{2C}{\alpha + 4A}}$$

handelt. Wird ein so gestalteter elliptischer Cylinder der Torsion unterworfen, so nehmen die ursprünglich ebenen Querschnitte die Gestalt der Fläche

$$z = 2A(x^2 - y^2) = 2Ar^2 \cos 2\vartheta$$

an, wobei von der Konstante $c$, die der Höhenlage des Querschnitts entspricht, abgesehen ist. Nach Saint Venant hat die Konstante $A$ die Bedeutung

$$A = \frac{1}{4} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \alpha,$$

wo $a$ und $b$ die Halbaxen der Ellipse sind und $\alpha$ die oben angegebene Bedeutung hat. Es ist also schliesslich die Flächengleichung:

6) $$z = \frac{1}{4} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \alpha (x^2 - y^2) = \frac{1}{4} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \alpha r^2 \cos 2\vartheta.$$

Die Projektionen der Niveaulinien sind also:

7) $$V = \frac{1}{4} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \alpha (x^2 - y^2) = C,$$

die der Steilungslinien:

8) $$U = -\frac{1}{4} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \alpha xy = C.$$

Nehmen die beiden $C$ Werte an, die der arithmetischen Reihe

$$\cdots, \ -3c, \ -2c, \ -c, \ 0, \ c, \ 2c, \ 3c, \cdots$$

entsprechen, so erhält man die quadratische Einteilung der Ebene.

Die Gleichung 6) stellt ein hyperbolisches Paraboloid dar, welches für $x = \pm y$ die Geraden $z = 0$ enthält, die aufeinander senkrecht stehen. Für $y = 0$ erhält man den parabolischen Hauptschnitt:

$$z = \frac{1}{4}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,\alpha x^2,$$

für $x = 0$ den Schnitt

$$z = -\frac{1}{4}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,\alpha y^2.$$

Quadrantenweise hat die Fläche abwechselnd positive und negative Ordinaten, sodass konvex und konkav aufeinander folgen.

Nun waren die Linien, welche Quadrate gleicher Grösse der isothermischen Einteilung durchlaufen, für den vorliegenden Fall nach § 2 konzentrische Kreise. Von der Grösse der Quadrate aber hängt die Steilheit der Fläche 6) ab, folglich:

Errichtet man auf der Grundebene in den Punkten der um den Nullpunkt geschlagenen Kreise Lote, so geben ihre Durchstosspunkte mit der Fläche 6) auf dieser die Kurven gleicher Steilheit an.

Dies folgt auch aus der bekannten Formel für die Differentiation nach den Normalen der Niveaulinien, die auf

$$9) \qquad \frac{dz}{dn} = \tan\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} = R = c$$

führt, was mit den oben behandelten absoluten Betrage des Differentialquotienten $Z'$ der Funktion $Z = U + Vi$ übereinstimmt.

Das Strahlenbüschel durch den Nullpunkt giebt zu anderen Loten Veranlassung. Diese schneiden die Fläche 6) in Kurven, welche die Stellen miteinander verbinden, wo die Tangenten der Steilungslinien parallele Projektionen haben.

Dabei handelt es sich um die frühere Gleichung:

$$10) \qquad \arctan\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial x}} = \Phi = \gamma.$$

Die oben behandelten Linien gleicher Stromstärke und Stromrichtung geben also für die Saint Venantschen Querschnittsflächen die Linien gleicher Steilheit und gleicher Abweichung der Steilungslinien an, deren Projektionen sich als Isothermenscharen ergeben.

Das am Beispiele erläuterte Resultat gilt eben für alle möglichen Lösungen des Torsionsproblems.

[Den meisten Lesern wird die deutsche Ausgabe des bekannten Handbuchs der theoretischen Physik von Thomson und Tait zugänglicher sein, als die Mémoires. Einen Auszug aus der Saint Venantschen Arbeit findet man dort nebst Figuren von Seite 231 des Bandes I 2 ab. Auf Seite 239 befindet sich jedoch ein Druckfehler. Auf Zeile 3 von unten muss es heissen normalen Ebene statt parallelen Ebene in Bezug auf die Stabaxe.]

Ist $a = b$, so geht die Ellipse in einen Kreis über, für den also Gleichung 6) die Form $z = 0$ annimmt, mit anderen Worten: Bei dem Kreiscylinder bleiben die Querschnitte eben.

Beispiel 2. Geht man willkürlich von den der Gleichung $\Delta^2 U = 0$ gehorchenden und zusammengehörigen Ausdrücken:

$$11) \qquad U = 2r^n A \sin n\vartheta \quad \text{und} \quad V = 2r^n A \cos n\vartheta$$

aus, so erhält man nach obigem als Randkurve für den Cylinder in Polarkoordinaten:

$$12) \qquad \frac{\alpha}{2} r^2 - 2r^n A \cos n\vartheta = c.$$

Setzt man den Exponenten $n$ der Reihe nach gleich 1, 2, 3, 4,..., so erhält man Randkurven 1., 2., 3., 4.,... Grades. In der Wahl der Konstanten findet man bei den höheren Graden eine grosse Mannigfaltigkeit, zu der Saint Venant Beispiele giebt. Über die Fläche

$$z = 2r^n A \cos n\vartheta,$$

die man als hyperbolisches Paraboloid $n^{\text{ter}}$ Ordnung bezeichnen kann, ist Entsprechendes wie vorher zu sagen. Die Zahl der Geraden durch den Nullpunkt ergiebt sich aus $\cos n\vartheta = 0$, eine Gleichung, die durch

$$\vartheta = \frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \ldots$$

erfüllt wird, sodass es sich um $2n$ Strahlen, d. h. um $n$ Gerade handelt. Die Letzteren haben abwechselnd positive und negative Ordinaten. Für $\cos n\vartheta = 1$ erhält man Hauptschnitte $z = 2Ar^n$, was Parabeln $n^{\text{ter}}$ Ordnung giebt. Nach § 2 geben die Lote in den Kreisen und ihren Radien Kurven derselben Eigenschaften auf der Fläche, wie vorher.

Allgemeine Lösung. Die allgemeine Lösung des Torsionsproblems findet man bekanntlich, indem man von einer willkürlichen Funktion komplexen Arguments:

$$13) \qquad Z = U + Vi = f(x + yi)$$

ausgeht und den konjugierten Ausdruck $U - Vi = f_1(x - yi)$ benutzt. Dann ist:

$$14) \qquad U = \frac{f(x+yi) + f_1(x-yi)}{2},$$

$$15) \qquad V = \frac{f(x+yi) - f_1(x-yi)}{2i} = -\frac{i}{2} f(x+yi) + \frac{i}{2} f_1(x-yi),$$

also

$$16) \qquad W = \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2) + \frac{i}{2} f(x+yi) - \frac{i}{2} f_1(x-yi) = C.$$

Dabei giebt 16) die Randkurve an, $z = V$ die gekrümmte Querschnittsfläche. Der absolute Betrag des Differentialquotienten $Z'$, nämlich:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} \tag{17}$$

giebt die Kurven $R = c$ als Projektion der Linien gleicher Steilheit $\alpha$ ($\tan \alpha = R = c$) auf der Fläche; seine Abweichung:

$$\Phi = \arctan \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial x}} \tag{18}$$

giebt, gleich $\gamma$ gesetzt, die Projektion der Linien, welche auf der Fläche durch die Punkte gleicher Abweichung der Steilungslinien gehen.

Damit ist der Zusammenhang der Isothermen $\lg R = c$ und $\Phi = \gamma$ mit dem allgemeinen Torsionsproblem nachgewiesen. Sie geben die Kurven gleicher Steilheit des gekrümmten Querschnitts und die Kurven gleicher Abweichung der Steilungslinien an. Auf die aus den letzten Darlegungen hervorgehende Möglichkeit der konformen Übertragung der Resultate braucht wohl nur hingewiesen zu werden.

## § 7. Verschiedene Arten von Potentialflächen und Niveauflächen.

Es handle sich wieder um stationäre elektrische oder Wärme-Strömung in unbegrenzter Platte, z. B. bei punktförmigen Elektroden positiver und negativer Art, ohne dass dieses gerade zur Bedingung gemacht werden soll.

Trägt man in jedem Punkte den Wert:

$$z = \nu_1 \lg r_1 + \nu_2 \lg r_2 + \cdots + \nu_n \lg r_n \tag{1}$$

als Lot auf, so erhält man durch die Endpunkte die Gleichung der durch 1) dargestellten Fläche. Die rechte Seite genügt der Differentialgleichung $\Delta^2 u = 0$. Der Diagrammkörper wird also durch eine sogenannte Potentialfläche begrenzt. Die Niveaulinien sind Kurven konstanten Potentials.

Errichtet man auf der Grundebene in den durch

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \varkappa = e^c, \quad \text{oder} \quad \lg \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = c \tag{2}$$

gegebenen Kurven Lote, so treffen diese die Potentialfläche in den oben besprochenen Kurven gleicher Steilheit. Die durch

$$\arctan \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \gamma \tag{3}$$

bestimmten Kurven, wo $w$ die Ergänzungsfunktion:

4) $$w = \nu_1 \vartheta_1 + \nu_2 \vartheta_2 + \cdots + \nu_n \vartheta_n$$

zu $z$ ist, geben die Kurven gleicher Abweichung für die Projektionen der Steilungslinien, die durch $w = \gamma$ dargestellt sind.

Nimmt man nun das Vertauschungsproblem, so errichte man überall Lote von der Länge:

5) $$w = \nu_1 \vartheta_1 + \nu_2 \vartheta_2 + \cdots + \nu_n \vartheta_n.$$

Da nun

$$\sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \varkappa = e^c = \tan\alpha$$

ist, so sind jetzt in denselben Punkten, wie vorher, Lote zu errichten, wenn man die Linien gleicher Steilheit haben will. Die Linien gleicher Steilheit $\alpha$ haben also für beide Potentialflächen 1) und 5) identische Projektionen.

Die Steilungslinien sind aber senkrecht gegeneinander gerichtet, was mit der Gleichung:

6) $$\gamma_1 = \arctan\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial x}} = \frac{\pi}{2} + \gamma = \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial x}}$$

harmoniert.

Errichtet man dagegen auf der Stromebene in jedem Punkt den Wert:

$$h = R = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2},$$

so erhält man die Diagrammfläche der gleichen Stromgeschwindigkeiten für beide Probleme.

[Bildet man dazu

$$\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2} = c,$$

so findet man die Linien gleicher Strombeschleunigung für beide Probleme. Ob dem bei den Saint Venantschen Problemen die Linien gleich starker Deformation entsprechen, bedarf noch einer besonderen Untersuchung.]

Ähnlich würde die Errichtung von Loten

$$\Phi = \arctan\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial x}} = \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial x}}$$

für beide Probleme die Diagrammfläche der Abweichungen ergeben.

Es ist jedoch besser, diese mit der Fläche

$$h_1 = \lg R = \lg\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \lg\sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}$$

zu vergleichen, da diese beiden Flächen wieder zusammengehörige Potentialflächen wie die vorigen sind

Die Errichtung von Loten $h_2 = \frac{1}{h} = \frac{1}{R}$ würde das Diagramm der Grössenverhältnisse für beide Probleme ergeben. Ist für irgend welche physikalische Theorie das Errichten von Loten $h_3 = f(R)$ oder $h_4 = f(z)$ nötig, so würden auch die so entsprechenden Diagrammflächen leicht zu untersuchen sein. Ein solcher Fall soll im folgenden Abschnitt behandelt werden.

### § 8. Forchheimer Theorie der Grundwasserbewegung.

Herr Forchheimer hat im 7. Hefte des Jahrgangs 1886 der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover eine Theorie der Grundwasserbewegung gegeben, die auf der Annahme beruht, dass bei stationärer Strömung über horizontaler undurchlässiger Schicht die Geschwindigkeit lediglich proportional sei dem Gefällverhältnis der Oberfläche der Grundwassereinstellung, im übrigen aber unabhängig von der Tiefe an der entsprechenden Stelle.

Durch diese Annahme wird die Frage der Geschwindigkeit von der dritten Dimension befreit, es wird

$$v = -\varkappa \tan \vartheta = -\varkappa \frac{\partial z}{\partial n} = -\varkappa \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

wo $\varkappa$ eine von der Durchlässigkeit des homogenen Erdreichs abhängige Konstante ist, $z$ aber die Höhe des Grundwassers über der undurchlässigen Schicht.

Hat nun ein normal gegen die Stromrichtung liegendes und senkrecht stehendes Rechteck die Breite $b$ und von der undurchlässigen Schicht aus gerechnet die Höhe $z$, so passiert durch das (bis zur Oberfläche des Grundwassers reichende) Rechteck in der Zeiteinheit die Wassermenge

$$Q = \varkappa b z v = -b z \frac{\partial z}{\partial n}.$$

Handelt es sich z. B. um die Parallelströmung in der Richtung der $X$-Axe, so folgt:

$$z\,dz = -\frac{Q}{b\varkappa}\,dx,$$

sodass

$$\frac{z^2}{2} = -\frac{Qx}{b\varkappa} + C,$$

und

$$z^2 = -\frac{2Q}{b\varkappa}\,x + C_1$$

ist. Dies ist die Gleichung einer Parabel, die ihre Axe in der undurchlässigen Schicht hat. Die Integrationskonstante $C_1$ ist gleich Null zu setzen, wenn man den Koordinatenanfang in den Scheitel legt. Dann ist also

$$z^2 = -\frac{2Q}{\varkappa b}\,x.$$

Für negatives $x$ erhält man also die Quadrate der Höhen des Grundwasserstandes über der undurchlässigen Schicht.

4) [illegible] sich z. B. durch einen See einen Damm gelegt, dem (um die [illegible] zu machen) senkrechte Seitenwände gegeben werden, [illegible] und der eine Teil soweit ausgepumpt, bis schliesslich infolge [illegible] Niveauunterschieds die durchsickernde Wassermasse dem Pumpverlust ausgleicht, so ist die Form der Oberfläche des Grundwassers im Querschnitte des Dammes durch diejenige Parabel bestimmt, die durch die beiderseitigen Niveaupunkte geht, und ihre Axe in der durchlässigen Schicht hat.

[Bei der Parallelströmung der Wärme oder Elektrizität würde die Diagrammkurve des Geschwindigkeitspotentials sein

$$z = -\frac{2Q}{b\varkappa}x,$$

was der Differentialgleichung $\Delta^2 z = 0$ genügt. Hier aber handelt es sich um $z = \sqrt{-\frac{2Q}{b\varkappa}x}$, wo die rechte Seite der Differentialgleichung $\Delta^2 z = 0$ nicht genügt.]

Denkt man sich eine kreisförmige Insel im Meere, mit einer horizontalen undurchlässigen Untergrundsschicht und in der Mitte einen bis dorthin reichenden Brunnenschacht mit kontinuierlichen Pumpbetriebe bei konstanter Höhe des Wasserstandes im Brunnen, wobei also die Wasserentnahme genau durch das Nachsickern ersetzt wird, so geht nach obiger Theorie durch jeden konzentrischen Cylinder die Wassermasse

$$Q = 2r\pi z\varkappa \tan\vartheta,$$

durch einem bestimmten dieser Cylinder z. B.:

$$Q_1 = 2r_1\pi z_1\varkappa \tan\vartheta_1,$$

sodass, da des stationären Zustandes halber $Q = Q_1$ ist:

$$\frac{rz}{r_1 z_1} = \frac{\tan\vartheta_1}{\tan\vartheta} = \frac{\tan\vartheta_1}{\left(\frac{dz}{dr}\right)}$$

sein muss. Daraus folgt

$$z\,dz = r_1 z_1 \tan\vartheta_1 \frac{dr}{r},$$

und durch beiderseitige Integration:

$$\frac{z^2}{2} = r_1 z_1 \tan\vartheta_1 \lg r + C,$$

oder auch:

$$z^2 = 2r_1 z_1 \tan\vartheta_1 \lg r + C,$$

wo $C$ eine Integrationskonstante ist.

Bei dieser Schreibweise genügt die rechte Seite der Differentialgleichung $\Delta^2 u = 0$. Sie würde die Potentialfläche der elektrischen Strömung bei einer punktförmigen Elektrode und Einströmung im unendlich fernen Bereiche darstellen, sobald nur links $z$ statt $z^2$ stände. Es handelt sich also hier um eine Niveaufläche:

$$z = \sqrt{2 r_1 z_1 \tan \vartheta_1 \lg r + c},$$

bei der die Höhen die Quadratwurzeln von den Höhen der Potentialfläche sind. Setzt man hier den Wert von $Q$ aus

$$Q_1 = 2 r_1 \pi z_1 \varkappa \tan \vartheta_1$$

ein, so ergiebt sich

$$z^2 = \frac{Q}{\pi \varkappa} \lg r + C,$$

für eine bestimmte Stelle also

$$z_1^2 = \frac{Q}{\pi \varkappa} \lg r_1 + C$$

und durch Subtraktion

$$z^2 - z_1^2 = \frac{Q}{\pi \varkappa} \lg \frac{r}{r_1},$$

wodurch die Integrationskonstante entfernt, bezw. durch $z_1^2$ ersetzt ist.

Ist z. B. $z_2$ die Tiefe der undurchlässigen Schicht unter der Meeresoberfläche, $r_2$ der zugehörige Radius der Insel, ist ferner $z_s$ der Wasserstand des bis zur undurchlässigen Schicht reichenden Schachtes und sein Radius gleich $r_s$, so ist die konstante Wasserentnahme:

$$Q = \frac{\pi \varkappa (z_2^2 - z_s^2)}{\lg r_2 - \lg r_s} = \frac{\pi \varkappa (z_2^2 - z_s^2)}{\lg \frac{r_2}{r_s}}.$$

Zugleich folgt allgemein aus

$$z^2 - z_s^2 = \frac{Q}{\pi \varkappa} (\lg r - \lg r_s)$$

durch Entfernen von $Q$ die rein geometrische Gleichung:

$$\frac{z^2 - z_s^2}{z_2^2 - z_s^2} = \frac{\lg r - \lg r_s}{\lg r_2 - \lg r_s} = \frac{\lg \left(\frac{r}{r_s}\right)}{\lg \left(\frac{r_2}{r_s}\right)}$$

für die den Grundwasserstand an jeder Stelle $r$ darstellende Rotationsfläche.

Ganz allgemein lässt sich nun folgendes schliessen:

Kennt man für irgend eine Elektrizitätsströmung stationärer Art in ebener Platte die Potentialfläche, z. B.:

$$z = \nu_1 \lg r_1 + \nu_2 \lg r_2 + \cdots + \nu_n \lg r_n$$

und bildet man die neue Fläche:

$$z^2 = \nu_1 \lg r_1 + \nu_2 \lg r_2 + \cdots + \nu_2 \lg r_n,$$

indem man statt der Höhen ihre Quadratwurzeln einsetzt, so hat man die Niveaufläche des Grundwassers für das entsprechende Arangement von Brunnenanlagen.

Hier mögen die $\nu$ sämtlich als positiv betrachtet werden, sodass es sich um $n$ Brunnen von verschiedener Ergiebigkeit handelt.

Der Einströmung durch lineare Elektroden würde die Wasserentnahme aus Sickerschlitzen entsprechen, mögen diese nun geradlinig oder krumm sein.

Dem Ausschneiden von Flächenstücken aus der Platte längs der Niveaulinien entspricht die Begrenzung des Grundwasserterrains durch einen See oder Fluss. Bei geradliniger Begrenzung würden die bekannten Spiegelbilder anzuwenden sein, bei mehreren Brunnen auf kreisförmiger Insel die reziproken Spiegelbilder u. s. w.

**Schlussbemerkung.**

Weder über die Saint Venantsche Torsionstheorie, noch über die Forchheimersche Theorie der Grundwasserbewegung, ebensowenig über die der stationären Elektrizitäts- und Wärmeströmung soll hier behauptet werden, dass sie der richtigen Sachlage entsprechen. Sowohl diese Theorien als auch die Helmholtzsche Theorie der Flüssigkeitsbewegungen unter Annahme der Existenz eines Geschwindigkeitspotentials und seine (zweidimensionale) Theorie der freien Ausflussstrahlen sind auf die Voraussetzung gegründet, dass die konforme Abbildung der Resultate von einem Grundfalle auf alle anderen gestattet sei. Diese gemeinschaftliche Grundhypothese könnte also die physikalischen Hypothesen ersetzen. Man kann auch Fragen der Biegungsfestigkeit und der Kapillarität den Forderungen der konformen Abbildung anbequemen, wodurch man allerdings nur angenäherte Resultate erzielen wird. Über den Grad der Annäherung würde dann das Experiment in ähnlicher Weise zu entscheiden haben, wie neuerdings Herr Prof. v. Bach Versuche zur Prüfung der Theorie von Saint Venant angestellt hat, deren Resultat ein befriedigendes für die zu Grunde gelegten Hypothesen sein soll.

Jedenfalls erkennt man an den obigen Darlegungen, dass sich die Methode der konformen Abbildung sehr wohl dazu eignet, in die genannten Theorien vorläufig elementar einzuführen, sogar zu den Elementen der modernen Funktionentheorie hin, dass man leicht Beispiele ausfindig machen kann, die das Verständnis der Theorie erleichtern, dass aber dabei namentlich die Lehre von den Hyperbeln und Lemniskaten höherer Ordnung von ausserordentlichen Nutzen ist. An den vorbereitenden Vortrag kann sich dann der höhere, rein analytische, dessen abstrakter Charakter häufig abschreckend auf den Zuhörer einwirkt, in leichter verständlicher Weise anschliessen. Auf diesen Weg aufmerksam zu machen und zugleich eine Ergänzung zum Kapitel meiner Einführung in die isogonalen Verwandtschaften zu geben, das war die eigentliche Absicht dieser Zeilen.

---

## Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks.

Von

Dr. R. Müller,

Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig.

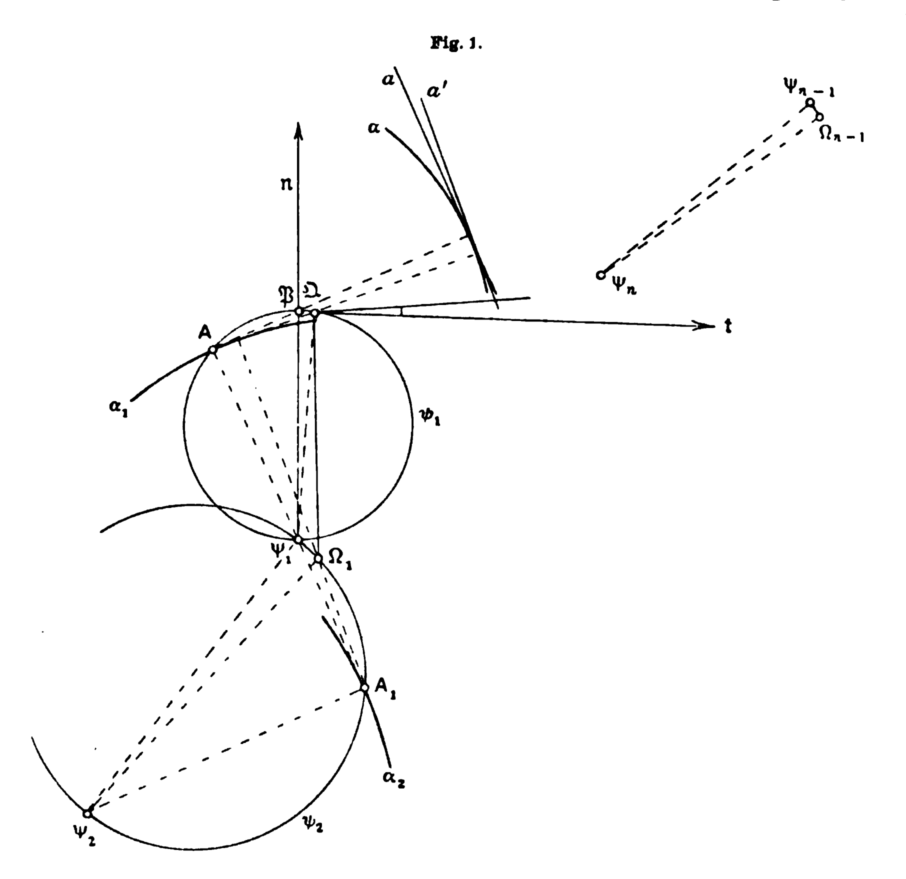
Die vorliegende Mitteilung bildet einen Auszug aus einer grösseren Arbeit mit gleichem Titel in der Festschrift, welche die technische Hochschule zu Braunschweig aus Anlass der diesjährigen Naturforscherversammlung herausgegeben hat. Ausgehend von der Betrachtung gewisser Punktketten, die in Ermangelung einer besseren Benennung als Wende- und Rückkehrpole höherer Ordnung bezeichnet werden, giebt der Aufsatz eine Übersicht über alle singulären Fälle, die bei der Momentanbewegung der Koppelebene eines Gelenkvierecks eintreten können. Wichtig erscheint hierbei vor allem die Untersuchung solcher Koppellagen, bei denen ein Systempunkt eine Bahnkurve mit sechspunktig berührender Tangente beschreibt — eine Frage, die mit dem Problem der angenäherten Geradführung unmittelbar zusammenhängt.

### I. Allgemeine Sätze über die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene.

1. Die Kette der Rückkehrpole. Sind $S$ und $S'$ zwei unendlich benachbarte Lagen eines komplan bewegten starren ebenen Systems, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ die zugehörigen Pole, $a$ und $a'$ die entsprechenden Lagen einer beliebigen Systemgeraden, $\alpha$ ihre Hüllbahnkurve, so schneiden sich die Lote von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ bez. auf $a$ und $a'$ im Krümmungsmittelpunkte $A$ der Kurve $\alpha$ (Fig. 1). Die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $A$ bestimmen den Rückkehrkreis $\psi_1$ der Systemlage $S$; auf diesem erhalten wir als Gegenpunkt zu $\mathfrak{P}$ den Rückkehrpol $\Psi_1$. Bezeichnen wir die unendlich kleine Strecke $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ mit $ds$ und den Winkel der beiden Systemlagen $S$ und $S'$ mit $d\vartheta$, so ist der Durchmesser von $\psi_1$ gleich $\frac{ds}{d\vartheta}$. Wir setzen im folgenden voraus, dass dieser Quotient endlich und von Null verschieden ist.

Verstehen wir unter $\Omega_1$ den Rückkehrpol für die Systemlage $S'$, so treffen sich die Lote von $\Psi_1$ auf $\mathfrak{P}A$ und von $\Omega_1$ auf $\mathfrak{Q}A$ im Krümmungsmittelpunkte $A_1$ der Evolute $\alpha_1$ von $\alpha$, und dann befinden sich die Krümmungsmittelpunkte der Evoluten aller Hüllbahnkurven, die von den Systemgeraden erzeugt werden, momentan auf einem Kreise $\psi_2$, der über der Sehne $\Psi_1\Omega_1$ den Peripheriewinkel $d\vartheta$ fasst; wir nennen ihn den zweiten Rückkehrkreis und den zugehörigen

Fig. 1.




Gegenpunkt $\Psi_2$ von $\Psi_1$ den zweiten Rückkehrpol der Systemlage $S$. — Das Dreieck $\Psi_1\Omega_1\Psi_2$ hat bei $\Omega_1$ einen rechten Winkel, bei $\Psi_2$ den Winkel $d\vartheta$ und ist gleichsinnig ähnlich dem Dreieck $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\Psi_1$.

Die Gerade $A_1\Psi_2$ ist eine Normale der Evolute $\alpha_2$ von $\alpha_1$, oder der zweiten Evolute von $\alpha$. Bestimmen wir für diese wieder den Krümmungsmittelpunkt $A_2$, dann für ihre Evolute $\alpha_3$ den Krümmungsmittelpunkt $A_3$ u. s. f., so gelangen wir schliesslich zu dem Satze: Die Normalen der $n-1^{\text{ten}}$ Evoluten aller Hüllbahnkurven, die von den Systemgeraden erzeugt werden, gehen für jede Systemlage $S$ durch einen bestimmten Punkt $\Psi_{n-1}$, den $n-1^{\text{ten}}$ Rück-

kehrpol der Systemlage. Die Krümmungsmittelpunkte dieser Evoluten sind die Fusspunkte der aus dem $n^{\text{ten}}$ Rückkehrpole $\Psi_n$ auf jene Normalen gefällten Lote; sie erfüllen den $n^{\text{ten}}$ Rückkehrkreis $\psi_n$, der die Strecke $\Psi_{n-1}\Psi_n$ zum Durchmesser hat.

Der Pol $\mathfrak{P}$ und die $n$ ersten Rückkehrpole $\Psi_1 \ldots \Psi_n$ bilden ein Äquivalent für $n+2$ unendlich benachbarte Systemlagen.

2. Formeln für die Koordinaten der Rückkehrpole. Ist $\Omega_{n-1}$ der $n-1^{\text{te}}$ Rückkehrpol der Systemlage $S'$, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\Psi_{n-1}\Omega_{n-1}\Psi_n$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\Psi_1$ die Proportion

$$\Psi_{n-1}\Omega_{n-1} : \Omega_{n-1}\Psi_n = \mathfrak{P}\mathfrak{Q} : \mathfrak{Q}\Psi_1.$$

Wir bezeichnen nun mit $\xi_n$, $\eta_n$ die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes $\Psi_n$ für $\mathfrak{P}$ als Anfangspunkt und die Polbahntangente $\mathfrak{t}$ als $\xi$-Axe; dabei rechnen wir die Gerade $\mathfrak{t}$ positiv in der Richtung von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{Q}$ und nehmen als positive $\eta$-Axe denjenigen Teil der Polbahnnormale $\mathfrak{n}$, der nach einer Drehung um $90^0$ im Sinne der Drehung des Systems mit der positiven Geraden $\mathfrak{t}$ zusammenfällt. Betrachten wir die Strecke $\mathfrak{P}\Psi_n$ als das geometrische Bild der komplexen Grösse $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$ und verstehen unter $d\tau$, $d\tau + d^2\tau$ bez. die Kontingenzwinkel der Polbahn bei $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, so ist

$$\mathfrak{P}\Omega_{n-1} = ds + e^{i(d\tau + d^2\tau)}(\zeta_{n-1} + d\zeta_{n-1}) = \zeta_{n-1} + d\zeta_{n-1} \\ + i\zeta_{n-1}d\tau + ds.$$

Hieraus finden wir sofort $\Psi_{n-1}\Omega_{n-1}$ und $\Omega_{n-1}\Psi_n$, und da

$$\mathfrak{Q}\Psi_1 = -i\frac{ds}{d\vartheta}$$

ist, so ergiebt sich aus der obigen Proportion zur Berechnung von $\zeta_n$ die Rekursionsformel:

$$\text{1)} \qquad \zeta_n d\vartheta = \zeta_{n-1}(d\vartheta + d\tau) - i d\zeta_{n-1} - i ds,$$

oder

$$\text{2)} \qquad \begin{cases} \xi_n d\vartheta = \xi_{n-1}(d\vartheta + d\tau) + d\eta_{n-1} \\ \eta_n d\vartheta = \eta_{n-1}(d\vartheta + d\tau) - d\xi_{n-1} - ds. \end{cases}$$

Für den Punkt $\Psi_1$ ist

$$\text{3)} \qquad \xi_1 = 0, \quad \eta_1 = -\frac{ds}{d\vartheta}.$$

Betrachten wir das Bogenelement $ds$ der Polbahn immer als konstant, so folgt für den Punkt $\Psi_2$:

$$\text{4)} \qquad \xi_2 = \frac{ds}{d\vartheta^3}d^2\vartheta, \quad \eta_2 = -\frac{ds}{d\vartheta^2}(2d\vartheta + d\tau);$$

dabei bedeutet $d^2\vartheta$ den Zuwachs, den der Drehungswinkel $d\vartheta$ erhält, wenn das System aus der Lage $S'$ in die folgende Lage $S''$ übergeht.

Wir finden ferner

$$5)\quad \begin{cases} \xi_3 = \frac{ds}{d\vartheta^4}[3d^2\vartheta(d\vartheta + d\tau) - d\vartheta d^2\tau], \\ \eta_3 = -\frac{ds}{d\vartheta^5}[d\vartheta^2(3d\vartheta^2 + 3d\vartheta d\tau + d\tau^2) - 3d^2\vartheta^2 + d\vartheta d^3\vartheta] \end{cases}$$

u. s. w.

3. Die Kette der Wendepole. Durch Umkehrung der Bewegung folgt unmittelbar aus den Sätzen des Art. 1: Die Normalen der $n-1^{\text{ten}}$ Evoluten aller Systemkurven, welche gerade Linien umhüllen, gehen für jede Systemlage $S$ durch einen bestimmten Punkt — wir nennen ihn den $n-1^{\text{ten}}$ Wendepol $W_{n-1}$ der Systemlage. Die Krümmungsmittelpunkte jener $n-1^{\text{ten}}$ Evoluten sind die Fusspunkte der aus dem $n^{\text{ten}}$ Wendepol $W_n$ auf die zugehörigen Normalen gefällten Lote; sie erfüllen den $n^{\text{ten}}$ Wendekreis $w_n$, der die Strecke $W_{n-1}W_n$ zum Durchmesser hat.

Die umgekehrte Bewegung hat $W_1, W_2 \ldots$ zu Rückkehrpolen; sie besteht in einer Reihe von Drehungen der bisher festen Ebene um die Winkel $-d\vartheta$, $-(d\vartheta + d^2\vartheta)\ldots$ und zwar um diejenigen Punkte der Polkurve, die nacheinander mit den Punkten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}\ldots$ der Polbahn zusammenfallen. Nun hat die Polkurve bei $\mathfrak{P}$ den Kontingenzwinkel $d\vartheta + d\tau$, bezeichnen wir also mit $x_n$, $y_n$ die Koordinaten von $W_n$ in Bezug auf das frühere Koordinatensystem und setzen

$$x_n + iy_n = z_n,$$

so erhalten wir aus Gleichung 1) durch Vertauschung von $\zeta_n$, $d\vartheta$, $d\tau$ bez. mit $z_n$, $-d\vartheta$, $d\vartheta + d\tau$ für $z_n$ die Rekursionsformel:

$$6)\quad z_n d\vartheta = -z_{n-1}d\tau + idz_{n-1} + ids,$$

und die Gleichungen 2) bis 5) verwandeln sich in:

$$7)\quad \begin{cases} x_n d\vartheta = -x_{n-1}d\tau - dy_{n-1} \\ y_n d\vartheta = -y_{n-1}d\tau + dx_{n-1} + ds, \end{cases}$$

$$8)\quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = \frac{ds}{d\vartheta}, \\ x_2 = \frac{ds}{d\vartheta^3}d^2\vartheta, \\ y_2 = \frac{ds}{d\vartheta^2}(d\vartheta - d\tau), \\ x_3 = \frac{ds}{d\vartheta^4}[d^2\vartheta(d\vartheta - 3d\tau) + d\vartheta d^2\tau], \\ y_3 = \frac{ds}{d\vartheta^5}[d\vartheta^2(d\vartheta^2 - d\vartheta d\tau + d\tau^2) - 3d^2\vartheta^2 + d\vartheta d^3\vartheta]. \end{cases}$$

4. Zwischen den Koordinaten der Rückkehr- und der Wendepole besteht die einfache Beziehung:

$$x_n = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (-1)^\lambda \binom{n+1}{\lambda+1} \xi_\lambda, \quad y_n = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (-1)^\lambda \binom{n+1}{\lambda+1} \eta_\lambda.$$

Der Beweis ergiebt sich mittels des Schlusses von $n$ auf $n+1$ unter Benutzung der Gleichungen 1) und 6).

5. Wird die Systembewegung durch Angabe von Polbahn und Polkurve bestimmt und sind

$$\pi = \frac{ds}{d\tau} \quad \text{und} \quad p = \frac{ds}{d\vartheta + d\tau}$$

bez. die Krümmungsradien dieser Kurven im Punkte $\mathfrak{P}$, so gehen die Formeln für die Punkte $\Psi_n$ und $W_n$ über in

$$9) \quad \begin{cases} (\pi - p)\xi_n = \pi\xi_{n-1} + \pi p \dfrac{d\eta_{n-1}}{ds} \\ (\pi - p)\eta_n = \pi\eta_{n-1} - \pi p \dfrac{d\xi_{n-1}}{ds} - \pi p, \end{cases}$$

$$10) \quad \begin{cases} (p - \pi)x_n = p x_{n-1} + p\pi \dfrac{dy_{n-1}}{ds} \\ (p - \pi)y_n = p y_{n-1} - p\pi \dfrac{dx_{n-1}}{ds} - p\pi. \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit $\pi_1, \pi_2 \ldots p_1, p_2 \ldots$ die zugehörigen Krümmungsradien der aufeinander folgenden Evoluten beider Rollkurven, so ist

$$\frac{d\pi}{ds} = -\frac{\pi_1}{\pi}, \quad \frac{d\pi_n}{ds} = (-1)^{n+1} \frac{\pi_{n+1}}{\pi},$$

und analoge Gleichungen gelten für $\frac{dp}{ds}, \frac{dp_n}{ds}$. Dann werden mit Hilfe der Gleichungen 9) und 10) die Koordinaten von $\Psi_n$ und $W_n$ ausgedrückt durch die Krümmungsradien

$$\pi, \pi_1, \pi_2 \ldots p, p_1, p_2 \ldots$$

6. Spezielle Fälle.* I. Liegen von den $n$ ersten Wendepolen $W_1, W_2 \ldots W_n$ alle Punkte mit geradem Index auf einer durch den Pol $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden und alle Punkte mit ungeradem Index auf einer zu dieser senkrechten Geraden, so beschreibt der Schnittpunkt $K$ beider Geraden — der Ballsche Punkt — momentan eine Bahnstelle mit $n+2$ punktig berührender Tangente, und umgekehrt. Denn in $K$ schneiden sich gegenwärtig alle Wendekreise von $w_1$ bis $w_n$; der Punkt $K$ kann also als eine ausgeartete Systemkurve betrachtet werden, welche in $n+2$ aufeinander folgenden Lagen eine feste Gerade berührt.

* Vergl. Mehmke, über die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene, diese Zeitschrift Bd. 35, S. 1 und 65.

II. Aus dem letzten Satze folgt unmittelbar: **Wenn in der Kette der Wendepole von $W_2$ bis $W_n$ alle Punkte von geradem Index mit $\mathfrak{P}$ und alle Punkte von ungeradem Index mit $W_1$ zusammenfallen, so durchschreiten alle Punkte von $w_1$ Bahnstellen mit $n+2$ punktig berührender Tangente, mit Ausnahme des Pols $\mathfrak{P}$ und desjenigen Punktes $K$, der zugleich auf dem ersten von $w_1$ verschiedenen Wendekreise $w_{n+1}$ liegt; die Bahnkurve dieses Punktes hat mit der Geraden $W_1K$ $n+3$ unendlich benachbarte Punkte gemein.** In diesem Falle ist:

$$p = \frac{\pi}{2}, \ \pi_1 = \pi_2 = \cdots \pi_{n-2} = 0,$$

$$p_1 = p_2 = \cdots p_{n-2} = 0,$$

$$p_{n-1} = \frac{\pi_{n-1}}{2^{n+1}},$$

ferner für

$$k = 1 \ldots n, \quad \xi_k = 0, \quad \eta_k = y_1(1-2^k),$$

also

$$\Psi_1\Psi_2 = 2 \cdot \mathfrak{P}\Psi_1 \ldots \Psi_{n-1}\Psi_n = 2 \cdot \Psi_{n-2}\Psi_{n-1}.$$

III. **Ist die Polbahn eine gerade Linie, so sind die Wendepole die dem Punkte $\mathfrak{P}$ entsprechenden Krümmungsmittelpunkte der Polkurve und ihrer Evoluten** (Art. 5). **Ist anderseits in irgend einer Systemlage**

$$\mathfrak{P}W_1 \perp W_1W_2 \perp W_2W_3 \ldots W_{n-2}W_{n-1} \perp W_{n-1}W_n,$$

**so hat die Polbahn im Punkte $\mathfrak{P}$ eine $n+1$ punktig berührende Tangente.**

IV. **Sind die beiden Rollkurven Kreise mit den Radien $\pi$ und $p$,** so folgt aus den Gleichungen 9):

$$\xi_1 = \xi_2 = \cdots = 0, \quad \eta_1 = -\frac{p\pi}{\pi - p},$$

$$\eta_2 = \eta_1 - p\left(\frac{\pi}{\pi - p}\right)^2$$

und allgemein

$$\eta_n = \eta_{n-1} - p\left(\frac{\pi}{\pi - p}\right)^n,$$

und analoge Formeln gelten für die Koordinaten von $W_1 W_2 \ldots$ Daraus ergiebt sich eine einfache Konstruktion der Punkte $\Psi_i$ und $W_i$.

V. **Sind beide Rollkurven symmetrisch in Bezug auf die Polbahnnormale $\mathfrak{n}$, so liegen die sämtlichen Wende- und Rückkehrpole auf dieser Geraden.** Denn konstruieren wir zu zwei Systemgeraden $a$ und $b$, die in Bezug auf $\mathfrak{n}$ symmetrisch liegen, die Krümmungsmittelpunkte $\mathsf{A}, \mathsf{A}_1 \ldots \mathsf{B}, \mathsf{B}_1 \ldots$ der zugehörigen Hüllbahnkurven und ihrer Evoluten, so sind die entstehenden Punktketten symmetrisch in Bezug auf $\mathfrak{n}$ und es schneiden sich $\mathsf{A}_{n-1}\mathsf{A}_n$ und $\mathsf{B}_{n-1}\mathsf{B}_n$ in $\Psi_n$

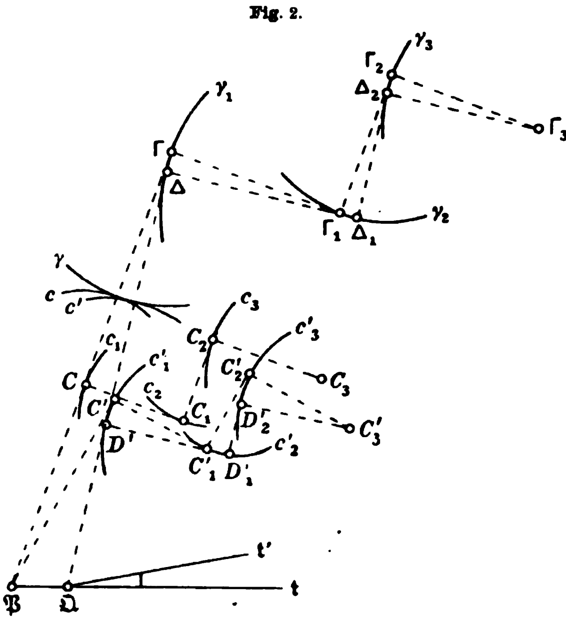
7. Die Krümmungradien der Evoluten einer Hüllbahnkurve. Wir betrachten in der Systemlage $S$ eine beliebige Systemkurve $c$ mit den Evoluten $c_1, c_2 \dots$ und bezeichnen mit $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \dots$ die zugehörige Hüllbahnkurve und deren Evoluten, mit $C$ und $\Gamma$ die Krümmungsmittelpunkte von $c$ und $\gamma$ auf der durch $\mathfrak{P}$ gehenden Normale beider Kurven, mit $C_1, C_2 \dots \Gamma_1, \Gamma_2 \dots$ die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte von $c_1, c_2 \dots \gamma_1, \gamma_2 \dots$ (Fig. 2). In der unendlich benachbarten Systemlage $S'$ kommen die Kurven $c, c_1, c_2 \dots$ nach $c', c'_1, c'_2 \dots$; dann bestimmt die Tangente aus dem Pole $\mathfrak{Q}$ an $c'_1$ den Berührungspunkt von $c'$ und $\gamma$ und diesem entsprechen auf

$$c'_1, c'_2 \dots \gamma_1, \gamma_2 \dots$$

bez. die Krümmungsmittelpunkte

$$D', D'_1 \dots \Delta, \Delta_1 \dots$$

Fig. 2.




Setzen wir

$$\angle C\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \varphi,$$
$$\mathfrak{P}C = r,$$
$$CC_1 = r_1,$$
$$C_1C_2 = r_2 \;.. \;\mathfrak{P}\Gamma = \varrho,$$
$$\Gamma\Gamma_1 = \varrho_1 \dots,$$

so bildet $\mathfrak{Q}D'$ mit der Tangente $t'$ der Polbahn in $\mathfrak{Q}$ den Winkel $\varphi + d\varphi$, und es ist

$$\mathfrak{Q}D' = r + dr, \quad D'D'_1 = r_1 + dr_1 \dots \mathfrak{Q}\Delta = \varrho + d\varrho,$$
$$\Delta\Delta_1 = \varrho_1 + d\varrho_1 \dots$$

Dabei verstehen wir unter $\varphi$ denjenigen zwischen 0° und 180° liegenden Winkel, um welchen $\mathfrak{P}C$ im Sinne der Drehung des Systems gedreht werden muss, um mit der positiven Polbahntangente t zusammenzufallen, und wir rechnen $r, r_1 \dots \varrho, \varrho_1 \dots$ positiv, wenn nach dieser Drehung bez. die Strecken $\mathfrak{P}C, CC_1 \dots \mathfrak{P}\Gamma, \Gamma\Gamma_1 \dots$ zur positiven Polbahntangente oder zur negativen Polbahnnormale parallel sind.

Bezeichnen wir die Winkel $\mathfrak{Q}\Gamma\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}C'\mathfrak{P}$ bez. mit $d\mu$ und $d\nu$, so folgt aus dem Dreieck $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}C'$:

$$d\nu = \frac{ds}{r}\sin\varphi,$$

und da $\angle C\mathfrak{P}C' = d\vartheta$ ist, so wird

$$d\mu = d\nu - d\vartheta = \frac{ds\sin\varphi - r\,d\vartheta}{r}.$$

Dann ergiebt sich unmittelbar aus der Figur:

$$11)\qquad \varrho = \frac{ds}{d\mu}\sin\varphi = \frac{r\,ds\sin\varphi}{ds\sin\varphi - r\,d\vartheta},$$

$$12)\qquad \varrho_1 = \frac{\Gamma\Delta}{d\mu} = -\frac{d\varrho + ds\cos\varphi}{d\mu} = -\frac{r(d\varrho + ds\cos\varphi)}{ds\sin\varphi - r\,d\vartheta},$$

$$\varrho_2 = \frac{\Gamma_1\Delta_1}{d\mu} = \frac{d\varrho_1}{d\mu}$$

und es gilt allgemein für $n = 2, 3\ldots$ zur Berechnung von $\varrho_n$ die Rekursionsformel:

$$13)\qquad \varrho_n = (-1)^n\frac{d\varrho_{n-1}}{d\mu} = (-1)^n\frac{r\,d\varrho_{n-1}}{ds\sin\varphi - r\,d\vartheta}.$$

Die Ausdrücke für $d\varrho$, $d\varrho_1\ldots$ enthalten noch die Differentiale von $r$ und $\varphi$. Nun folgt aus dem Dreieck $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}C'$:

$$dv + \varphi - d\vartheta = \varphi + d\varphi + d\tau + d^2\tau,$$

also

$$d\varphi = dv - (d\vartheta + d\tau) = \frac{ds}{r}\sin\varphi - (d\vartheta + d\tau),$$

und es ist ferner

$$r_1 dv = C'\,D' = -dr - ds\cos\varphi,$$

$$r_2 dv = C'_1 D'_1 = dr_1$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

folglich

$$dr = -ds\cos\varphi - \frac{r_1}{r}ds\sin\varphi$$

und allgemein für $n = 1, 2\ldots$

$$dr_n = (-1)^{n+1}\frac{r_{n+1}}{r}ds\sin\varphi.$$

Für den Fall, dass die Systembewegung durch den Pol $\mathfrak{P}$ und die Kette der Rückkehrpole $\Psi_1\Psi_2\ldots$ bestimmt ist, finden wir aus den Gleichungen des Art. 2:

$$d\vartheta = \frac{d\eta_1}{\xi_2},\quad ds = -\frac{\eta_1}{\xi_2}d\eta_1,\quad d\vartheta + d\tau = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1\xi_2}d\eta_1,$$

und dann gehen die Gleichungen 11) bis 13) über in

$$11')\qquad \varrho = \frac{\eta_1 r\sin\varphi}{r + \eta_1\sin\varphi},$$

$$12')\qquad \varrho_1 = \frac{r}{r + \eta_1\sin\varphi}\left(\xi_2\frac{d\varrho}{d\eta_1} - \eta_1\cos\varphi\right),$$

$$13')\qquad \varrho_n = (-1)^{n-1}\frac{\xi_2 r}{r + \eta_1\sin\varphi}\cdot\frac{d\varrho_{n-1}}{d\eta_1}.\qquad (n = 2, 3\ldots)$$

Hierbei ist:

$$\frac{d\varphi}{d\eta_1} = \frac{1}{\xi_2}\left(1 - \frac{\eta_2}{\eta_1} - \frac{\eta_1}{r}\sin\varphi\right),$$

$$\frac{dr}{d\eta_1} = \frac{\eta_1}{\xi_2}\left(\frac{r_1}{r}\sin\varphi + \cos\varphi\right),$$

$$\frac{dr_n}{d\eta_1} = (-1)^n\frac{\eta_1 r_{n+1}}{\xi_2 r}\sin\varphi\qquad (n = 1, 2\ldots)$$

und nach 2):

$$\frac{d\xi_n}{d\eta_1} = \frac{1}{\xi_2}\left(\eta_1 - \eta_{n+1} + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1}\eta_n\right),$$

$$\frac{d\eta_n}{d\eta_1} + \frac{1}{\xi_2}\left(\xi_{n+1} - \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1}\xi_n\right).$$

Die Gleichungen 11′) bis 13′) dienen umgekehrt auch zur Bestimmung der Rückkehrpole, wenn von zwei beliebigen Systemkurven die Hüllbahnkurven bekannt sind.

8. Die Punkte stationärer Krümmung. Tritt an die Stelle der Kurve $c$ ein einziger Systempunkt $C$, so bestimmen die Gleichungen 11′) bis 13′) die Krümmungsradien der zugehörigen Bahnkurve $\gamma$ und ihrer Evoluten, wenn $r_1 = r_2 = \cdots = 0$ gesetzt wird. Beschreibt nun der Punkt $C$ momentan eine Bahnstelle mit vierpunktig berührendem Krümmungskreise, so hat der Krümmungsradius $r - \varrho$ in den Systemlagen $S$ und $S'$ denselben Wert, d. h. es ist

$$\frac{d(r-\varrho)}{d\eta_1} = 0.$$

Setzen wir hier für $\varrho$ den Wert aus Gleichung 11′) und für $\frac{d\varphi}{d\eta_1}$ und $\frac{dr}{d\eta_1}$ die vorhin gefundenen Ausdrücke, so erhalten wir

$$14)\qquad r(\eta_2\cos\varphi - \xi_2\sin\varphi) + 3\eta_1^2\cos\varphi\sin\varphi = 0$$

als Gleichung der Kreispunktkurve der Systemlage $S$, d. h. des Ortes aller Systempunkte, die momentan Bahnstellen mit stationärem Krümmungskreise durchlaufen.

Die Kurve $\gamma$ hat mit ihrem Krümmungskreise in $C$ nicht nur vier, sondern fünf unendlich benachbarte Punkte gemein, wenn auch der Differentialquotient der linken Seite von Gleichung 14) verschwindet; dies führt zu der Bedingung:

$$15)\quad \begin{cases} r^2[\xi_3\cos\varphi + (\eta_3 - \eta_1)\sin\varphi] \\ \qquad + r\eta_1[3\eta_1\cos^2\varphi + 4\xi_2\cos\varphi\sin\varphi + (4\eta_2 - 3\eta_1)\sin^2\varphi] \\ \qquad + 3\eta_1^3\sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen 14) und 15) bestimmen im allgemeinen vier Punkte $(r, \varphi)$, die wir als die Burmesterschen Punkte der Systemlage $S$ bezeichnet haben.*

Soll endlich der Punkt $C$ in sechs unendlich benachbarten Lagen auf einem Kreise bleiben, so erhalten wir aus 15) durch Differentiation nach $\eta_1$ die neue Bedingung:

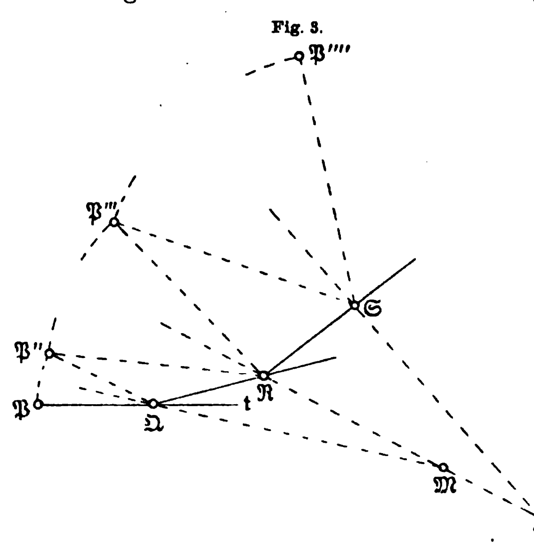
$$16)\quad \begin{cases} r^2(\xi_4\sin\varphi - \eta_4\cos\varphi) + r\eta_1 \\ [(2\xi_3 + 10\xi_2)\cos^2\varphi - (3\eta_3 - 16\eta_2 + 12\eta_1)\cos\varphi\sin\varphi + (5\xi_3 - 6\xi_2)\sin^2\varphi] \\ \qquad + \eta_1^2[(-2\eta_2 + 6\eta_1)\cos^3\varphi + 20\xi_2\cos^2\varphi\sin\varphi \\ \qquad + (6\eta_2 + 12\eta_1)\cos\varphi\sin^2\varphi + 12\xi_2\sin^3\varphi] = 0. \end{cases}$$

* Über die Bewegung eines starren ebenen Systems durch fünf unendlich benachbarte Lagen, diese Zeitschrift Bd. 37, S. 145; sowie Konstruktion der Burmesterschen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck, daselbst erste Mitteilung Bd. 37, S. 213, zweite Mitteilung Bd. 38, S. 129.

Die Gleichungen 11′), 14), 15), 16) dienen zur Bestimmung von $\Psi_1 \ldots \Psi_4$, wenn wir vorschreiben, dass zwei Systempunkte $C$ und $D$ sich in sechs unendlich benachbarten Lagen auf zwei gegebenen Kreisen bewegen sollen. — Die entsprechenden Gleichungen für die Wendepole ergeben sich aus den vorigen durch Vertauschung von $r$, $\eta_i$, $\xi_i$ bez mit $\varrho$, $y_i$, $x_i$.

9. Der Pol als Systempunkt. Die in Art. 7 abgeleiteten Formeln gelten nicht für die Bahnkurve $\mathfrak{p}$ desjenigen Systempunkts, der in der Systemlage $S$ mit dem Pole $\mathfrak{P}$ zusammenfällt. Dieser bleibt beim Übergang von $S$ in $S'$ fest und gelangt in den folgenden Systemlagen durch Drehungen um die Pole $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ ... bez. nach $\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{P}'''$, $\mathfrak{P}''''$ ...; der dem Punkte $\mathfrak{P}$ entsprechende Krümmungsmittelpunkt von $\mathfrak{p}$ ist also der Schnittpunkt $\mathfrak{M}$ der Halbierungslinien der Winkel $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{P}''$ und $\mathfrak{P}''\mathfrak{R}\mathfrak{P}'''$ (Fig. 3).

Fig. 3.




Nun ist der Kontigenzwinkel der Polbahn bei $\mathfrak{Q}$ gleich $d\tau + d^2\tau$ und

$$\angle \mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{P}'' = d\vartheta + d^2\vartheta, \quad \angle \mathfrak{P}''\mathfrak{R}\mathfrak{P}''' = d\vartheta + 2d^2\vartheta + d^3\vartheta,$$

mithin ergiebt sich aus dem Dreieck $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{R}\mathfrak{M} = ds\,\frac{d\vartheta + 2d\tau + d^2\vartheta + 2d^2\tau}{d\vartheta - d\tau + 2d^2\vartheta - d^2\tau}.$$

Hieraus folgt: Der mit dem Pole $\mathfrak{P}$ zusammenfallende Systempunkt beschreibt im allgemeinen eine Spitze vom Krümmungsradius Null. Ist jedoch $d\vartheta = d\tau$, so hat die Kurve $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{P}$ eine Schnabelspitze mit dem endlichen Krümmungsradius:

$$\mathfrak{r} = \frac{3\,ds\,d\vartheta}{2d^2\vartheta - d^2\tau}.$$

In diesem Falle wird zufolge den Gleichungen 8):

$$y_2 = 0, \quad x_3 = \frac{ds}{d\vartheta^3}(d^2\tau - 2d^2\vartheta);$$

die vorige Gleichung geht demnach über in:

$$17) \qquad \mathfrak{r} = -3\,\frac{y_1^2}{x_3}.$$

Der Punkt $\mathfrak{P}$ beschreibt also im allgemeinen eine Schnabelspitze von endlicher Krümmung, wenn der zweite Wendepol auf der Polbahntangente liegt. Befindet sich gleichzeitig der dritte Wendepol auf der Polbahnnormale, so wird der Krümmungsradius $\mathfrak{r}$ unendlich gross.

Bezeichnen wir noch mit $\mathfrak{N}$ den Schnittpunkt von $\mathfrak{N}\mathfrak{M}$ und der Halbierungslinie des Winkels $\mathfrak{P}'''\mathfrak{S}\mathfrak{P}''''$, so erhalten wir für den zugehörigen Krümmungsradius $\mathfrak{r}_1$ der Evolute $\mathfrak{p}_1$ von $\mathfrak{p}$:

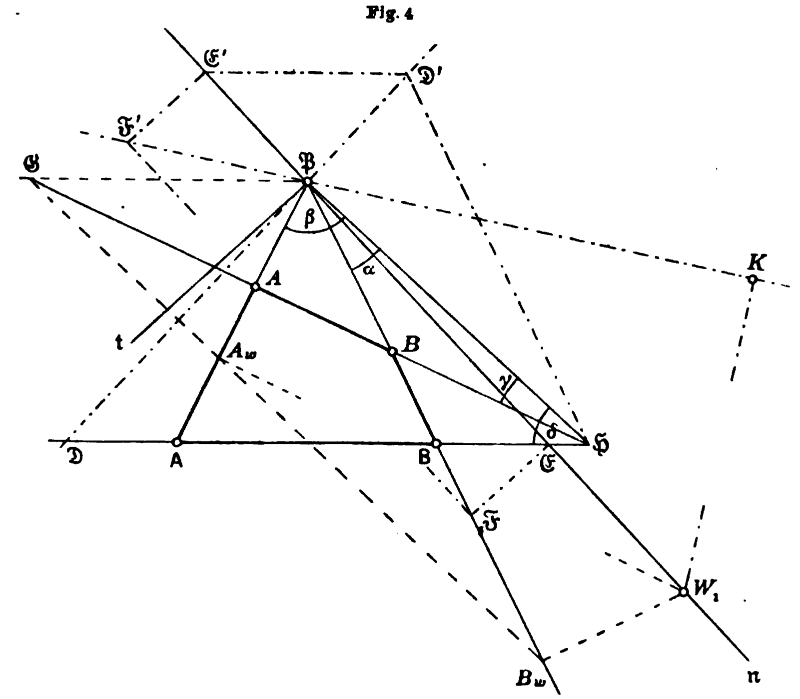
$$18)\qquad \mathfrak{r}_1 = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{N}}{\angle \mathfrak{Q}\mathfrak{M}\mathfrak{N}} = \frac{4\,ds\,d\vartheta}{(d\vartheta - d\tau)^2} = 4\frac{y_1^3}{y_2^2}.$$

Beschreibt demnach der Punkt $\mathfrak{P}$ eine Spitze vom Krümmungsradius Null, so hat die Kurve $\mathfrak{p}_1$ in $\mathfrak{P}$ einen gewöhnlichen Punkt vom Krümmungsradius $\mathfrak{r}_1$. Besitzt dagegen die Kurve $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{P}$ eine Schnabelspitze mit endlichem Krümmungsradius $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{M}$ ein Wendepunkt der Evolute $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{r}_1 = \infty$.

### II. Anwendungen auf das Gelenkviereck.

10. Die Wendepole $W_1$, $W_2$ und der Ballsche Punkt $K$ für eine beliebige Koppellage. In Figur 4 ist AB$BA$ ein Gelenk-

Fig. 4




viereck mit dem festen Gliede AB und der Koppel $AB$. Bekanntlich entspricht jeder Koppellage, für welche der Pol nicht unendlich fern ist, ein endlicher Wendekreis $w_1$; jede solche Systemlage $S$ genügt

also der früher gemachten Voraussetzung, dass der Quotient $\frac{ds}{d\vartheta}$ endlich und von Null verschieden sei. Bestimmen wir dann die zugehörigen Wendepole $W_1$, $W_2 \ldots$, so können wir leicht die Bedingungen angeben, denen die betrachtete Systemlage genügen muss, wenn bezüglich der Momentanbewegung der Koppelebene einer der in Art. 6 behandelten Sonderfälle eintreten soll. Die erhaltenen Resultate können schliesslich durch einen einfachen Grenzübergang auch auf den Fall ausgedehnt werden, wo der Pol unendlich fern liegt.

Die Geraden $\mathsf{A}A$ und $\mathsf{B}B$ schneiden sich im Pole $\mathfrak{P}$ der gezeichneten Koppellage. Um den ersten Wendepol $W_1$ zu ermitteln, bestimmen wir den Schnittpunkt $\mathfrak{H}$ von $AB$ und $\mathsf{AB}$, ziehen $\mathfrak{P}\mathfrak{S}$ parallel zu $\mathsf{AB}$ bis $AB$ und durch $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ eine Parallele, die $\mathsf{A}A$ und $\mathsf{B}B$ bez. in $A_w$, $B_w$ schneidet. Die in $A_w$, $B_w$ bez. zu $\mathsf{A}A$, $\mathsf{B}B$ errichteten Lote treffen sich in $W_1$.

Setzen wir:

$$\mathfrak{P}\mathfrak{H} = h, \quad \angle \mathfrak{H}\mathfrak{P}B = \alpha, \quad \angle \mathfrak{H}\mathfrak{P}A = \beta, \quad \angle A\mathfrak{H}\mathfrak{P} = \gamma, \quad \angle \mathsf{A}\mathfrak{H}\mathfrak{P} = \delta,$$

so folgt aus der Figur:

$$\text{19)} \qquad \mathfrak{P}W_1 = y_1 = h\frac{\sin\gamma\sin\delta}{\sin\alpha\sin\beta\sin(\delta-\gamma)}.$$

Nach den in Art. 2 getroffenen Festsetzungen geht durch $W_1$ die positive Polbahnnormale $\mathfrak{n}$. Nehmen wir an, die Koppelebene drehe sich momentan um $\mathfrak{P}$ im Sinne des Uhrzeigers, so haben wir unter positiver Polbahntangente denjenigen durch $\mathfrak{P}$ gehenden Strahl $\mathfrak{t}$ zu verstehen, für welchen $\angle \mathfrak{n}\mathfrak{P}\mathfrak{t}$, im angegebenen Sinne gelesen, gleich $90^0$ ist. Dann ist für den Punkt $A$ der früher mit $\varphi$ bezeichnete Winkel $A\mathfrak{P}\mathfrak{t} = \alpha$, für $B$ $\angle B\mathfrak{P}\mathfrak{t} = \beta$; setzen wir daher:

$$\mathfrak{P}A = r, \quad \mathfrak{P}B = r', \quad \mathfrak{P}\mathsf{A} = \varrho, \quad \mathfrak{P}\mathsf{B} = \varrho'$$

und vertauschen in Gleichung 14) die Bezeichnungen $\eta_1$, $\xi_2$, $\eta_2$ bez. mit $y_1$, $x_2$, $y_2$, sowie $r$ und $\varphi$ einerseits mit $\varrho$ und $\alpha$, anderseits mit $\varrho'$ und $\beta$, so erhalten wir für die Koordinaten des zweiten Wendepols $W_2$ die Gleichungen:

$$\text{20)} \qquad \begin{cases} \varrho(x_2\sin\alpha - y_2\cos\alpha) = 3y_1{}^2\sin\alpha\cos\alpha, \\ \varrho(x_2\sin\beta - y_2\cos\beta) = 3y_1{}^2\sin\beta\cos\beta. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\varrho\varrho' y_2\sin(\alpha-\beta) = -3y_1{}^2\sin\alpha\sin\beta(\varrho\cos\beta - \varrho'\cos\alpha),$$

$$\varrho\varrho' x_2\sin(\alpha-\beta) = -3y_1{}^2\cos\alpha\cos\beta(\varrho\sin\beta - \varrho'\sin\alpha).$$

Nun ist aber

$$\varrho = h\frac{\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}, \quad \varrho' = h\frac{\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)};$$

setzen wir also zur Abkürzung:

$$\frac{h \sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)\sin(\beta+\delta)} = m,$$

so wird:

$$\varrho\varrho' = mh\sin\delta,$$

$$\varrho\cos\beta - \varrho'\cos\alpha = m\sin(\alpha-\beta)\cos\delta,$$

$$\varrho\sin\beta - \varrho'\sin\alpha = -m\sin(\alpha-\beta)\sin\delta,$$

und die Gleichungen für $y_2$ und $x_2$ gehen über in:

$$21)\quad \begin{cases} y_2 = -\dfrac{3y_1\sin\gamma\cos\delta}{\sin(\delta-\gamma)} \\ x_2 = \dfrac{3y_1\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma\sin\delta}{\sin\alpha\sin\beta\sin(\delta-\gamma)}. \end{cases}$$

Der Ballsche Punkt $K$ der betrachteten Systemlage ist der Schnittpunkt des Wendekreises $w_1$ mit der Geraden $\mathfrak{P}W_2$; bezeichnen wir daher mit $\chi$ den Winkel $K\mathfrak{P}\mathfrak{t}$, so ist:

$$22)\quad \tan\chi = \frac{y_2}{x_2} = -\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\delta}.$$

Dies führt zu folgender Konstruktion des Punktes $K$: Wir errichten in $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ ein Lot, welches die Gerade $\mathsf{AB}$ in $\mathfrak{D}$, die Parallele durch $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{P}\mathsf{B}$ in $\mathfrak{D}'$ schneidet, legen durch $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ in beliebiger Richtung zwei Parallelen und bestimmen deren Schnittpunkte $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ mit $\mathfrak{n}$ (in Fig. 4 fällt $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ zusammen mit $\mathsf{AB}$). Ziehen wir dann $\mathfrak{E}\mathfrak{F} \parallel \mathfrak{t}$ bis $\mathfrak{P}\mathsf{B}$, $\mathfrak{F}\mathfrak{F}' \parallel \mathfrak{n}$ und $\mathfrak{E}'\mathfrak{F}' \parallel \mathfrak{t}$, so ist $K$ der Fusspunkt des Lotes von $W_1$ auf $\mathfrak{P}\mathfrak{F}'$.

11. Der Punkt $K$ beschreibt momentan eine Bahnstelle mit fünfpunktig berührender Tangente, wenn die Gerade $W_1W_3$ auf $\mathfrak{P}W_2$ senkrecht steht, d. h. wenn

$$23)\quad y_2(y_3-y_1) + x_2x_3 = 0$$

ist. Setzen wir nun zur Abkürzung:

$$y_1\varrho[3y_1(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) + 4x_2\cos\alpha\sin\alpha + 4y_2\sin^2\alpha] + 3y_1{}^3\sin\alpha = -\mathfrak{T}$$

und verstehen unter $\mathfrak{T}'$ den Ausdruck, in welchen $\mathfrak{T}$ sich verwandelt, wenn wir $\varrho$ und $\alpha$ bez. mit $\varrho'$ und $\beta$ vertauschen, so erhalten wir aus 15) für die Koordinaten des Punktes $W_3$ die Gleichungen:

$$24)\quad \begin{cases} \varrho^2\,[x_3\cos\alpha + (y_3-y_1)\sin\alpha] = \mathfrak{T}, \\ \varrho'^2[x_3\cos\beta + (y_3-y_1)\sin\beta] = \mathfrak{T}'; \end{cases}$$

hieraus folgt:

$$24')\quad \begin{cases} \varrho^2\varrho'^2x_3\sin(\alpha-\beta) = -\mathfrak{T}\varrho'^2\sin\beta + \mathfrak{T}'\varrho^2\sin\alpha, \\ \varrho^2\varrho'^2(y_3-y_1)\sin(\alpha-\beta) = \mathfrak{T}\varrho'^2\cos\beta - \mathfrak{T}'\varrho^2\cos\alpha. \end{cases}$$

Demnach geht Gleichung 23) über in:

$$\mathfrak{T}\varrho'^2(y_2\cos\beta - x_2\sin\beta) - \mathfrak{T}'\varrho^2(y_2\cos\alpha - x_2\sin\alpha) = 0,$$

oder nach 20):

$$\mathfrak{T}\varrho' \sin\beta\cos\beta - \mathfrak{T}'\varrho\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

oder ausführlich geschrieben:

$$\varrho\varrho'\sin(\alpha-\beta)[3y_1\cos(\alpha-\beta) - 4y_2\sin\alpha\sin\beta] + 3y_1^2\sin\alpha\sin\beta(\varrho\cos\alpha - \varrho'\cos\beta) = 0.$$

Hierbei ist:

$$\varrho\cos\alpha - \varrho'\cos\beta = m\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta+\delta).$$

Setzen wir überdies für $\varrho\varrho'$, $y_1$, $y_2$ die früher gefundenen Werte, so ergiebt sich:

$$25)\qquad \cos(\alpha-\beta)\sin(\gamma+\delta) - \sin\gamma\cos(\alpha+\beta-\delta) = 0,$$

oder

$$25')\qquad 2\cot\delta = \cot\alpha + \cot\beta - \cot\gamma(1+\cot\alpha\cot\beta)$$

als Bedingung dafür, dass in der betrachteten Lage der Koppelebene ein gewisser Punkt $K$ eine Bahnstelle mit fünfpunktig berührender Tangente durchläuft. — Die Gerade $W_1K$ hat für die Bahnkurve $\varkappa$ des Punktes $K$ den Charakter einer Inflexionstangente, die sich so innig an die Kurve anschmiegt, dass auch innerhalb endlicher Grenzen der Punkt $K$ sich auf dieser Geraden zu bewegen scheint; wir sagen deshalb, das Gelenkviereck $\mathsf{AB}BA$ bewirkt eine fünfpunktige Geradführung des Punktes $K$ auf der Geraden $W_1K$. In der unmittelbaren Umgebung von $K$ befinden sich unendlich viele Systempunkte, deren Bahnkurven drei dicht aufeinander folgende Wendepunkte haben und darum gleichfalls eine auffällig gestreckte Gestalt besitzen.*

Fügen wir der Gleichung 25) noch die Bedingung hinzu, dass die vier Seiten des Vierecks $\mathsf{AB}BA$ von gegebener Länge sein sollen, so erhalten wir fünf Gleichungen zur Bestimmung der fünf Unbekannten $h$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. Bei jedem Gelenkviereck giebt es daher Koppellagen, in denen dasselbe eine fünfpunktige Geradführung bewirkt.

12. Sechspunktige Geradführung. Nach Art. 6 I hat die Kurve $\varkappa$ mit der Geraden $W_1K$ sechs unendlich benachbarte Punkte gemein, wenn $W_1W_3$ auf $\mathfrak{P}W_2$ senkrecht steht, und wenn überdies der Punkt $W_4$ auf $\mathfrak{P}W_2$ liegt, d.h. wenn neben der Gleichung 25) noch der Bedingung genügt wird:

$$x_2y_4 - x_4y_2 = 0.$$

Bestimmen wir $x_4$ und $y_4$ mit Hilfe der Gleichung 16), so geht nach einfacher Rechnung, die der im vorigen Artikel ausgeführten ganz analog ist, die letzte Gleichung über in:

* Konstruktion der Burmesterschen Punkte u.s.w., zweite Mitteilung. Vergl. auch L. Allievi, cinematica della biella piana, Napoli 1895. Daselbst wird die Aufgabe der fünfpunktigen Geradführung unter Beschränkung auf solche Koppellagen behandelt, für welche die Kreispunktkurve in irgend einer Weise ausartet.

$$(12\cot\alpha\cot\beta - 5)[2\cot\delta - (\cot\alpha + \cot\beta) + \cot\gamma(1 + \cot\alpha\cot\beta)]$$
$$+ 5[(1 - \cot\alpha\cot\beta)(\cot\gamma + \cot\delta) - (\cot\alpha + \cot\beta)$$
$$(1 - \cot\gamma\cot\delta)] = 0.$$

Hier verschwindet nach 25') das erste Glied, und wir erhalten

$$\sin(\gamma + \delta - \alpha - \beta) = 0,$$

d. h.:

26) $$\gamma + \delta = \alpha + \beta.$$

Dann verwandelt sich 25) in

27) $$\sin 2\gamma = \sin 2\alpha + \sin 2\beta.$$

Die Gleichungen 26) und 27) bilden die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass in der betrachteten Systemlage der Ballsche Punkt eine Bahnstelle mit sechspunktig berührender Tangente beschreibt. Es giebt demnach $\infty^3$ Gelenkvierecke, die eine sechspunktige Geradführung bewirken. — Da jeder Punkt der Koppelebene eine Kurve sechster Ordnung erzeugt, so ist die soeben ermittelte Geradführung von rein theoretischem Standpunkte aus die vollkommenste, die überhaupt mit Hilfe eines Gelenkvierecks erreicht werden kann.

13. Der geradgeführte Punkt $K$ liegt auf der Koppelgeraden. Aus der in Art. 10 abgeleiteten Konstruktion des Ballschen Punktes $K$ ergiebt sich leicht, dass der Punkt $K$ auf die Gerade $AB$ fällt, sobald die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ der Gleichung genügen:

28) $$\cot\delta = \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma,$$

und dann geht Gleichung 22) über in

29) $$\chi = 90^0 + \gamma.$$

Fordern wir ausserdem, dass der Punkt $K$ momentan eine Bahnstelle mit sechspunktig berührender Tangente beschreibt, so gelten für die Koppellage $AB$ gleichzeitig die Bedingungen 26), 27) und 28); aus diesen folgt:

30) $$\beta = 60^0 + \alpha, \quad \gamma = 60^0 - \alpha, \quad \delta = 3\alpha.$$

Es giebt daher $\infty^2$ Gelenkvierecke, welche die sechspunktige Geradführung eines auf der Koppelgeraden liegenden Punktes bewirken.

In Figur 5 ist ein Gelenkviereck dargestellt, bei welchem die Strecke $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ und der Winkel $\alpha$ beliebig gewählt sind und die Winkel $\beta$, $\gamma$, $\delta$ den letzten Gleichungen genügen. Für den zugehörigen Punkt $K$ ist nach 29):

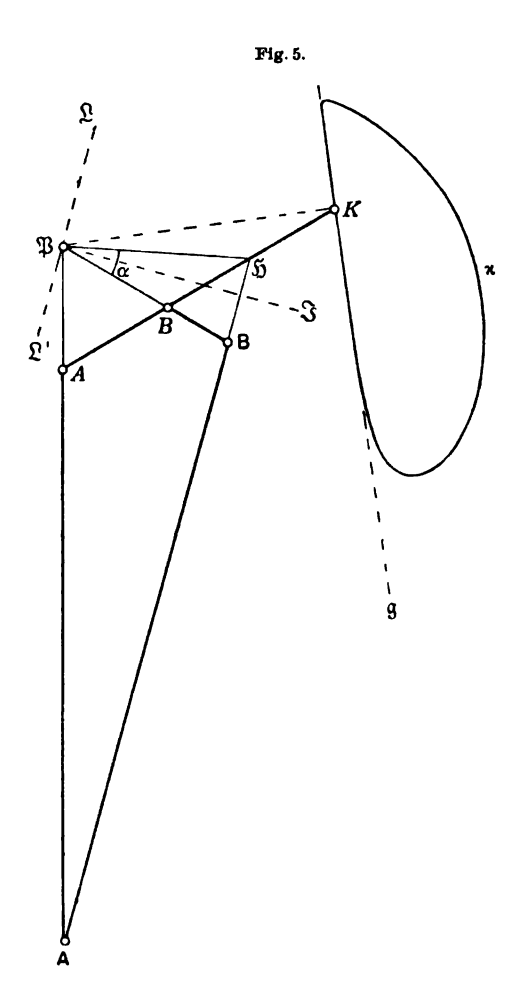
$$\angle K\mathfrak{P}\mathfrak{H} = 90^0 + \gamma - (\alpha + \beta) = 90^0 - \delta;$$

fällen wir also von $\mathfrak{P}$ auf AB ein Lot $\mathfrak{P}\mathfrak{J}$ und ziehen durch $\mathfrak{P}$ eine Gerade, die mit $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ den Winkel $\mathfrak{H}\mathfrak{P}\mathfrak{J}$ einschliesst, so schneidet die-

selbe $AB$ in $K$. Die Bahnkurve $\varkappa$ ist symmetrisch in Bezug auf $\mathsf{AB}$ und nur zur Hälfte gezeichnet; die sechspunktig berührende Tangente $\mathfrak{g}$ steht senkrecht auf $\mathfrak{P}K$.

Im Dreieck $AB\mathfrak{P}$ ist jeder Winkel gleich $60^0$, d. h. in jeder Systemlage, in welcher ein Punkt der Koppelgeraden eine Bahnstelle mit sechspunktig berührender Tangente durchläuft, bilden die drei beweglichen Glieder des Vierecks — oder deren Verlängerungen — ein gleichseitiges Dreieck.

Fig. 5.




Für $\alpha = 30^0$ wird

$$AB = \mathsf{B}B = BK,$$

$$\mathsf{A}A = \mathsf{AB} = \infty$$

und wir erhalten die bekannte genaue Geradführung durch das gleichschenklige Schubkurbelgetriebe, bei welcher sich der Punkt $A$ auf der Geraden $\mathsf{B}A$ und der Punkt $K$ auf einer zu dieser senkrechten Geraden bewegt. Wir schliessen hieraus, dass auch im allgemeinen Fall die Annäherung der Kurve $\varkappa$ an die Gerade $\mathfrak{g}$ umso vollkommener sein wird, je grösser die Differenz der beiden Arme des Gelenkvierecks ist, wenn gleichzeitig die Koppel und der kleinere Arm einander nahezu gleich sind.

Ziehen wir in Figur 5 durch $\mathfrak{P}$ die Gerade $\mathfrak{L}\mathfrak{L}' \parallel \mathfrak{H}\mathsf{A}$, so ist:

$$\angle B\mathfrak{P}\mathfrak{L}' = 180^0 - \delta - \alpha = 2(90^0 - 2\alpha) = 2 \cdot \angle K\mathfrak{P}B,$$

und ebenso

$$\angle A\mathfrak{P}\mathfrak{L} = 2 \cdot \angle K\mathfrak{P}A.$$

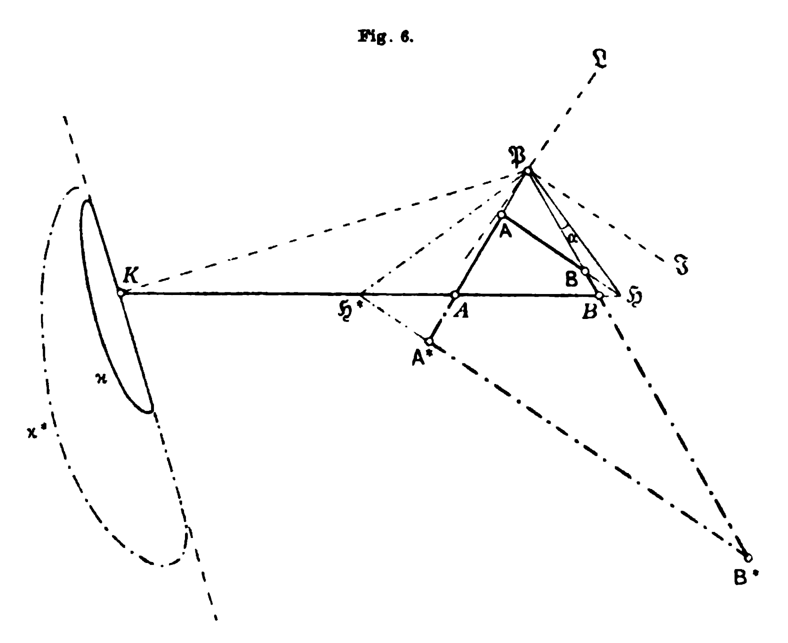
Diese Bemerkung dient zur Lösung der Aufgabe: Auf einer Geraden sind drei Punkte $A$, $B$, $K$ gegeben. An die Strecke $AB$ als Koppel soll ein Gelenkviereck angeschlossen werden,

welches die sechspunktige Geradführung des Punktes $K$ bewirkt (Fig. 6). Um ein solches Viereck zu bestimmen, zeichnen wir über $AB$ das gleichseitige Dreieck $AB\mathfrak{P}$, machen

$$\angle \mathfrak{L}\mathfrak{P}A = 2 \cdot \angle A\mathfrak{P}K,$$

errichten in $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{P}\mathfrak{L}$ das Lot $\mathfrak{P}\mathfrak{J}$ und bestimmen den Schnittpunkt $\mathfrak{H}$ der Geraden $AB$ mit der Halbierungslinie des Winkels $K\mathfrak{P}\mathfrak{J}$. Durch $\mathfrak{H}$ ziehen wir zu $\mathfrak{P}\mathfrak{L}$ eine Parallele; diese trifft $\mathfrak{P}A$ und $\mathfrak{P}B$

Fig. 6.




bez. in $\mathsf{A}$ und $\mathsf{B}$. Dann ist $\mathsf{AB}BA$ das gesuchte Viereck, und zwar ist es gerade in derjenigen Systemlage gezeichnet, in welcher $K$ eine Bahnstelle mit sechspunktig berührender Tangente durchläuft. — Halbieren wir statt des Winkels $K\mathfrak{P}\mathfrak{J}$ dessen Nebenwinkel durch die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{H}^*$ und ziehen durch ihren Schnittpunkt $\mathfrak{H}^*$ mit $AK$ eine Parallele zu $\mathfrak{P}\mathfrak{L}$, so entsteht das Viereck $\mathsf{A}^*\mathsf{B}^*BA$; die gestellte Aufgabe hat also zwei Lösungen.

14. Fortsetzung. In Figur 6 folgt aus dem Dreieck $A\mathfrak{P}B$ nach dem Satze des Menelaus:

$$\frac{A\mathsf{A}}{\mathfrak{P}\mathsf{A}} \cdot \frac{\mathfrak{P}\mathsf{B}}{B\mathsf{B}} \cdot \frac{B\mathfrak{H}}{A\mathfrak{H}} = 1.$$

Dabei ist

$$\frac{B\mathfrak{H}}{A\mathfrak{H}} = \frac{\sin\alpha}{\sin(60^\circ + \alpha)};$$

setzen wir daher $\mathsf{A}A = a$, $\mathsf{B}B = b$, $AB = c$, so wird

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(60^\circ + \alpha)} = \frac{b(c-a)}{a(c-b)}. \tag{31}$$

Im Dreieck $\mathsf{B}\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ ist ferner

$$\mathfrak{P}\mathsf{B} = c - b = c \frac{\sin 60^\circ}{\sin(60^\circ - \alpha)} \cdot \frac{\sin 3\alpha}{\sin 4\alpha}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergiebt sich durch Elimination von $\alpha$ für die drei beweglichen Glieder $a$, $b$, $c$ die Beziehung:

$$32)\quad \begin{cases} a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 - 3abc[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)] \\ \qquad + 15a^2b^2c^2 = 0. \end{cases}$$

Bezeichnen wir noch die Länge des festen Gliedes $\mathsf{AB}$ mit $d$, so haben wir:

$$d = \mathsf{A}\mathfrak{H} - \mathsf{B}\mathfrak{H} = (c-a)\frac{\sin(60^\circ + \alpha)}{\sin 3\alpha} - (c-b)\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha},$$

und hieraus folgt nach 31):

$$33)\quad d = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - abc(a+b+c)}{3abc}.$$

Analoge Beziehungen bestehen zwischen den Gliedern des Vierecks $\mathsf{A}^*\mathsf{B}^*BA$, nur mit dem Unterschiede, dass an Stelle von $a$ und $b$ die negativen Längen der Glieder $\mathsf{A}^*A$, $\mathsf{B}^*B$ treten, weil diese Strecken entgegengesetzte Richtung haben wie $\mathsf{A}A$, $\mathsf{B}B$. Es gilt demnach überhaupt der Satz: Hat ein Gelenkviereck die Eigenschaft, dass ein auf der Koppel liegender Punkt eine Bahnkurve mit sechspunktig berührender Tangente beschreibt, so genügen die Längen seiner Glieder, mit geeigneten Vorzeichen versehen, den Gleichungen 32) und 33) — und umgekehrt.

In Figur 6 ist $\angle A\mathfrak{P}K = 30^\circ + 2\alpha$ und folglich das Teilungsverhältnis des Punktes $K$ in Bezug auf die Strecke $AB$:

$$\mu = \frac{AK}{BK} = \frac{\sin(30^\circ + 2\alpha)}{\cos 2\alpha}.$$

Aus dem Dreieck $\mathsf{A}\mathfrak{P}\mathsf{B}$ folgt aber:

$$\mathsf{AB} + \mathsf{A}\mathfrak{P} - \mathsf{B}\mathfrak{P} = (c-a)\frac{\sin(30^\circ + 2\alpha)}{\cos 2\alpha},$$

also wird:

$$34)\quad \mu = \frac{d - a + b}{c - a},$$

und diese Gleichung lässt sich auch umformen in:

$$34')\quad \mu = \frac{c - b}{d + a - b}.$$

15. Folgerungen aus den vorigen Gleichungen I. Da die Gleichungen 32) und 33) symmetrisch sind in Bezug auf $a$, $b$, $c$, so folgt ohne weiteres der Satz: Bewirkt das Gelenkviereck $\mathsf{AB}BA$ die sechspunktige Geradführung eines auf der Koppelgeraden liegenden Punktes $K$, so behält es diese Eigenschaft, wenn die drei beweglichen Glieder $\mathsf{A}A$, $AB$, $B\mathsf{B}$ untereinander beliebig vertauscht werden. Bilden wir aus dem Viereck $\mathsf{AB}BA$ zwei neue Vierecke $\mathsf{A}'\mathsf{B}'B'A'$ und $\mathsf{A}''\mathsf{B}''B''A''$, indem wir

$$\mathsf{A}'\mathsf{B}' = \mathsf{A}''\mathsf{B}'' = \mathsf{AB}, \quad \mathsf{A}'A' = \mathsf{A}''A'' = AB, \quad \mathsf{B}'B' = A''B'' = \mathsf{B}B$$

und

$$A'B' = \mathsf{B}''B'' = \mathsf{A}A$$

machen, so enthält jedes dieser Vierecke auf seiner Koppel einen Punkt $K'$ bez. $K''$, der eine Bahnkurve $\varkappa'$ bez. $\varkappa''$ mit sechspunktig berührender Tangente beschreibt. Dabei ist:

$$\frac{A'K'}{B'K'} = 1 - \mu$$

und

$$\frac{A''K''}{B''K''} = 1 - \frac{1}{\mu}.$$

Die Kurven $\varkappa'$ und $\varkappa''$ sind ähnlich zur Bahnkurve $\varkappa$ des Punktes $K$. Dies alles ergiebt sich übrigens auch unmittelbar aus dem Satze, dass, wenn man bei einem Gelenkviereck die Koppel mit einem der Arme vertauscht, die von den Punkten der neuen und der ursprünglichen Koppel beschriebenen Bahnkurven einander paarweise ähnlich sind.*

II. Für $a = b$ geht die Gleichung 32) über in

$$(a - c)^2(a - 4c) = 0.$$

Die Annahme $a = c$ führt nach 33) zu der unbrauchbaren Lösung $d = 0$. Ist dagegen $a = 4c$, so wird $d = 3c$ und $\mu = -1$, und wir gelangen zu der bekannten Geradführung von Tschebischeff, bei welcher der Punkt $K$ in der Mitte der Koppel $AB$ liegt. Wegen der Gleichheit der Arme $\mathsf{A}A$ und $\mathsf{B}B$ ist nach der Bemerkung in Art. 13 die hier erreichte Annäherung der Kurve $\varkappa$ an die Gerade $\mathfrak{g}$ verhältnismässig gering.

III. Der Annahme $\mu = 2$ entspricht einerseits die in Art. 13 erwähnte genaue Geradführung mit $a = d = \infty$, $b = -c$, anderseits folgt aus den Gleichungen des vorigen Artikels noch die Lösung $b = c = 4a$, $d = 3a$. Diese geht aus der Tschebischeffschen Geradführung hervor, wenn wir bei dieser die Koppel mit einem Arme des Vierecks vertauschen.

16. Alle Punkte des Wendekreises $w_1$ — mit Ausnahme des Pols und des Ballschen Punktes — befinden sich momentan in Undulationspunkten ihrer Bahnkurven, wenn für die betrachtete Systemlage der zweite Wendepol $W_2$ mit dem Punkte $\mathfrak{P}$ identisch ist (Art. 6 II). Hieraus ergeben sich folgende Fälle:

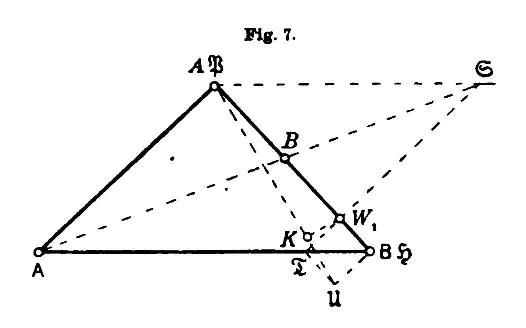
I. Zufolge den Gleichungen 21) wird der Bedingung $x_2 = y_2 = 0$ einerseits genügt durch die Annahme $\alpha = \delta = 90^0$. Dann liegt in Figur 4 der Punkt $\mathsf{B}$ unendlich fern und das Gelenkviereck artet in einen Schubkurbelmechanismus aus, bei welchem der Arm $\mathsf{A}A$ momentan mit der Polbahnnormale zusammenfällt.**

* Vergl. z. B. Koenigs, leçons de cinématique, Paris 1897, p. 266.

** Allievi a. a. O. S. 142.

II. Die Koordinaten von $W_2$ verschwinden ferner für $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 90^0$, und dann erhalten wir das in Figur 7 dargestellte Viereck, dessen Koppel sich momentan in einer Totlage befindet und dabei auf dem Arm A$A$ senkrecht steht. Dabei sind $\mathfrak{P}$ und die positive Polbahntangente t bez. identisch mit $A$ und $A$A; ziehen wir also durch $A$ zu AB eine Parallele, welche A$B$ in $\mathfrak{S}$ schneidet, und durch $\mathfrak{S}$ ein Lot auf $A$B, so trifft dieses die Gerade $A$B in $W_1$. Da auch $W_2$ mit $A$ zusammenfällt, so ist der Ballsche Punkt $K$ der Fusspunkt des Lotes von $A$ auf $W_1 W_3$, folglich $\angle W_1 A K$ gleich dem Winkel, den $W_1 W_3$ mit der negativen Polbahntangente einschliesst, oder $\tan \angle W_1 A K = -\frac{y_3 - y_1}{x_3}$.

Fig. 7.




Bezeichnen wir nun die Glieder unseres Vierecks wie früher mit $a$, $b$, $c$, $d$ und setzen in der ersten der Gleichungen 24) $\varrho = a$, $\alpha = 0$ in der zweiten $\varrho' = b + c$, $\beta = 90^0$, so folgt:

$$x_3 = -3\frac{y_1^2}{a}, \quad y_3 - y_1 = 3y_1^2 \frac{b + c - y_1}{(b+c)^2},$$

es ist also:

$$\tan \angle W_1 A K = \frac{a(b + c - y_1)}{(b+c)^2} = \frac{A\mathsf{A} \cdot W_1 \mathsf{B}}{A\mathsf{B}^2}.$$

Ziehen wir durch daher den Schnittpunkt $\mathfrak{T}$ von AB und $\mathfrak{S} W_1$ eine Parallele zu $A$B, durch B eine Parallele zu $A$A und verbinden den Schnittpunkt $\mathfrak{U}$ beider Geraden mit $A$, so ist $K$ der Fusspunkt des Lotes von $W_1$ auf $A\mathfrak{U}$.

In Figur 8 ist $E$ ein beliebiger Punkt auf dem Kreise $w_1$ der vorigen Figur, also $AE \perp W_1 E$. Der Punkt $E$ beschreibt eine Bahnkurve $\varepsilon$, die in $E$ einen Undulationspunkt hat mit der Tangente $W_1 E$. Machen wir

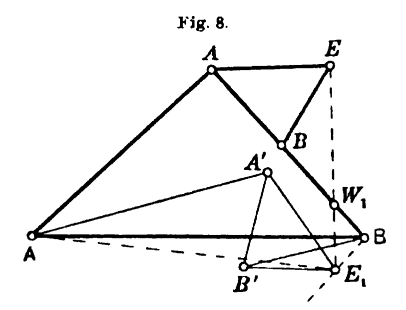
$$\angle E_1 \mathsf{B} \mathsf{A} = \angle EAB$$

und verstehen unter $E_1$ den Schnittpunkt der Geraden B$E_1$ mit $EW_1$, so ergiebt sich leicht, dass

$$\angle \mathsf{A} E_1 \mathsf{B} = 180^0 - \angle BEA$$

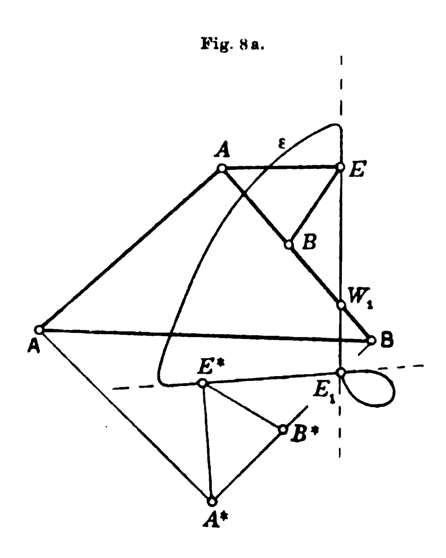
ist. Der Punkt $E_1$ liegt also auf dem Kreise, der über der Sehne AB den Peripheriewinkel $BEA$ fasst und der bekanntlich durch die drei Doppelpunkte der Kurve $\varepsilon$ geht. Konstruieren wir noch über A$E_1$ und B$E_1$ bez. die Dreiecke A$E_1 A'$, B$E_1 B'$ mit den Seiten A$A' = a$,

Fig. 8.



$E_1A' = EA$, $\mathsf{B}B' = b$, $E_1B' = EB$, so lässt sich beweisen, dass $\angle B'E_1A' = \angle BEA$ ist. Die Dreiecke $ABE$ und $A'B'E_1$ sind also kongruent; folglich ist $E_1$ ein Doppelpunkt von $\varepsilon$. — In Figur 8a ist die Kurve $\varepsilon$ gezeichnet. Bringen wir die Koppel $AB$ in die Lage $A^*B^*$, die zu $AB$ symmetrisch ist in Bezug auf $\mathsf{AB}$, so gelangen die Punkte $E$ und $W_1$ nach $E^*$ und $W_1^*$, und dann ist $W_1^*$ der erste Wendepol und $E^*$ ein Punkt des ersten Wendekreises für die neue Systemlage, also offenbar wieder ein Undulationspunkt von $\varepsilon$ mit der Tangente $E^*E_1$. Wir erhalten somit den Satz: Wenn bei dem Gelenkviereck $\mathsf{AB}BA$ die Koppel $AB$ in einer Totlage mit dem Arm $\mathsf{A}A$ einen rechten Winkel bildet, so beschreibt jeder Punkt $E$ des zugehörigen Wendekreises $w_1$ momentan einen Undulationspunkt. Die Bahnkurve $\varepsilon$ des Punktes $E$ hat einen zweiten Undulationspunkt $E^*$, und die Tangenten in beiden Punkten schneiden sich in einem Doppelpunkte $E_1$ von $\varepsilon$. — Ersetzen wir den Punkt $E$ durch den Ballschen Punkt $K$ der Figur 7, so hat die Gerade $W_1K$ fünf unendlich benachbarte Punkte mit der zugehörigen Bahnkurve $\varkappa$ gemein; $K$ ist also gleichzeitig ein Doppelpunkt der Kurve $\varkappa$, weil die Tangente in $K$ noch durch den Doppelpunkt $K_1$ geht, der folglich mit $K$ identisch ist.

Fig. 8a.




17. Fortsetzung. III. In Figur 9 ist $\mathsf{AB}BA$ ein durchschlagendes Gelenkviereck und $A_0B_0$ eine Totlage der Koppel $AB$. Zu dieser gehören bekanntlich zwei Pole $\mathfrak{P}_I\mathfrak{P}_{II}$, die Doppelpunkte der Involution mit den Paaren $\mathsf{A}$, $B_0$ und $\mathsf{B}$, $A_0$, und beiden entspricht die Gerade $\mathsf{AB}$ als Polbahnnormale. Jeder Systempunkt $E$ befindet sich in der Totlage in einem „Sonderdoppelpunkte" $E_0$ seiner Bahnkurve $\varepsilon$; diese hat ausserdem noch drei „gewöhnliche" Doppelpunkte $E_1, E_2, E_3$ auf dem Kreise, der über der Sehne $\mathsf{AB}$ den Peripheriewinkel $BEA$ fasst. Liegt aber $E$ auf dem Kreise $k$ über dem Durchmesser $\mathfrak{P}_I\mathfrak{P}_{II}$, so vereinigen sich zwei gewöhnliche Doppelpunkte mit dem Sonderdoppelpunkte $E_0$ zu einem dreifachen Punkte der Kurve $\varepsilon$.* Im vorliegenden Falle sind die beiden Rollkurven symmetrisch in Bezug auf die Gerade $\mathsf{AB}$, die dem Pol $\mathfrak{P}_I$ entsprechenden Wendepole $W_1\,W_2\ldots$

* Über die Doppelpunkte der Koppelcurve, diese Zeitschrift Bd. 36, S. 68.

liegen also sämtlich auf dieser Geraden (Art. 6, V). Bezeichnen wir die Entfernungen der Punkte A, B, $A_0$, $B_0$, $W_1$, $W_2$ ... von $\mathfrak{P}_I$ bez. mit $\varrho$, $\varrho'$, $r$, $r'$, $y_1$, $y_2$ ..., so ist:

$$\frac{1}{y_1} = \frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r'} - \frac{1}{\varrho'}. \tag{35}$$

Vertauschen wir ferner in Gleichung 15) $r$, $\xi_i$, $\eta_i$ bez. mit $\varrho$, $x_i$, $y_i$ und setzen $x_i = 0$, $\varphi = 90^0$, so ergiebt sich:

$$\varrho^2(y_3 - y_1) + \varrho y_1 (4y_2 - 3y_1) + 3y^3_1 = 0,$$

und eine analoge Gleichung gilt für $\varrho'$; wir erhalten demnach:

$$y_2 = \frac{3}{4} y^2_1 \left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right).$$

Soll daher der Punkt $W_2$ mit $\mathfrak{P}_I$ zusammenfallen, so muss

$$\frac{1}{y_1} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}$$

sein, oder nach 35):

$$\frac{2}{y_1} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{r'}.$$

Nun sind aber $\mathfrak{P}_I$, $\mathfrak{P}_{II}$, A, $B_0$ vier harmonische Punkte, also ist auch

$$\frac{2}{\mathfrak{P}_I \mathfrak{P}_{II}} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{r'},$$

d. h. $y_1 = \mathfrak{P}_I \mathfrak{P}_{II}$, oder $W_1$ identisch mit $\mathfrak{P}_{II}$ und der Wendekreis $w_1$ identisch mit dem Kreise $k$. Fällt also in einer Totlage eines durchschlagenden Gelenkvierecks der dem Punkte $\mathfrak{P}_I$ entsprechende Wendepol $W_1$ zusammen mit $\mathfrak{P}_{II}$, so beschreiben alle Punkte des Kreises $w_1$ Undulationspunkte, und jeder solche Punkt befindet sich gleichzeitig in einem dreifachen Punkte seiner Bahnkurve.

Dieser Fall ist in Figur 9 dargestellt. Dabei sind die Punkte $\mathfrak{P}_I$, A, $A_0$ beliebig angenommen, $\mathfrak{P}_{II}$ ist als der zugehörige Wendepol in bekannter Weise konstruiert worden; B und $B_0$ sind die vierten harmonischen Punkte bez. zu $\mathfrak{P}_I$, $\mathfrak{P}_{II}$, $A_0$ und $\mathfrak{P}_I$, $\mathfrak{P}_{II}$, A. Ein beliebiger Punkt $E$ des Kreises über $\mathfrak{P}_I \mathfrak{P}_{II}$ beschreibt die Bahnkurve $\varepsilon$, die in $E_0$ einen dreifachen Punkt hat mit den Tangenten $\mathfrak{P}_I E_0$ und $\mathfrak{P}_{II} E_0$: die letzte hat mit $\varepsilon$ vier unendlich benachbarte Punkte gemein. Überdies berührt der durch A, B, $E_0$ gehende Kreisbogen die Kurve $\varepsilon$ in $E_0$ und schneidet sie noch in einem Doppelpunkte, der hier ein isolierter Punkt ist.

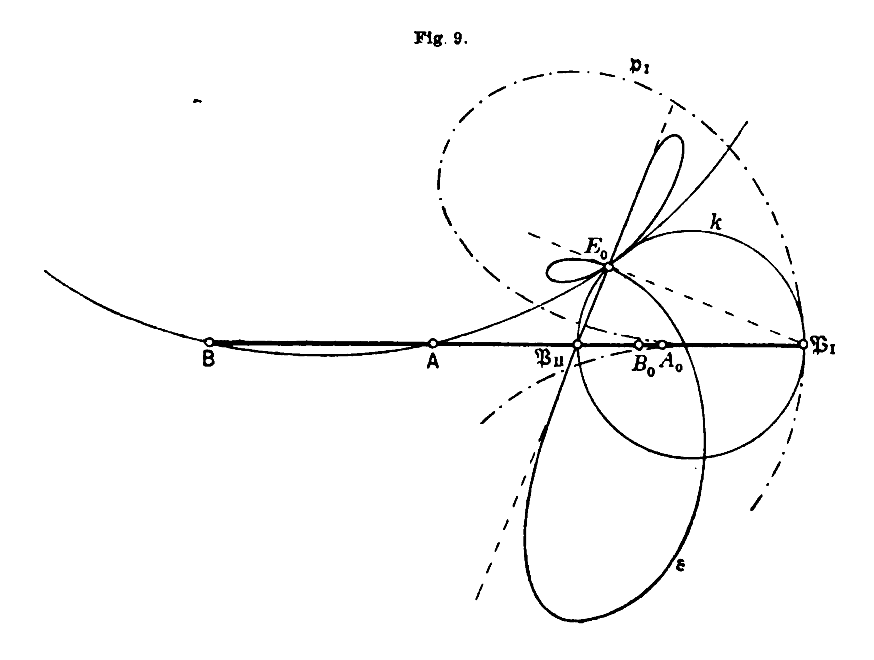
In der Systemlage, die $\mathfrak{P}_I$ zum Pole hat, ist dieser zugleich der Ballsche Punkt; seine Bahnkurve $\mathfrak{p}_I$ hat also mit der Geraden AB in $\mathfrak{P}_I$ fünf unendlich benachbarte Punkte gemein und schneidet sie zum sechsten Male wieder in $\mathfrak{P}_I$.

IV. Hierher gehört endlich der früher behandelte Fall eines Gelenkvierecks, dessen Koppel in einer bestimmten Lage auf den beiden

Armen senkrecht steht.* Dann beschreibt jeder Punkt der Polbahntangente, in welche hier der Kreis $w_1$ ausartet, einen Undulationspunkt mit Ausnahme des Ballschen Punktes $K$, der wiederum zugleich ein Doppelpunkt seiner Bahnkurve ist. Sind überdies die beiden Arme einander gleich, so ist $K$ der Mittelpunkt der Koppelstrecke. (Fünfpunktige Geradführung von Watt.)

Aus den letzten Darlegungen folgt weiter, dass für keine Koppellage eines eigentlichen Gelenkvierecks gleichzeitig der Punkt $W'_2$ mit $\mathfrak{P}$ und $W_3$ mit $W_1$ zusammenfallen kann; es können also nicht alle

Fig. 9.




Punkte von $w_1$ zugleich Bahnstellen mit fünfpunktig berührender Tangente durchschreiten.

18. Der Pol als Systempunkt. Polkurve und Übergangskurve. Nach Art. 9 beschreibt der Punkt $\mathfrak{P}$ im allgemeinen eine Schnabelspitze mit endlichem Krümmungsradius $\mathfrak{r}$, wenn für die betrachtete Systemlage $y_2 = 0$ ist. Nun verschwindet $y_2$ entweder, wenn $\gamma = 0$, oder wenn $\delta = 90^0$ ist. Im ersten Falle muss auch $\alpha$ (oder $\beta$) gleich Null sein, und dann ist $\mathfrak{P}$ identisch mit dem Punkte $A$, der einen Kreis um A durchläuft und sich augenblicklich in einem Umkehrpunkte seiner Bahn befindet. Es bleibt somit nur die Bedingung $\delta = 90^0$, d. h. der Systempunkt $\mathfrak{P}$ beschreibt eine Schnabelspitze, wenn

* Konstruktion der Burmesterschen Punkte u.s.w., zweite Mitteilung S. 145, vergl. auch Allievi S. 148.



die Gerade 𝔓ℌ auf dem festen Gliede AB senkrecht steht (Fig. 10). Dann ist nach Gleichung 19):

$$y_1 = h \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha \sin\beta \cos\gamma},$$

und aus 24′) ergiebt sich:

$$x_3 = -3 y_1 \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha \sin\beta \cos^2\gamma} [\cos(\alpha - \beta)\cos\gamma - \sin(\alpha + \beta)\sin\gamma],$$

also wird nach 17):

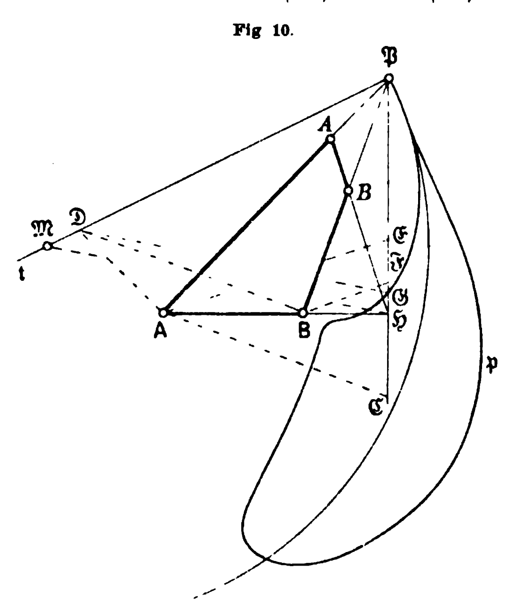
$$\mathfrak{r} = -\frac{y_1^2}{x_3} = \frac{\frac{h}{\cos\alpha \cos\beta}}{1 + \tan\alpha \tan\beta - (\tan\alpha + \tan\beta)\tan\gamma}.$$

Um daher den Krümmungsmittelpunkt 𝔐 zu konstruieren, ziehen wir die Geraden A𝔇 ⊥ 𝔓A, B𝔇 ⊥ 𝔓B; dann ist 𝔓𝔇 die positive Polbahntangente 𝔱. Bestimmen wir ferner die Schnittpunkte ℭ, 𝔈, 𝔉 von 𝔓ℌ bez. mit den Geraden Aℭ ⊥ 𝔓B, sowie A𝔈 und B𝔉 ⊥ $AB$, machen auf 𝔓ℭ die Strecke

$$\mathfrak{G}\mathfrak{C} = \mathfrak{E}\mathfrak{H} + \mathfrak{F}\mathfrak{H}$$

und ziehen durch ℌ zu 𝔊𝔇 eine Parallele, so trifft diese 𝔱 in 𝔐. Der zugehörige Krümmungskreis hat in 𝔓 mit der Kurve 𝔭 fünf zusammenfallende Punkte gemein; er schneidet sie folglich noch in einem reellen Punkte.

Fig 10.




Der Krümmungsradius 𝔯 wird unendlich gross, wenn

$$\tan\gamma = \frac{1 + \tan\alpha \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{C}}{\mathfrak{H}A + \mathfrak{H}B}$$

ist. Der Punkt 𝔓 hat dann wieder das Aussehen einer gewöhnlichen Spitze der Kurve 𝔭, aber mit fünfpunktig berührender Tangente 𝔫.

Berechnen wir in Figur 10 den Winkel $\alpha$ aus den Seiten $a, b, c, d$ des Gelenkvierecks, so finden wir eine Gleichung sechsten Grades für $\sin\alpha$. Diese bestimmt zwölf Lagen des Armes B$B$, die paarweise in Bezug auf AB symmetrisch sind, und jeder von ihnen entspricht eine Koppellage, für welche 𝔓ℌ senkrecht steht auf AB. Bei jedem Gelenkviereck giebt es also im allgemeinen zwölf Koppellagen, für welche der Pol eine Schnabelspitze beschreibt.

Das soeben erhaltene Resultat steht in Zusammenhang mit der früher behandelten Frage nach der Gestaltung aller Bahnkurven, die

von den sämtlichen Punkten der Koppelebene beschrieben werden.*
Wir haben als Übergangskurve $q$ der bewegten Ebene den Ort derjenigen Systempunkte bezeichnet, welche Bahnkurven mit zwei zusammenfallenden Doppelpunkten beschreiben; die Kurve $q$ ist von der zehnten Ordnung und hat Doppelpunkte in $A$ und $B$ und vierfache Punkte in den imaginären Kreispunkten. Andrerseits befinden sich alle diejenigen Systempunkte, deren Bahnen eine Spitze enthalten, auf der Polkurve $p$, einer bizirkularen Kurve achter Ordnung mit vierfachen Punkten in $A$ und $B$. Die Kurven $p$ und $q$ zerschneiden die Koppelebene in eine Anzahl von Feldern in der Weise, dass alle Punkte desselben Feldes Bahnkurven beschreiben, die in Bezug auf ihre Doppelpunkte denselben Charakter besitzen. Nun entsteht eine Schnabelspitze aus der Vereinigung eines Knotenpunktes mit einer gewöhnlichen Spitze; demnach liegt jeder Punkt $X$ der Koppelebene, der eine Bahnkurve mit Schnabelspitze erzeugt, zugleich auf den beiden Kurven $p$ und $q$. Den Systempunkten auf $q$ zu beiden Seiten von $X$ entsprechen Bahnkurven mit drei Doppelpunkten, von denen zwei zu einem Selbstberührungspunkte vereinigt sind. Jeder von diesen letzten zwei Punkten hat also für sich den Charakter eines Knotenpunktes, und nur für die Stelle $X$ wird einer von ihnen zur Spitze. Wir schliessen daraus, dass wir beim Durchlaufen der Übergangskurve in $X$ die Polkurve nicht überschreiten, denn andernfalls würde sich hierbei ein Knotenpunkt in einen isolierten Punkt verwandeln. Die Kurven $p$ und $q$ berühren sich demnach in $X$. Da nun beide Kurven von den Punkten $A$ und $B$ und den imaginären Kreispunkten abgesehen noch $8 \cdot 10 - 4 \cdot 8 = 48$ Punkte gemein haben, so ergiebt sich der Satz: Die Übergangskurve und die Polkurve berühren sich in den zwölf Punkten, welche Bahnkurven mit Schnabelspitze beschreiben, und sie schneiden sich überdies noch in vierundzwanzig Punkten. Ein solcher Schnittpunkt beschreibt eine Bahnkurve mit einem Selbstberührungspunkt und einer Spitze.

* Über die Doppelpunkte der Koppelkurve, diese Zeitschrift Bd. 34 S. 303 und 372.

# Anwendung der Integralkurve zur Volumteilung.

Von

Ernst Brauer

in Karlsruhe.

---

Die zeichnerische Beschäftigung mit der Integralkurve neben dem Studium der Differential- und Integralrechnung ist sehr geeignet, die Schwierigkeiten überwinden zu helfen, welche dem Anfänger die Grundbegriffe dieser Wissenschaft bereiten.

Als Übungsbeispiel hierzu eignet sich u. a. die Aufgabe, für ein durch Zeichnung gegebenes Gefäss von der Form eines Rotationskörpers den Rauminhalt zu bestimmen und durch Horizontalebenen in eine gewisse Anzahl, z. B. zehn, gleiche Teile zu teilen.

Sind $x$ und $y$ die in der Figur eingeschriebenen Koordinaten eines beliebigen Punktes $A$ der Meridianlinie, $V$ das den Koordinaten entsprechende Teilvolum, so ist:

$$1) \qquad dV = \pi x^2 dy.$$

Ersetzt man $x^2$ durch das Rechteck $au$, dessen Seite $a$ für alle $x$ konstant, dessen $u$ aber mit $x$ veränderlich ist, so kann $u$ nach der Gleichung:

$$2) \qquad \frac{u}{x} = \frac{x}{a}$$

mittels ähnlicher Dreiecke konstruiert werden, und man erhält in der Form:

$$3) \qquad V = \pi a \int_0^y u\,dy$$

das Volum dargestellt als Prisma von der Höhe $\pi a$ und einer Grundfläche, welche dem Integral entspricht.

Wird nun auch diese Fläche in ein Rechteck von der konstanten Basis $b$ und der mit $y$ veränderlichen Seite $v$ verwandelt, d. h.:

$$4) \qquad \int_0^y u\,dy = bv$$

gesetzt, wonach auch

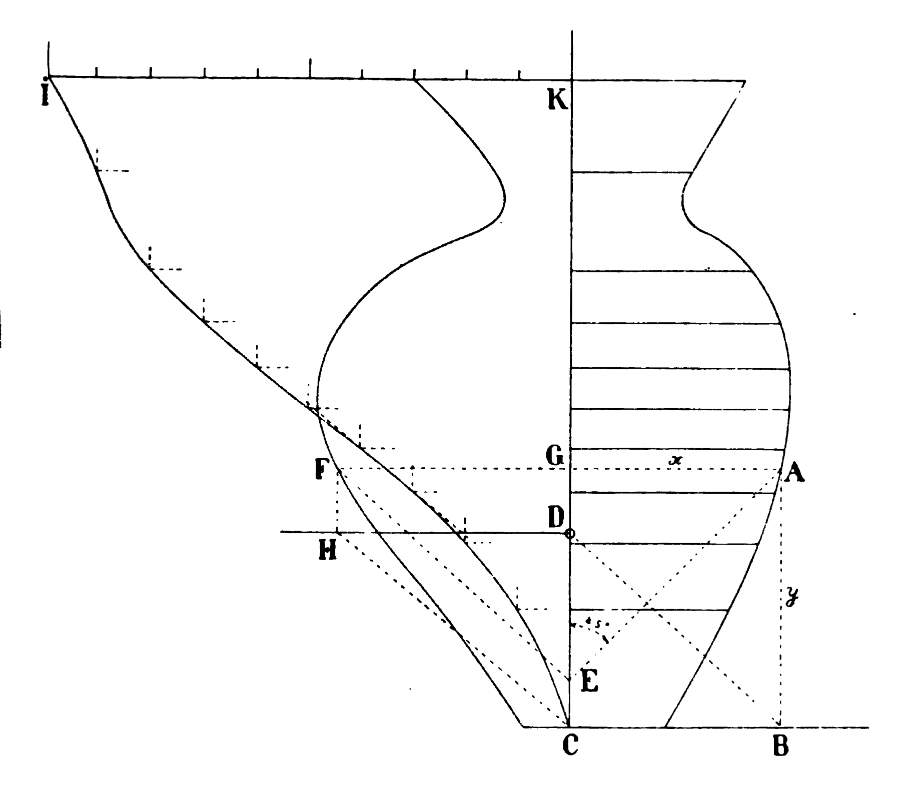
5) $$\frac{dv}{dy} = \frac{u}{b},$$

so folgt aus 3) und 4):

6) $$V = \pi abv.$$

Das Teilvolum $V$ ist hiernach, da $\pi ab$ konstant, mit $v$ direkt proportional, und, wenn zu jedem $y$ der Wert von $v$ bekannt ist, so kann auch für die gleichmässig abgestuften $V$ oder $v$ die entsprechende Höhe $y$ gefunden werden.

Die Konstruktion zerfällt in die punktweise Verzeichnung der abgeleiteten Kurve mit den Koordinaten $y$ und $u$ und in die Zusammen-




setzung der Kurve $(y, v)$ als Integralkurve zu $(y, u)$ aus tangentialen Elementen.

Für die erste Aufgabe dient als Grundlage Gleichung 2). Projiziert man den beliebigen Punkt $A$ der gegebenen Kurve $(x, y)$ auf die $X$-Axe nach $B$, trägt auf der $Y$-Axe die beliebig gewählte Strecke $a$ als $CD$ auf, zieht ferner durch $A$ unter 45° die Linie $AE$ und durch $E$ die Parallele zu $BD$, so schneidet diese auf der Horizontalen durch $A$ den Punkt $F$ an als Punkt der $(y, u)$-Kurve; denn es folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $FGE$ und $BCD$:

$$FG : GE = BC : CD,$$

was mit Gleichung 2) identisch ist.

Die Konstante $b$, deren man für die Konstruktion der Integralkurve bedarf, ist willkürlich. Sie kann sonach gleich $a$ gesetzt werden, was in unserer Zeichnung geschehen ist. Projiziert man $F$ auf die Horizontale durch $D$ nach $H$ und verbindet $H$ mit $C$, so ist:

$$HD : CD = u : b,$$

sonach muss das in der Horizontalen durch $A$ liegende Element der Integralkurve mit Rücksicht auf Gleichung 5) die Richtung von $HC$ haben. In derselben Weise bestimmt man die Tangentenrichtung der Integralkurve für eine hinreichend grosse Zahl von Punkten der $yu$-Kurve und setzt durch Ziehen von geradlinigen Elementen parallel zu den entsprechenden $CH$ die vollständige Kurve zusammen. Als beliebiger Anfangspunkt hierbei ist $C$ gewählt worden. Die Strecke $JK$ ist der Wert $v$ für den ganzen Gefässinhalt. Dieser ist sonach:

$$V_1 = \pi \cdot CD \cdot CD \cdot JK.$$

Teilt man $JK$ in zehn gleiche Teile, zieht durch die Teilpunkte senkrechte Linien bis zur Integralkurve und durch die Schnittpunkte horizontale Linien, so sind diese die linearen Projektionen der gesuchten Teilebenen.

Nach Gleichung 6) kann man natürlich auch für einen beliebigen Wert von $V$ die Strecke

$$v = \frac{V}{\pi a b}$$

berechnen und dazu mit Hilfe der Integralkurve das entsprechende $y$ suchen, d. h. angeben, wie hoch die Flüssigkeit steht, wenn ihr Volum gegeben ist.

Die Aufgabe lässt sich durch die Form der gegebenen Profilkurve sehr variieren, mehr noch durch Neigung der Axe oder durch Aufgeben der Rotationsform. In diesem Falle wird die Aufsuchung der $(yu)$-Kurve, deren $u$ den horizontalen Querschnitten proportional sein müssen, eine viel verwickeltere Aufgabe, die am besten mit dem Planimeter gelöst wird.

Technische Anwendung findet die behandelte Aufgabe, abgesehen von der Calibrierung von Messgefässen, Büretten u. s. w. im grossen, wenn es sich darum handelt, Wasserbehälter von mehr oder weniger unregelmässiger Form zu füllen oder zu entleeren. Bei gleichmässigem Zu- oder Abfluss entsprechen die Horizontalebenen gleicher Volumabschnitte auch gleichen Zeitabschnitten.

Für schwimmende Gefässe findet sich in gleicher Weise die Tauchtiefe für gegebene Wasserverdrängung, d. h. für bestimmte Belastung.

Auch in der Turbinentheorie hat die Aufgabe praktische Anwendung, sofern man die Lagen, in welche eine materielle Ebene in einem Turbinenkanal nach gleichen Zeiten gelangt, angenähert durch Einteilung der ganzen Kanalfülle in Abschnitte gleichen Volums bestimmen kann. Aus diesen Lagen lassen sich näherungsweise die Wassergeschwindigkeiten, ferner die Beschleunigungen und danach die Verschiedenheiten des Druckes in den einzelnen Punkten, z. B. auch die Flächen gleichen Druckes sowie die für die Triebkraft massgebenden Unterschiede des Druckes auf Rücken- und Brustfläche der Schaufeln ermitteln.

## Über Nachbargebiete im Raume.

Von **Paul Stäckel** in Kiel.

Wenn man ein System von Gebieten auf einer Oberfläche, deren jedes an jedes andere grenzt, und zwar immer längs einer Linie, nicht bloss in Punkten, Nachbargebiete nennt, so entsteht die Frage, welches die Maximalzahl der Nachbargebiete auf einer Fläche von gegebenem Geschlechte ist.*

Ganz entsprechend wird man im Raume ein System von dreifach ausgedehnten Gebieten, deren jedes an jedes andere grenzt, und zwar immer längs einer Fläche, nicht bloss in Punkten oder Linien, Nachbargebiete nennen, und es wird abermals die Frage nach der Maximalzahl der Nachbargebiete entstehen. Während jedoch bei zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten diese Maximalzahl eine bestimmte, endliche Zahl ist, lässt sich zeigen, dass man im Raume beliebig viele Nachbargebiete konstruieren kann.

Um dies nachzuweisen, denke ich mir eine Ebene beliebig in $n$ getrennte Gebiete geteilt und senkrecht über diesen Gebieten Cylinder konstruiert, die durch eine zweite parallele Ebene begrenzt werden. Diese so begrenzten Cylinder mögen der Reihe nach mit $1, 2, 3, \ldots, n$ bezeichnet werden. Ihre oberen Endflächen teile man in je $n-1$ getrennte Gebiete, die beim $\nu^{\text{ten}}$ Cylinder die Nummern:

$$1, 2, \ldots, \quad \nu - 1, \quad \nu + 1, \ldots, \quad n$$

tragen sollen. Jetzt verbinde man diese Gebiete auf der oberen Endfläche des $\nu^{\text{ten}}$ Cylinders durch schlauchartige Gebilde mit denjenigen Gebieten der $n-1$ übrigen Cylinder, welche die Nummer $\nu$ tragen. Indem man dieses Ver-

* Man vergleiche die Abhandlung: Über das Problem der Nachbargebiete von L. Heffter (Mathematische Annalen, Bd. 38, 1891, S. 477—508), wo auch die weitere Litteratur über den Gegenstand angegeben ist.

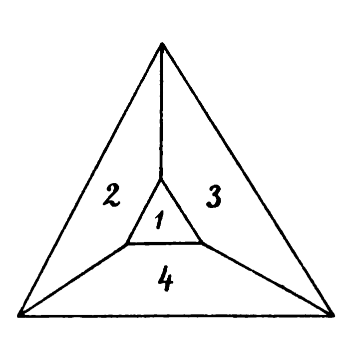


fahren für alle Werte $\nu = 1, 2, \ldots, n$ durchführt und darauf achtet, dass die Schläuche getrennt voneinander verlaufen, erhält man

$$\frac{1}{2} n(n-1)$$

Verbindungsräume, in deren Mitte man immer eine Scheidewand anbringen kann. Jeder der $n$ Cylinder bekommt somit $n-1$ Auswüchse, die zu ihm gerechnet werden sollen, und es ergeben sich so $n$ Gebiete im Raume, von denen jedes mit jedem eine Grenzfläche, nämlich eine jener

$$\frac{1}{2} n(n-1)$$




Scheidewände, gemeinsam hat. Mithin ist die Anzahl der Nachbargebiete im Raume beliebig gross.

Will man zu einer endlichen Anzahl von Gebieten gelangen, so muss man eine weitere Beschränkung hinzufügen. Eine solche Beschränkung könnte etwa darin bestehen, dass die Nachbargebiete lauter konvexe Polyeder sein sollen. Einer Mitteilung von Herrn Heffter, dem ich diese Aufgabe vorlegte, entnehme ich, dass in der Ebene vier konvexe Polygone Nachbargebiete sein können. Die entsprechende Konstruktion im Raume ergiebt fünf Nachbargebiete der verlangten Art. Es scheint, als ob es nicht mehr giebt; jedoch ist mir ein strenger Beweis hierfür noch nicht gelungen.

---

## Über einen Mechanismus, durch den ein beliebiger Winkel in eine beliebige ungerade Anzahl gleicher Teile geteilt werden kann.

Von **A. Korselt** in Meerane i. S.

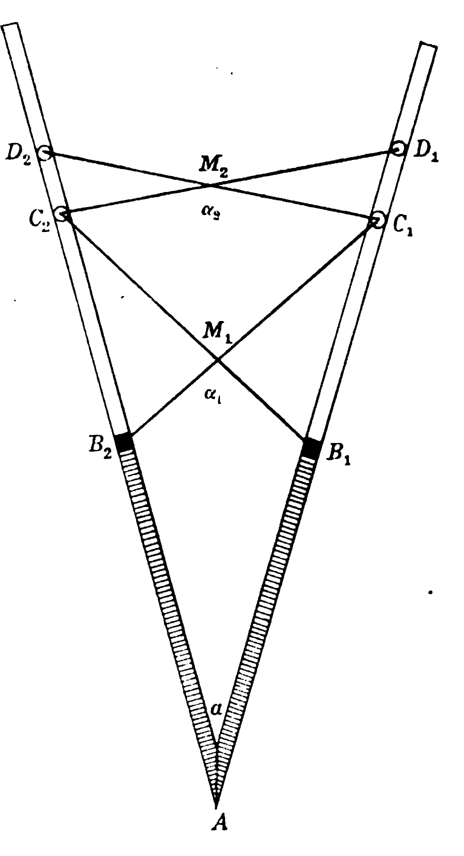
Man nennt die Auflösung einer geometrischen Aufgabe nur dann elementargeometrisch, wenn sie mit Zirkel und Lineal geschehen kann. Die Gründe dafür sind rein praktische. Diese Werkzeuge sind die denkbar einfachsten und daher genauesten und sind für den Mittelschulunterricht mehr als ausreichend. An sich aber kann jede Auflösung geometrisch genannt werden, die durch Modelle auf Grund geometrischer Sätze in der Theorie absolut, in der Praxis hinlänglich genau ausgeführt werden kann. Der Begriff „geometrische Lösung" hängt also von den Fortschritten der praktischen Mechanik ab, und Probleme, die zur Zeit nicht elementar lösbar sind, können es durch Konstruktion geeigneter Instrumente werden.

Ein Beispiel ist die Vielteilung eines beliebigen Winkels, wovon die Dreiteilung besonders berühmt geworden ist. Nur für diesen Fall waren

bis vor kurzem Lösungen bekannt. Sie erfordern die Konstruktion einer nicht elementaren Kurve, sei es eines Kegelschnitts oder einer höheren Linie. Das ist umständlich und ungenau, also ohne praktische Bedeutung. Nur die in dieser Zeitschrift Bd. 38, litterarische Abteilung S. 37 beschriebene Vorrichtung von Pegrassi macht eine Ausnahme.

Neuerdings hat aber der Stadtrat Herr Dr. jur. Clauss in Meerane einen Mechanismus zur beliebigen Ungeradteilung eines beliebigen Winkels konstruiert und für die Drei- und Fünfteilung wirklich herstellen lassen, der nach meiner Erfahrung in diesen beiden Fällen hinlänglich genau arbeitet. Der Erfinder hat ihn als Gebrauchsmuster unter der Bezeichnung „der Claussche Winkel" beim kaiserlichen Patentamte angemeldet.

Das Instrument besteht aus einem in seinem Scheitel beweglichen Winkel, zwischen dessen Schenkeln verschiebbare Verbandstücke so angebracht sind, dass je zwei derselben stets Winkel bilden, die der Reihe nach das Drei-, Fünf-, Sieben- u. s. w.-fache des ersten Winkels sind.




Wenn man, wie in nebenstehender Zeichnung, auf den beiden Schenkeln eines Winkels $A = \alpha$ gleiche Strecken $AB_1$ und $AB_2$ je $= a$ abträgt und mit derselben Länge von den Endpunkten aus je den anderen Schenkel des Winkels $\alpha$ in $C_2$ und $C_1$ durchschneidet, so ist der Winkel $\alpha_1$ der letzteren Geraden gleich $3\alpha$. Macht man dieselbe Konstruktion von $C_1$ und $C_2$ aus, so ist

$$\sphericalangle\, \alpha_2 = 5\alpha \text{ u. s. w.}$$

Der Beweis ist durch Aussenwinkel zu führen.

In der Vorrichtung sind nun die Punkte $B_1$ und $B_2$ festgelegt, die Längen $B_1C_2$, $B_2C_1$, $C_1D_2$, $C_2D_1$ u. s. w. dagegen verschieben ihre Endpunkte bei einer Veränderung des Winkels $\alpha$ von selbst auf den Schenkeln.

Wird der Schenkel $AB_1$ festgehalten, der andere bewegt, so beschreiben die Punkte $M_1 M_2, \ldots$ algebraische und zwar unikursale Kurven mit $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ als Parameter. Die Kurve von $M_1$ bestimmt sich z. B. aus den Gleichungen ($A$ Ursprung, $AB_1$ positive $x$-Axe des Koordinatensystems):

$$(AM_1) \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = m,$$

$$(B_1M_1) \quad \frac{y}{x-a} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Schafft man hieraus vermittelst der bekannten Beziehung:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4m(1-m^2)}{1-6m^2+m^4}$$

den Winkel $\alpha$ heraus und lässt die triviale Lösung $y = 0$ ausser Betracht, so erhält man als Gleichung des gesuchten Ortes:

$$3x^4 + 2x^2y^2 - y^4 - 4ax^3 + 4axy^2 = 0.$$

Durch das beschriebene Instrument sind alle Dreieckskonstruktionen aus Seiten, Höhen, Mittellinien, Radien des Umkreises, der In- und Ankreise, aus inneren und äusseren Winkelhalbierenden lösbar. Nur die inneren Winkelhalbierenden für sich machen eine Ausnahme (eine Mitteilung des Verfassers hierüber wird im nächsten Hefte dieser Zeitschrift erscheinen). Der praktische Zeichner (z. B. Musterzeichner oder Ornamentenzeichner) wird damit beliebige Kreisbogen teilen und so leichter Verzierungen entwerfen können.

---

## Zur Theorie der Gleichung $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\Delta\varphi$ auf Grund der Kirchhoffschen Gleichung für das Huyghenssche Prinzip.

Von **J. Jung** in Prag.

Nach dieser Gleichung giebt alle, gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllende Lösungen von

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\Delta\varphi \tag{1}$$

in einem Raumteil $T$ mit der Begrenzung $s$ das Integral:

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi_0 = \frac{1}{4\pi}\int_s ds \\ &\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} P\left(t-\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{ar}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial P\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial t} - \frac{1}{r} Q\left(t-\frac{r}{a}\right)\right)\end{aligned}\right.$$

wo $P$, $Q$ bloss alle diejenigen Paare von mit $t$ veränderlichen Wertverteilungen über $s$ zu sein brauchen, bei denen

$$\varphi_0 = 0 \tag{2}$$

für alle Punkte 0 ausserhalb $T$.



Trifft 2) nicht zu, dann giebt $P, Q$ durch $\varphi_0$ zwar auch stets eine Lösung von 1) im ganzen Raume, aber in $T$ nichts Neues gegenüber den Paaren gemäss 2). — Die Werte $\varphi_0$ ausserhalb $T$ sind die stetige Fortsetzung der inneren, falls nicht $P = 0$.

Dies und die weiteren Betrachtungen sind Nachbildungen der Poincaréschen über die Gleichung:

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0.$$

(„Mathematische Theorie des Lichtes", übersetzt von Gumlich und Jaeger, 1894, S. 73 flg.)

Denn sind $\xi = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$ zwei rechtwinklige Kurvenscharen auf $s$, und ist $\alpha$ ein Punkt unendlich nahe dem $s$-Punkte $\gamma$ auf deren Normale ausserhalb $T$ und $\beta$ ein solcher in $T$, so gilt beim Überschreiten von $s$:

$$3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial^{p+q+r}\varphi_0}{\partial\xi^p\,\partial\eta^q\,\partial n^r}\right)_\beta - \left(\frac{\partial^{p+q+r}\varphi_0}{\partial\xi^p\,\partial\eta^q\,\partial n^r}\right)_\alpha \\ &= \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^{p+q}(\delta^\varrho P)}{\partial\xi^p\,\partial\eta^q}\right)_\gamma & \text{für } r = 2\varrho \\[2ex] \left(\dfrac{\partial^{p+q}(\delta^\varrho Q)}{\partial\xi^p\,\partial\eta^q}\right)_\gamma & \text{für } r = 2\varrho + 1, \end{cases} \end{aligned} \right.$$

wo

$$\delta \equiv \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}.$$

Dabei ist $\delta^0 P = P$. 3) ergiebt sich, wenn nach Herleitung von

$$4)\qquad (\varphi_0)_\beta - (\varphi_0)_\alpha = (P)_\gamma,\quad \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\right)_\beta - \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\right)_\alpha = (Q)_\gamma$$

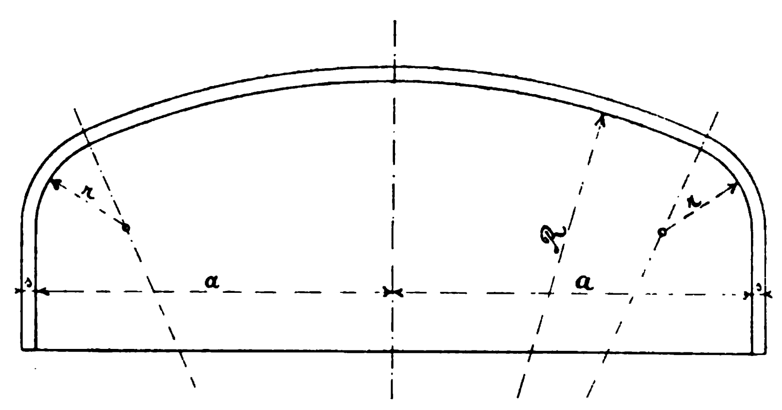
— unter $\varrho = 0$ in 3) enthalten — die Unabhängigkeit des $\Delta$ vom Koordinatensystem und der Bestand von 1) für $\varphi_0$ beiderseits von $s$ beachtet wird. $\dfrac{\partial}{\partial\xi}$ z. B. links in 3) bedeutet die Differentiation in der Richtung parallel der Tangente an $\eta = \text{const.}$ durch $\gamma$.

4) zeigt, dass 2) nicht bloss notwendig, sondern auch hinreichend ist zu stetiger Fortsetzbarkeit eines gegebenen $P$ gemäss 1) in $T$ hinein derart, dass der Differentialquotient der Fortsetzung nach $n$ längs $s$ zur gegebenen Wertverteilung $Q$ wird. Denn beim Bestand von 2) verschwinden die Subtrahenden links in den Gleichungen 4).

## Aufgabe 2.*

Von C. B.

Der gewölbte, einen Umdrehungskörper bildende Boden — vergl. Abbildung — schliesst einen Hohlcylinder von der Lichtweite $2(a+s)$, mit dem er durch Nietung verbunden ist, ab. Die Meridianlinie der Innenfläche des Bodens setzt sich zusammen: aus den zwei Kreisbögen von den Halbmessern $R$ bezw. $r$ und aus einer Geraden, welche im Abstande $a$ von der Umdrehungsaxe liegt und den Kreisbogen vom Halbmesser $r$ berührt. Die



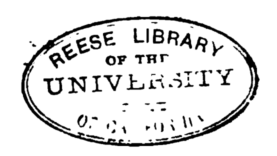

Wandstärke des Bodens ist $s$. In dem Hohlcylinder befindet sich eine Flüssigkeit von der Pressung $p_i\,kg/qcm$, ausserhalb desselben eine solche von der Pressung $p_a$, sodass der Boden einem inneren Überdruck $p_i - p_a$ ausgesetzt ist.

Es wird verlangt:

1. Bestimmung der elastischen Fläche, in welche die ursprüngliche Mittelfläche unter Einwirkung von $p_i$ und $p_a$ übergeht,
2. Die Ermittelung der Anstrengung des Bodens an einer beliebigen Stelle,
3. Bestimmung des Ortes und der Grösse der stärksten Inanspruchnahme, welche in dem Boden auftritt.

---

* Vergl. Anmerkung 3, Heft 1, S. 63 dieses Bandes.



# Der kubische Kreis mit Doppelpunkt.

Von

Dr. Chr. Beyel

in Zürich.

Ein Kreis wird bekanntlich durch zwei projektivische Büschel hervorgebracht, für welche der Winkel von zwei Strahlen des einen Büschels der Grösse und dem Sinne nach gleich dem Winkel der entsprechenden Strahlen ist. Eine Verallgemeinerung dieser Erzeugungsweise führt zu Kurven $n^{ter}$ Ordnung mit einem $n-1$fachen Punkte. Wir untersuchen unter diesen Kurven eine solche von der dritten Ordnung, welche als eine der einfachsten Typen einer Kurve dritter Ordnung betrachtet werden kann. Wir stellen diese Kurve mit Hilfe von Zirkel und Lineal dar und leiten dabei eine Reihe von Eigenschaften ab. Um uns bei dieser Darstellung einfach ausdrücken zu können, wollen wir die Kurve mit $K^3$ bezeichnen und kubischen Kreis mit Doppelpunkt nennen. Der Gang unserer Überlegungen wird zeigen, dass dieser Name durch manche Analogien der Kurve mit dem Kreise gerechtfertigt wird.

Wir schicken unserer Untersuchung einige Bezeichnungen voraus, welche oft wiederkehrende Gebilde durch ein Symbol auszudrücken gestatten. Wir bezeichnen mit:

$S_b$, $S_d$ Strahlenbüschel mit den Scheiteln $B, D$. $b$, $d$ seien resp. Strahlen der Büschel.

$(D)$, $(B)$ seien Kreise mit den Mittelpunkten $D$, $B$.

$(D)\,A$ sei ein Kreis durch $A$, dessen Mittelpunkt $D$ ist.

$(D)\,a$ sei ein Kreis aus $D$, welcher die Linie $a$ berührt.

$[A]$, $[AB]$, $[ABC]$ seien Kreise durch $A$, $AB$, $ABC$.

$[Aa]$ sei ein Kreis, der $a$ in $A$ berührt.

$[ABb]$ sei ein Kreis durch $A$ und $B$, welcher $b$ in $B$ berührt.

$J_g$ sei eine Punkteinvolution auf der Geraden $g$.

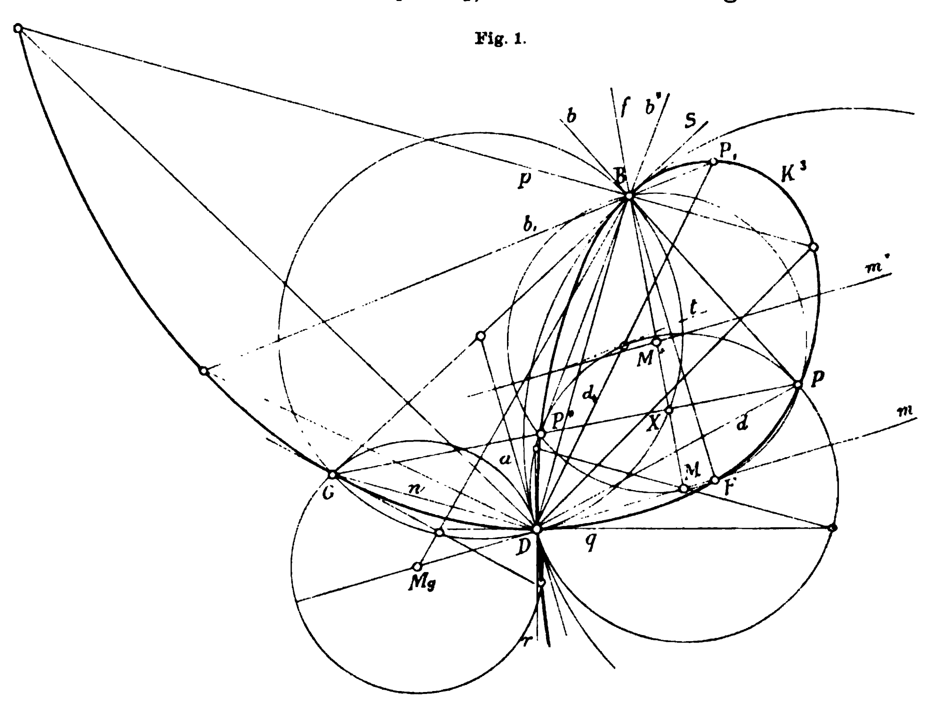
$J_d$ sei eine Strahleninvolution am Scheitel $D$.

# I.

1. Wir gehen von zwei Strahlenbüscheln $S_d$ und $S_b$ aus. Wir ordnen die Strahlen der Büschel in der Weise einander zu, dass je zwei Strahlen des Büschels $S_b$ einen Winkel einschliessen, der gleichgerichtet und doppelt so gross ist wie der Winkel der entsprechenden Strahlen des Büschels $S_d$. Diese Zuordnung wird durch ein entsprechendes Paar $d$, $b$ bestimmt. Wir beweisen, dass sich entsprechende Strahlen beider Büschel in Punkten einer Kurve dritter Ordnung schneiden und diese Kurve ist $K^3$ (Fig. 1).

Um den Beweis zu führen, legen wir durch den Schnittpunkt $P$ von $d$ und $b$ einen Kreis $[DPb]$, welcher durch $D$ geht und $b$ in $P$

Fig. 1.




berührt. Wir benutzen diesen Kreis zur Konstruktion weiterer Strahlenpaare der Büschel. Soll etwa zu $d_1$ der entsprechende Strahl $b_1$ gefunden werden, so zeichnen wir im zweiten Schnittpunkte von $d_1$ mit $[DPb]$ die Tangente $t$. Wir ziehen durch $B$ eine Parallele zu $t$. Diese ist $b_1$ weil

$$\sphericalangle\, dd_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle\, bt = \frac{1}{2} \sphericalangle\, bb_1.$$

Suchen wir zu $b_1$ den Strahl $d_1$, so ziehen wir an $[DPb]$ die Tangenten, welche parallel $b_1$ sind und zeichnen ihre Berührungspunkte. Durch jeden dieser Punkte und $D$ geht ein Strahl, welcher $b_1$ entspricht.

Aus dieser Konstruktion schliessen wir, dass jedem Strahle $d$ ein Strahl $b$ entspricht. Jedem Strahle $b$ korrespondieren aber zwei Strahlen von $S_d$. Die zwei Büschel stehen also in einer einzweideutigen Beziehung. Folglich ist der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine Kurve dritter Ordnung. $D$ ist ein Doppelpunkt; $B$ ist ein einfacher Punkt von $K^3$.

2. Wir ziehen aus der Darstellung von $K^3$ mit Hilfe von $[DPb]$ einige Schlüsse. Jeder Durchmesser $m$ von $[DPb]$ schneidet diesen Kreis in zwei Punkten, deren Tangenten zu einander parallel sind. Der Parallelstrahl $b^*$ durch $B$ zu diesen Tangenten entspricht also den zwei Strahlen $d^*$, $d_1^*$, welche durch die Berührungspunkte der Tangenten gehen. Dreht sich $m$ um den Mittelpunkt $M$ von $[DPb]$, so bilden die Strahlenpaare $d^* d_1^*$ eine Rechtwinkelinvolution $J_d$. Ihre Paare sind durch $K^3$ den Strahlen des Büschels $S_b$ eindeutig zugeordnet. Wir charakterisieren diese Zuordnung näher, indem wir sie für die Doppelstrahlen von $J_d$ untersuchen. Im allgemeinen entsprechen ihnen Strahlen durch $B$, welche in den resp. Schnittpunkten mit den Doppelstrahlen die Kurve $K^3$ berühren. In unserem Falle schneiden diese Doppelstrahlen den Kreis $[DPb]$ in den imaginären Kreispunkten. Ziehen wir durch $B$ zu den Tangenten in diesen Punkten die Parallelen $b^*$, so gehen sie ebenfalls durch die imaginären Kreispunkte und treffen also in diesen die entsprechenden Strahlen $d^*$. Folglich berühren die Geraden $b^*$ die Kurve $K^3$ in den imaginären Kreispunkten. Wir schliessen daher:

Ordnen wir die Paare einer Rechtwinkelinvolution den Strahlen eines Büschels in der Weise eindeutig zu, dass die Doppelstrahlen der Involution aus den entsprechenden Strahlen des Büschels die imaginären Kreispunkte schneiden, so entsteht der kubische Kreis mit Doppelpunkt. Er ist zirkular und die Tangenten an $K^3$ in den imaginären Kreispunkten schneiden sich in einem Punkte $B$ der Kurve.

Wir nennen diesen ausgezeichneten Punkt $B$ der Kurve Brennpunkt.

Wir bemerken noch, dass die Zuordnung zwischen $J_d$ und $S_b$ durch ein Paar der Rechtwinkelinvolution und den entsprechenden Strahl des Büschels bestimmt wird.

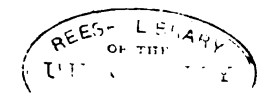
3. Die bewiesenen Darstellungen von $K^3$ führen zu weiteren Eigenschaften der Kurve.

Bezeichnen wir die Strecke zwischen zwei Punkten von $K^3$, welche — ausser $B$ — auf einer Geraden durch $B$ liegen, als Brennpunktsehne, so folgt:

Jede Brennpunktsehne erscheint vom Doppelpunkte aus unter rechtem Winkel.

Zwei Brennpunktsehnen, welche aufeinander senkrecht stehen, seien zu einander konjugiert. Dann ergiebt sich aus den Winkeleigenschaften, welche die Erzeugung von $K^3$ definierten (1):





Wird eine Brennpunktsehne vom Doppelpunkte $D$ aus durch das Rechtwinkelpaar $dd_1$ projiziert, so muss die konjugierte Sehne von $D$ aus durch die Halbierungslinien von $dd_1$ projiziert werden.

Aus diesem Satze schliessen wir, dass $B$ im allgemeinen Falle keine Brennpunktsehne halbiert; denn läge $B$ in der Mitte einer Brennpunktsehne, so müssten nach bekannten Kreiseigenschaften die Endpunkte dieser und der konjugierten Sehne mit $D$ auf einem Kreise liegen, der $B$ zum Mittelpunkte hat. Dann ist dieser Kreis ein Teil der Kurve $K^3$, d. h. diese Kurve degeneriert.

In der Projektivität von $J_d$ und $S_b$ korrespondieren im allgemeinen dem Verbindungsstrahle der Scheitel die resp. Tangenten in diesen Scheiteln. Daraus folgt für $K^3$:

Die Tangenten $qr$ im Doppelpunkte von $K^3$ stehen zu einander senkrecht und gehen durch die zwei Punkte, welche der zu $DB$ senkrechte Durchmesser von $[DPb]$ aus diesem Kreise schneidet.

Für die Tangente $s$ in $B$ folgt:

$DB$ schneidet $[DPb]$ zum zweiten Male in einem Punkte, dessen Tangente parallel $s$ ist.

Nun bildet die Tangente $a$ in $D$ an $[DPb]$ mit $DB$ denselben Winkel wie die Tangente im zweiten Schnittpunkte von $DB$ mit dem Kreise $[DPb]$. Also folgt:

Die Tangente $a$ in $D$ an $[DPb]$ und die Tangente $s$ in $B$ an $K^3$ sind Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basis $DB$ ist.

Der Tangente $s$ entspricht in der Projektivität von $J_d$ und $S_b$ ausser $DB$ noch die Gerade $n$, welche in $D$ zu $DB$ senkrecht steht. Folglich schneidet $n$ aus $s$ einen Punkt $G$ von $K^3$.

Der Tangente $a$ in $D$ an $[DPb]$ entspricht eine Parallele durch $B$. Daraus folgt:

Der reelle unendlich ferne Punkt von $K^3$ liegt auf $a$.

Spezialisieren wir das Gesetz über konjugierte Brennpunktsehnen für $qr$ und $BD$, so folgt:

Die Normale $p$ in $B$ zu $BD$ wird von den Halbierungslinien des Winkels $qr$ in zwei Punkten der Kurve $K^3$ getroffen.

Der Geraden $m$ des Büschels $S_d$, welche durch den Mittelpunkt $M$ des Kreises $[DPb]$ geht, entspricht eine Linie $f$, welche zu $m$ senkrecht steht. Daraus schliessen wir:

Fällen wir aus $B$ die Senkrechte auf $m$, so liegt ihr Fusspunkt $F$ auf $K^3$.

Durch $B$ geht — ausser $b$ — eine zweite Tangente $b^*$ an $[DPb]$. Der Strahl des Büschels $S_d$, welcher dieser Tangente entspricht, muss durch ihren Berührungspunkt $P^*$ gehen. Folglich liegt $P^*$ auf $K^3$.

4. Indem wir $K^3$ aus dem Kreise $[DPb]$ konstruierten, haben wir angenommen, dass dieser Kreis durch einen beliebigen Punkt $P$ von $K^3$ geht. Es giebt also unendlich viele Kreise, aus denen $K^3$ in gleicher Weise konstruiert werden kann. Alle diese Kreise haben in $D$ dieselbe Tangente $a$, weil $a$ parallel zu der reellen Asymptote von $K^3$ ist. Sie bilden ein Büschel von Kreisen $[Da]$ und wir untersuchen nun die Beziehungen dieses Büschels zu $K^3$.

Wir haben gesehen, dass die Tangenten durch $B$ an $[DPb]$ diesen Kreis in Punkten $P, P^*$ von $K^3$ berühren. Verallgemeinern wir dies für die Kreise $[Da]$, so folgt:

Konstruieren wir aus einem Punkte $B$ die Tangenten an die Kreise eines Büschels $[Da]$, so ist $K^3$ der Ort der Berührungspunkte.

Wir erhalten die Berührungspunkte, indem wir über $B$ und den resp. Mittelpunkten $M$ der Kreise $[Da]$ die Kreise $[MB]$ beschreiben. Die Mittelpunkte aller Kreise $[Da]$ liegen auf $m$. Also liegen die Mittelpunkte der Kreise $[MB]$ auf einer Linie $m^*$ parallel $m$, welche die Entfernung $Bm$ halbiert. Folglich bilden die Kreise $[MB]$ ein Büschel, welches $B$ und $F$ zu Grundpunkten hat. Wir können daher $K^3$ auch durch zwei Kreisbüschel wie folgt ableiten:

Gegeben sei ein Kreisbüschel $[Da]$ und ein zweites $[BF]$. Die Centrale des ersten Büschels stehe in $F$ zu derjenigen des zweiten Büschels senkrecht. Konstruieren wir einen Kreis $[BF]$ durch den Mittelpunkt eines Kreises $[Da]$, so liegen die gemeinsamen Punkte beider Kreise auf $K^3$.

Die Berührungspunkte $PP^*$ der Tangenten, welche aus $B$ an einen Kreis $[Da]$ gehen, liegen auf einem Kreise $(B)$. Dieser steht zum Kreise $[Da]$ senkrecht. Wir finden daher $K^3$ auch nach folgendem Gesetze:

Konstruieren wir zu jedem Kreise $(B)$ eines konzentrischen Büschels den orthogonalen Kreis, welcher eine gegebene Gerade $a$ in einem gegebenen Punkte $D$ berührt, so liegen die Schnittpunkte dieser Kreispaare auf einer Kurve $K^3$.

Für besondere Kreise der erwähnten Büschel ergiebt sich noch:

Der Kreis $[Da]$ durch $B$ berührt in $B$ die Kurve $K^3$. Der Punkt $B$ erscheint als Nullkreis der Kreise $(B)$ und berührt als solcher $K^3$ dreifach u. z. in $B$ und in den imaginären Kreispunkten.

5. Wir wenden uns nochmals zum Büschel der Kreise $[Da]$. Ziehen wir durch $B$ die Tangenten an einen Kreis des Büschels, so liegen ihre Berührungspunkte $PP^*$ (Fig. 1) auf der Polare von $B$ in Bezug auf den Kreis. Nach einem bekannten Satze gehen aber die Polaren eines Punktes in Bezug auf die Kreise eines Büschels durch einen Punkt. Dieser liegt auf $s$; denn $s$ ist die Polare von $B$ in Bezug auf den Kreis $[DaB]$ des Büschels. Ferner liegt dieser Punkt auf

der Polare von $B$ in Bezug auf den Nullkreis $D$ des Büschels. Diese Polare steht in $D$ zu $BD$ senkrecht, d. h. sie fällt mit $n$ zusammen. Folglich ist der Schnittpunkt $G$ von $n$ und $s$ derjenige Punkt, durch welchen die Polaren von $B$ gehen. Sie bilden ein Strahlenbüschel $S_g$. Zu jedem Kreise $[Da]$ gehört ein Strahl $g$ des Büschels. Derselbe steht zu der Linie senkrecht, welche $B$ mit dem Mittelpunkte $M$ von $[Da]$ verbindet. Dreht sich jetzt $g$ um $G$, so gehört zu jeder Lage von $g$ eine Normale durch $B$. Der Ort der Schnittpunkte dieser entsprechenden Geraden ist ein Kreis. $G$ und $B$ sind die Endpunkte eines Durchmessers. $D$ liegt auf dem Kreise, weil

$$\sphericalangle\, GDB = 90^0.$$

Sein Mittelpunkt ist der Schnitt von $s$ mit $a$, weil dieser Punkt die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks ist, welches $BD$ zur Basis hat. $m$ berührt den Kreis, weil $m \perp a$. Benutzen wir $[DBG]$ um die Zuordnung der Linien $g$ zu den Kreisen $[Da]$ zu vermitteln, so gelangen wir zu folgender allgemeinen Konstruktion von $K^3$.

*$B$, $G$ seien die Endpunkte eines Kreisdurchmessers. $D$ sei ein beliebiger Punkt der Peripherie und $m$ sei die Tangente in $D$. Verbinden wir irgend einen Punkt $X$ des Kreises mit $B$ und $G$ und konstruieren wir aus dem Schnittpunkte $M$ von $BX$ mit $m$ einen Kreis durch $D$, so schneidet er $GX$ in zwei Punkten von $K^3$.*

Dem Kreise $[GDa]$ korrespondiert in der abgeleiteten Zuordnung die Tangente in $G$ an $K^3$. Daraus folgt: *Verbinden wir den Mittelpunkt $M_g$ des Kreises $[GDa]$ mit $B$, so schneidet diese Linie aus dem Kreise $[DBG]$ einen Punkt der Geraden, welche $K^3$ in $G$ berührt. Diese Tangente trifft den Kreis $[GDa]$ zum zweiten Male in einem Punkte von $K^3$* (Fig. 1).

## II.

6. Wir stellen der in 1. entwickelten Konstruktion von entsprechenden Paaren der Büschel $S_d$, $S_b$ eine neue an die Seite.

Es sei wieder $db$ ein entsprechendes Paar, welches sich im Punkte $P$ von $K^3$ schneidet (Fig. 2). Wir suchen $b_1$ zu $d_1$. Wir zeichnen zu diesem Zwecke den symmetrischen Strahl $d_2$ zu $d_1$ in Bezug auf $d$. Dann ziehen wir durch $P$ eine Parallele $d_2^*$ zu $d_2$, welche $d_1$ in $H$ treffe. Wir konstruieren den Kreis $[PHB]$. Er schneide $d_1$ zum zweiten Male in $Q$. Nun ist

$$\sphericalangle\, PHQ = 2 \cdot \sphericalangle\, dd_1 = PBQ$$

oder

$$2 \sphericalangle\, dd_1 = \sphericalangle\, bb_1.$$

Folglich ist $BQ$ die gesuchte Linie $b_1$ und $Q$ liegt auf $K^3$.

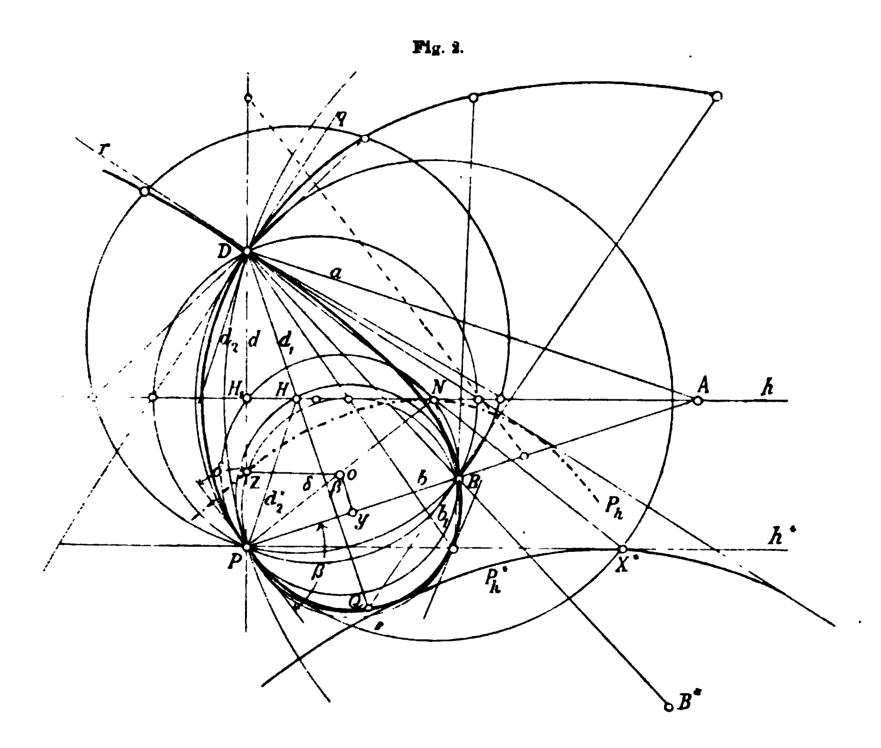
Halten wir jetzt die Linie $d$ fest, während $d_1$ sich um $D$ dreht, so bestimmt jede Lage von $H$ mit $DP$ als Basis ein gleichschenkliges

Dreieck. Die Kreise durch $HPB$ bilden ein Büschel mit den Grundpunkten $PB$. $K^3$ entsteht also in folgender Weise:

$DP$ sei die gemeinschaftliche Basis von gleichschenkligen Dreiecken. $B$ sei ein beliebiger Punkt, der nicht auf $DP$ liegt. Dann schneidet jeder Kreis des Büschels $[BP]$, welcher durch die Spitze $H$ eines Dreiecks geht, aus der Seite $DH$ dieses Dreiecks einen Punkt von $K^3$.

Die Spitzen aller Dreiecke $DPH$ liegen auf einer Geraden $h$, welche in der Mitte von $DP$ zu dieser Linie senkrecht steht. $h$ schneidet

Fig. 2.




jeden Kreis des Büschels $[BP]$ in zwei Punkten. Daraus ergiebt sich folgende Darstellung von $K^3$:

Sei $h$ eine beliebige Gerade, zu welcher die Punkte $P$, $D$ orthogonal symmetrisch liegen, so machen wir $P$ und einen beliebigen Punkt $B$, der nicht auf $PD$ liegt, zu Grundpunkten eines Kreisbüschels $[BP]$. Projizieren wir die Schnittpunkte eines Kreises $[BP]$ mit $h$ aus $D$ auf den Kreis, so erhalten wir zwei Punkte von $K^3$.

Unter den Kreisen des Büschels $[BP]$ giebt es im allgemeinen zwei, welche $h$ berühren. Projizieren wir den Berührungspunkt eines solchen Kreises aus $D$ auf den Kreis zurück, so gelangen wir zu einem Punkte von $K^3$, in welchem diese Kurve von dem Kreise berührt wird.

7. Der Kreis des Büschels $[BP]$, welcher durch den Schnittpunkt $H_1$ von $h$ und $DP$ geht, führt zur Konstruktion von Tangenten und Normalen in Punkten von $K^3$. Bei diesem Kreise fallen nämlich in $P$ zwei benachbarte Punkte zusammen. Der Kreis berührt $K^3$ in $P$ und es folgt:

Der Kreis, welcher durch $B$ und einen beliebigen Punkt $P$ von $K^3$ sowie durch die Mitte der Strecke $DP$ geht, berührt $K^3$ in $P$.

Errichten wir in den Mitten $Y$ und $Z$ von $PB$ und $PH_1$ die Senkrechten (Fig. 2), so schneiden diese sich im Mittelpunkte $O$ des Berührungskreises. Seien $\beta$, $\delta$ die Winkel, welche die Tangente in $P$ resp. mit $b$, $d$ einschliesst, so ist:

$$\frac{\sin\delta}{\sin\beta} = \frac{PZ}{PY} = \frac{\frac{1}{4}PD}{\frac{1}{2}PB} = \frac{PD}{2PB},$$

das heisst:

Der Sinus des Winkels, den die Tangente in $P$ mit $d$ bildet, verhält sich zum Sinus des Winkels zwischen Tangente und $b$ wie der Abstand $DP$ zum doppelten Abstande $BP$.

Daraus ergiebt sich folgende Tangentenkonstruktion: Wir tragen $PD$ von $P$ aus in der Richtung $PB$ auf $b$ ab und $2PB$ von $P$ aus in der Richtung $PD$ auf $d$. Wir verbinden die Endpunkte. Dann ist die Tangente in $P$ zu dieser Verbindungslinie parallel.

Errichten wir in $B$ eine Senkrechte zu $PB$, so muss diese $h$ in einem Punkte $N$ der Kurvennormalen $PO$ schneiden; denn

$$PH_1 = 2PZ \quad \text{und} \quad PB = 2PY.$$

Also folgt:

Das Stück $PN$ der Kurvennormalen in $P$, welches zwischen $P$ und dem Schnittpunkte $N$ mit $h$ liegt, wird von $B$ aus unter rechtem Winkel gesehen.

8. Ein Kreis des Büschels $[PB]$ zerfällt in die unendlich ferne Gerade und die Linie $PB$. Projizieren wir den Schnittpunkt $A$ von $h$ und $PB$ aus $D$ auf die unendlich ferne Gerade, so erhalten wir also den reellen unendlich fernen Punkt von $K^3$. $DA$ giebt folglich die Richtung dieses Punktes an und fällt mit der oben (4) gefundenen Linie $a$ zusammen. Dreht sich jetzt $b$ um $B$, so bleibt $a$ fest und $A$ durchläuft $a$. Dabei ist stets $AD = AP$. Mithin kann $K^3$ wie folgt hervorgebracht werden:

Gegeben sei ein Punkt $D$, eine Gerade $a$ durch $D$ und ein beliebiger Punkt $B$, der nicht auf $a$ liegt. Konstruieren wir aus irgend einem Punkte $A$ von $a$ einen Kreis durch $D$, so schneidet er die Linie $AB$ in zwei Punkten von $K^3$.

Daraus schliessen wir weiter:

Die Mitten aller Brennpunktsehnen von $K^3$ liegen auf der Geraden, welche den Doppelpunkt mit dem reellen unendlich fernen Punkte von $K^3$ verbindet.

Einer der Kreise $[PB]$ geht durch $D$. Er schneidet $h$ in zwei Punkten. Projizieren wir diese aus $D$ auf den Kreis zurück, so fallen die Projektionen mit $D$ zusammen. Folglich berühren die Projektionsstrahlen $qr$ die Kurve $K^3$ in $D$. Wie wir auch $P$ wählen, stets erhalten wir dieselben Linien $qr$. Daraus schliessen wir umgekehrt, dass jeder Kreis $[PBD]$ aus den Geraden $qr$ zwei Punkte schneidet, deren Verbindungslinie die zu $P$ gehörende Gerade $h$ ist, welche in der Mitte zwischen $P$ und $D$ liegt. Benutzen wir diese Eigenschaft zur Konstruktion von $P$, so folgt:

Sind $DB$ die Grundpunkte eines Kreisbüschels und $qr$ die Schenkel eines rechten Winkels, dessen Spitze in $D$ liegt, so schneidet jeder Kreis des Büschels aus $q$, $r$ zwei weitere Punkte. Zeichnen wir zu $D$ den orthogonal symmetrischen Punkt $P$ in Bezug auf die Verbindungslinie $h$ dieser zwei Punkte, so ist $K^3$ der Ort der Punkte $P$.

9. Jedem Punkte $P$ von $K^3$ ist eine Linie $h$ zugeordnet. Diese Linien $h$ sind Durchmesser der resp. Kreise $[PBD]$ und erscheinen also von $B$ aus unter rechtem Winkel. Sie umhüllen daher eine Parabel $P_h$, welche $B$ zum Brennpunkte und $qr$ zu Tangenten hat.

Weil $q$ zu $r$ senkrecht steht, liegt $D$ auf der Direktrix von $P_h$. Soll $K^3$ aus $P_h$ abgeleitet werden, so geschieht dies also in folgender Weise:

Wir zeichnen zu einem Punkte $D$, welcher auf der Direktrix der Parabel liegt, die orthogonal symmetrischen Punkte in Bezug auf die Tangenten der Parabel. $K^3$ ist Ort dieser Punkte.

Aus dieser Darstellung von $K^3$ ergiebt sich eine andere, bei welcher $K^3$ als eine besondere Fusspunktkurve einer Parabel erscheint. Ziehen wir nämlich durch jeden Punkt $P$ von $K^3$ eine Parallele $h^*$ zu dem $h$, welches $P$ entspricht, so umhüllen diese Linien $h^*$ eine neue Parabel $P_h^*$, welche $q$ und $r$ berührt. $D$ liegt auch auf der Direktrix von $P_h^*$. Also folgt:

$K^3$ ist die Fusspunktkurve einer Parabel $P_h^*$ für einen Punkt $D$ der Direktrix dieser Parabel.

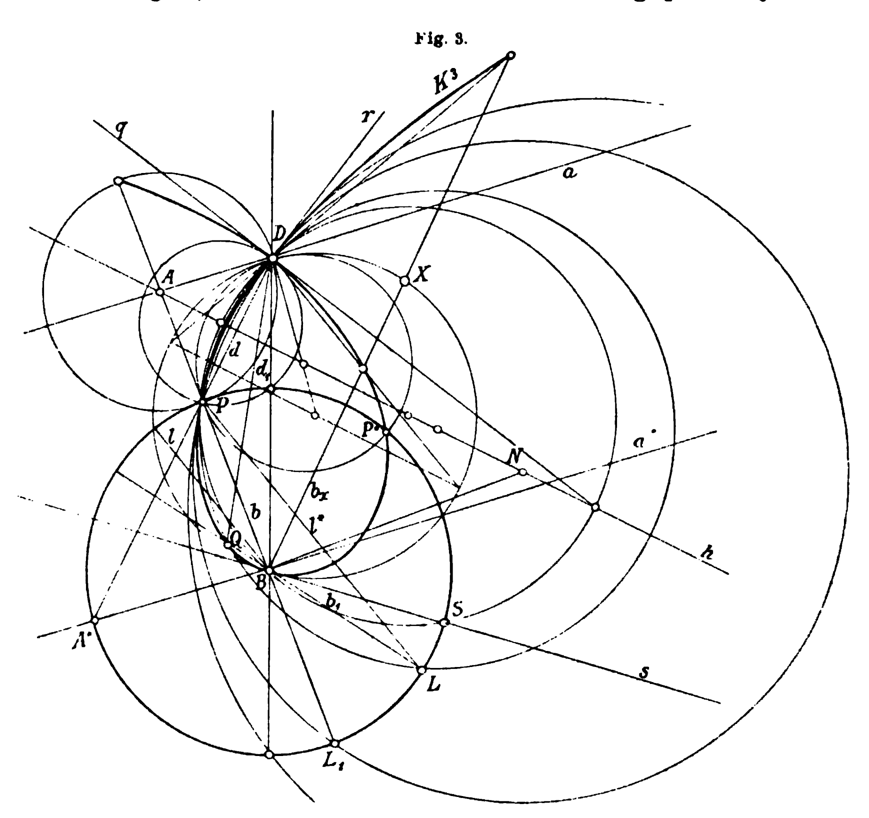
Wir ziehen aus dieser Darstellung noch einige Schlüsse. Durch einen beliebigen Punkt $X$ der Ebene gehen zwei Tangenten an $P_h^*$. Fällen wir auf diese Linie aus $D$ die Senkrechten, so liegen ihre Fusspunkte auf $K^3$. Diese Fusspunkte liegen also auch auf einem Kreise, welcher $DX$ zu einem Durchmesser hat. Nehmen wir nun an, dass $X^*$ ein Punkt der Parabel sei, so fallen die zwei Tangenten an $P_h^*$ zusammen. Der Kreis über $DX^*$ muss $K^3$ berühren. Allgemein heisst dies:

Konstruieren wir über $D$ und einem Punkte $X^*$ der Parabel $P_h^*$ einen Kreis, so berührt dieser $K^3$ in seinem zweiten Schnittpunkte mit der Geraden, welche in $X^*$ die Parabel tangiert.

Die Mittelpunkte $N$ der Kreise $[DX^*]$ halbieren die Strecken $DX^*$ und liegen also auf der ursprünglichen Parabel $P_h$. Daraus folgt:

Alle Kreise, welche durch einen festen Punkt $D$ auf der Direktrix einer Parabel $P_h$ gehen und deren Mittelpunkte auf $P_h$ liegen, umhüllen $K^3$. Der Berührungspunkt je eines

Fig. 3.




Kreises liegt orthogonal symmetrisch zu $D$ in Bezug auf die Tangente der Parabel, welche im Mittelpunkte des Kreises berührt.

## III.

10. Wir entwickeln in Anknüpfung an die ursprüngliche (1) Definition von $K^3$ eine weitere Konstruktion (Fig. 3). Seien wieder $db$, $d_1 b_1$ entsprechende Paare von $S_d$, $S_b$, welche sich in den resp. Punkten $P$, $Q$ von $K^3$ schneiden, so ist $\sphericalangle\, dd_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle\, bb_1$. Wir ziehen durch $B$ eine Gerade $l$, welche den Winkel $bb_1$ halbiert.

Es ist also: $\sphericalangle\, bl_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle\, bb_1 = \sphericalangle\, dd_1.$

$l^*$ sei die Parallele durch $P$ zu $l$. Sie schneide $b_1$ in $L$. Dann ist

$$\sphericalangle\, l^* b_1 = \sphericalangle\, dd_1 \quad \text{oder} \quad \sphericalangle\, PDQ = \sphericalangle\, PLQ,$$

d. h. die vier Punkte $PDQL$ liegen auf einem Kreise. Ferner ist

$$\sphericalangle\, l^* b = \sphericalangle\, l^* b_1.$$

Daraus folgt $BP = BL$.

Halten wir nun den Punkt $P$ fest, während sich $b_1$ um $B$ dreht so durchläuft der Punkt $L$ einen Kreis $(B)$ mit dem Radius $BL = BP$. Mit Hilfe dieses Kreises finden wir auf irgend einer Geraden $b_1$ durch $B$ zwei Punkte von $K^3$, indem wir die Schnittpunkte $LL^*$ von $b_1$ mit $(B)$ bestimmen. Legen wir einen Kreis durch $DPL$ und einen zweiten durch $DPL^*$, so schneidet jeder dieser Kreise aus $b_1$ einen zweiten Punkt, der auf $K^3$ liegt. Alle Kreise $[DP]$ bilden ein Büschel. $K^3$ entsteht aus diesem Büschel und dem Kreise $(B)$ in folgender Weise:

Gegeben sei ein Kreis $(B)$ und ein Kreisbüschel $[DP]$, dessen Grundpunkt $P$ auf $(B)$ liegt. Durch jeden Punkt $L$ von $(B)$ geht ein Kreis des Büschels. Er wird vom Durchmesser $BL$ des Kreises $(B)$ zum zweiten Male in einem Punkte von $K^3$ geschnitten.

Wir heben einige Kreise des Büschels $[DP]$ hervor.

Ein Kreis $[DP]$ steht im Punkte $P$ zum Kreise $(B)$ normal und schneidet $(B)$ zum zweiten Male in einem Punkte $P^*$, dessen Tangente durch $B$ geht. Folglich liegt $P^*$ auf $K^3$ und wir schliessen:

Zwei Punkte von $K^3$, welche auf einem Kreise aus $B$ liegen, sind auch auf einem Kreise durch $D$ gelegen, welcher zum Kreise $(B)$ senkrecht steht (4).

Konstruieren wir die zwei Kreise $[DP]$, welche durch die zwei Schnittpunkte der Geraden $DB$ mit $(B)$ gehen, so schneidet jeder dieser Kreise aus $K^3$ zwei in $D$ zusammenfallende Punkte. Folglich berühren diese Kreise die Kurve $K^3$ in $D$. Ihre Tangenten sind die Linien $q$, $r$. Weil diese Geraden zu einander senkrecht stehen, müssen auch die zwei erwähnten Kreise zu einander rechtwinklig sein und ihre Mittelpunkte liegen resp. auf $q$ und $r$. Sie liegen ferner auf der Geraden $h$, welche in der Mitte von $PD$ zu $PD$ senkrecht steht und sind also die Schnittpunkte von $h$ mit $q$ und $r$. Durchläuft jetzt $P$ die Kurve $K^3$, so umhüllen die Linien $h$ die Parabel $P_h$ und es folgt:

Konstruieren wir aus den Punkten, in welchen die zwei zu einander senkrechten Parabeltangenten $q$, $r$ von einer dritten Tangente geschnitten werden, die Kreise durch den Schnitt der senkrechten Tangenten, so treffen sich diese Kreise zum zweiten Male in einem Punkte von $K^3$.

11. Ein Kreis des Büschels $[DP]$ zerfällt in $DP$ und die unendlich ferne Gerade. Schneiden wir $DP$ zum zweiten Male mit dem

Kreise $(B)$, so geht durch diesen Schnittpunkt $A^*$ und $B$ eine Linie $a^*$, auf welcher der reelle unendlich ferne Punkt von $K^3$ liegt. Die Linie $a^*$ bleibt für alle Kreise $(B)$ dieselbe. Wir können sie daher zur Konstruktion von $K^3$ benützen und haben folgendes Gesetz:

Gegeben sind zwei Punkte $DB$ und eine Gerade $a^*$ durch $B$. Verbinden wir irgend einen Punkt $A^*$ von $a^*$ mit $D$, so schneidet der Kreis aus $B$ durch $A^*$ die Verbindungslinie zum zweiten Male in einem Punkte von $K^3$.

Führen wir die Konstruktion für je zwei Punkte $A^*$ aus, welche auf einem Kreise $(B)$ liegen, so folgt:

Projizieren wir die zwei Punkte, in welchen ein Kreis $(B)$ die Linie $a^*$ schneidet, auf diesen Kreis zurück, so erhalten wir zwei Punkte von $K^3$.

Unter den Kreisen des Büschels $[DP]$ geht einer durch $B$. Er schneide den Kreis $(B)$ zum zweiten Male in $S$. Dann fallen auf dem Durchmesser $BS$ des Kreises $(B)$ in $B$ zwei benachbarte Punkte von $K^3$ zusammen, d. h. dieser Durchmesser $s$ berührt in $B$ die Kurve $K^3$. Halten wir $s$ fest, während $S$ die Gerade $s$ und $P$ die Kurve $K^3$ durchläuft, so entsteht diese in folgender Weise:

Gegeben sind zwei Punkte $DB$ und eine Gerade $s$ durch $B$. Legen wir durch $D, B$ und einen Punkt $S$ von $s$ einen Kreis, so schneidet er den Kreis $(B)S$ zum zweiten Male in $K^3$.

Sei $L_1$ der zweite Schnittpunkt von $BP$ mit $(B)$, so geht durch $L_1$ ein Kreis des Büschels $[DP]$. Er trifft den Durchmesser $L_1P$ in einem Punkte von $K^3$, welcher mit $P$ zusammenfällt. Also berührt dieser Kreis die Kurve $K^3$ in $P$. Allgemein folgt daraus:

Zeichnen wir zu irgend einem Punkte $P$ von $K^3$ in Bezug auf $B$ den zentrisch symmetrischen Punkt $L_1$, so geht durch ihn, $D$ und $P$, ein Kreis, welcher $K^3$ in $P$ berührt.

Auch aus diesem Satze lässt sich indirekt (wie bei 3) zeigen, dass im allgemeinen keine Brennpunktsehne durch $B$ halbiert wird.

12. Der Durchmesser $BP$ des Kreises $(B)$ muss $K^3$ in einem dritten Punkte schneiden. Wir finden ihn, indem wir den Kreis des Büschels $[DP]$ konstruieren, für welchen in $P$ zwei zusammenfallende Punkte liegen. Dieser Kreis berührt also $(B)$ in $P$. Sein Mittelpunkt ist der Schnitt von $BP$ mit der zu $P$ gehörenden Linie $h$, d. h. der auf $a$ liegende Punkt $A$ (8). Wir haben somit wieder bewiesen, dass ein Kreis $(A)$ durch $D$ die Linie $BA$ in zwei Punkten von $K^3$ trifft.

Konstruieren wir zu $B$ je den vierten harmonischen in Bezug auf ein solches Punktepaar, so können wir zeigen, dass der Ort der vierten harmonischen Punkte ein Kreis ist. Diese Punkte liegen nämlich auf den resp. Polaren des Punktes $B$ in Bezug auf die Kreise $(A)D$. Weil diese Kreise ein Büschel bilden, sind auch die Polaren Strahlen eines Büschels. Jeder Geraden $b$ entspricht ein Strahl des letzteren Büschels. $b$ ist Durchmesser eines Kreises, in Bezug auf welchen der

korrespondierende Strahl Polare ist. Folglich stehen die entsprechenden Strahlenpaare zueinander senkrecht und erzeugen einen Kreis. Derselbe muss — als Ort der erwähnten vierten harmonischen Punkte — die Kurve $K^3$ in $B$ berühren und durch $D$ gehen. Er wird daher in $B$ von $s$ und also in $D$ von $a$ berührt. Es folgt daraus:

Die erste Polare von $B$ in Bezug auf $K^3$ ist der Kreis $[DBa]$.

Ist dieser Kreis bekannt, so lässt sich aus ihm $K^3$ finden. Wir suchen auf jeder Geraden $b_x$ ein Punktepaar, welches von $D$ aus unter rechtem Winkel erscheint und durch $B$, sowie den zweiten Schnittpunkt $X$ von $b_x$ mit $[DBa]$ harmonisch getrennt wird. Ziehen wir durch den Mittelpunkt des Kreises $[DBa]$ eine Senkrechte zu $b_x$, so schneidet diese bekanntlich aus dem Kreise zwei Punkte, welche durch $X$ und $B$ harmonisch getrennt werden. Folglich finden wir $K^3$ auch so:

Wir gehen von einem Kreise aus. $D$, $B$ seien zwei seiner Punkte. Wir ziehen durch $B$ eine beliebige Gerade $b$ und fällen auf sie die Senkrechte aus dem Mittelpunkte des Kreises. Projizieren wir ihre Schnittpunkte mit dem Kreise aus $D$ auf $b$, so erhalten wir zwei Punkte von $K^3$.

13. Aus der Beziehung zwischen $K^3$ und dem Kreise $[BDa]$ ergeben sich noch einige Eigenschaften für die Sehnen und Tangenten von $K^3$.

Schneiden zwei Gerade $b, b_1$ (Fig. 4)* den Kreis $[BDa]$ zum zweiten Male in $XX_1$ und die Kurve $K^3$ resp. in $YZ$, $Y_1Z_1$, so ist

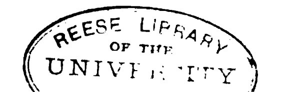
$$(BXYZ) = -1 \quad \text{und} \quad (BX_1Y_1Z_1) = -1.$$

Also müssen sich die Geraden $YY_1$ und $ZZ_1$ in einem Punkte $U$ von $XX_1$ schneiden. Ferner treffen sich die Geraden $YZ_1$ und $Y_1Z$ in einem Punkte $V$ von $XX_1$. Lassen wir $b$ mit $b_1$ zusammenfallen, so gehen die Sehnen in Tangenten über und es folgt:

Die Tangenten an $K^3$ in den Endpunkten einer Brennpunktsehne $b$ schneiden sich in einem Punkte $U_t$, durch welchen auch die Tangente im zweiten Schnittpunkte von $b$ mit dem Kreise $[BDa]$ geht.

Die Linien $YY_1$, $ZZ_1$ und $YZ_1$, $Y_1Z$ bestimmen ein Vierseit, für welches $Y_1Z_1$, $YZ$ und $UV$ gegenüberliegende Ecken sind. Projizieren wir diese aus einem Punkte — etwa aus $D$ —, so erhalten wir Paare einer Involution. Nun erscheinen die Punkte $YZ$ von $D$ aus unter rechtem Winkel und ebenso die Punkte $Y_1Z_1$. Folglich sind zwei Paare der erwähnten Involution rechtwinklig. Diese ist eine Rechtwinkelinvolution und die Punkte $U$, $V$ werden ebenfalls von $D$ aus unter rechtem Winkel gesehen. Fällt jetzt wieder $b$ mit $b_1$

* Siehe S. 295.






zusammen, so wird aus $U$ der Schnittpunkt $U_t$ der Tangenten in $Y$ und $Z$ an $K^3$. $V$ liegt in $X$ und wir schliessen:

Der Schnittpunkt $U_t$ der Tangenten an $K^3$ in den Endpunkten einer Brennpunktsehne $b$ und der zweite Schnittpunkt $X$ von $b$ mit dem Kreise $[BDa]$ erscheinen vom Punkte $D$ aus unter rechtem Winkel.*

Wir finden nach diesem Satze die reelle Asymptote $a_s$ von $K^3$, indem wir den Kreis $[BDa]$ mit $a^*$ schneiden und im Schnittpunkte $X_a$ die Tangente konstruieren. Errichten wir sodann in $D$ die Senkrechte zu $DX_a$, so trifft diese die erwähnte Tangente in einem Punkte von $a_s$ (Fig. 4).

## IV.

14. Wir wenden uns zu Darstellungen von $K^3$, bei denen diese Kurve entweder als Schnitt einer besonderen Regelfläche oder als Projektion einer speziellen Raumkurve erscheint.

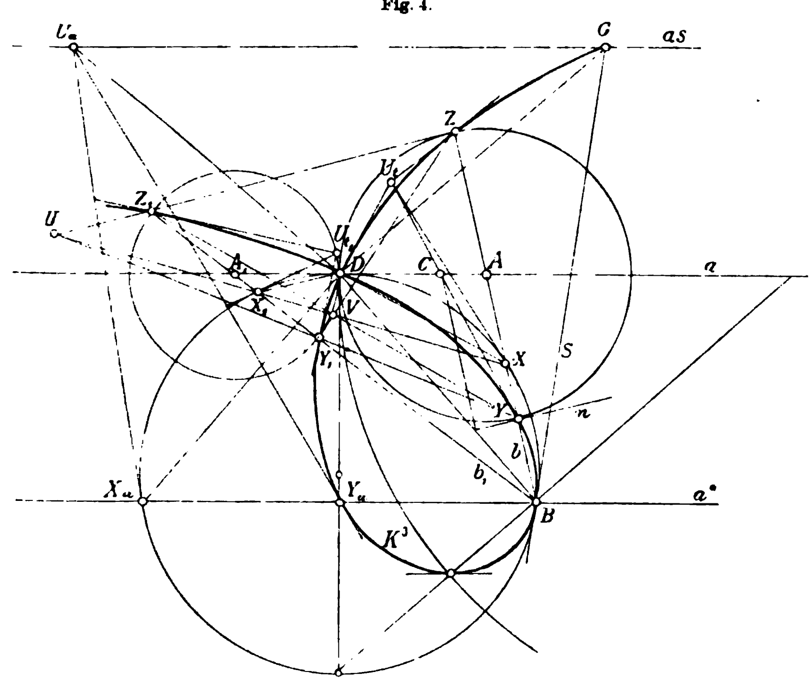
Um die Regelfläche hervorzubringen knüpfen wir an die Konstruktion von $K^3$ aus den Kreisen $(A)D$ an (8 und 12). Wir bezeichnen die Ebene, in welcher $K^3$ liegt, mit $E$. Dann ziehen wir in einer Normalebene durch $a$ zu $E$ eine Linie $l$, welche mit $a$ einen Winkel von 45° bildet. In $B$ errichten wir eine Normale $p$ zu $E$. Wir konstruieren nun durch einen beliebigen Punkt $A_l$ von $l$, dessen Orthogonalprojektion in $A$ liege, diejenigen Transversalen $r_1 r_2$ zu $p$, welche mit $E$ Winkel von 45° bilden. Die Orthogonalprojektionen dieser Linien fallen mit $AB$ zusammen. $r_1 r_2 l$ liegen auf einem geraden Kreiskegel, mit der Spitze $A_l$ und der Axe $A_l A$. Seine Mantellinien schliessen mit $E$ Winkel von 45° ein (45° Kegel). Folglich ist seine Basis ein Kreis aus $A$ durch $D$. Die Mantellinien $r_1 r_2$ des Kegels schneiden diesen Kreis $(A)D$ in zwei Punkten $Y, Z$ von $K^3$. Konstruieren wir jetzt aus allen Punkten $A_l$ von $l$ die resp. Transversalen $r_1 r_2$, so liegen diese auf einer Regelfläche dritten Grades $R^3$. Denn sie schneiden $l, p$ und den Kreis, welchen die $\infty$ ferne Ebene mit allen 45° Kegeln gemein hat. Dieser Kreis, $l$ und $p$ sind somit die Leitlinien der Regelfläche. $l$ schneidet den unendlich fernen Kreis in einem Punkte. Also ist $2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 = 3$ der Grad der Regelfläche.

$R^3$ ist unter den Regelflächen dritten Grades dadurch ausgezeichnet, dass die Doppelgerade $l$ die Leitgerade $p$ unter 45° kreuzt. Ferner bilden alle Geraden der Regelfläche mit $p$ Winkel von 45°. Wir bezeichnen daher $R^3$ als 45° Regelfläche dritten Grades. $p$ sei ihre Axe. Dann folgt: Jede Ebene, welche zur Axe einer 45° Regelfläche dritten Grades senkrecht steht, schneidet diese Regelfläche in einem kubischen Kreise $K^3$.

* Zu jedem Punkte $X$ des Kreises $[BDa]$ gehört ein Punkt $U_t$. Der Ort dieser Punkte ist eine zirkulare Kurve dritter Ordnung, welche in $D$ eine Spitze hat. Vergl. meine Abhandlung über Kurven vierter Ordnung mit drei doppelten Inflexionsknoten. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band XXX (1885) S. 74.

15. Wir benützen die Regelfläche $R^3$, um für Punkte von $K^3$ die Tangenten zu konstruieren (Fig. 4). Zeichnen wir in einem Punkte $Y$ von $K^3$ die Tangentialebene an $R^3$, so berührt ihre Schnittlinie mit $E$ die Kurve $K^3$ in $Y$. Zur Konstruktion dieser Tangentialebene wenden wir einen bekannten Satz an, nach welchem die Tangentialebenen durch eine Erzeugende $r_1$ einer Regelfläche zur Reihe der Berührungspunkte projektivisch liegen. Die Projektivität wird durch drei Punkte von $r_1$ und ihre Tangentialebenen bestimmt. Wir können leicht drei solche Punkte mit ihren Tangentialebenen angeben. Der eine ist der Schnitt von $r_1$ mit $p$. Seine Tangentialebene schneidet $E$ in der Geraden $BA$. Ein zweiter Punkt ist der Schnitt von $r_1$ mit $l$.

Fig. 4.




Seine Tangentialebene trifft $E$ in der Geraden $DY$. Ein dritter Punkt ist der unendlich ferne Punkt von $r_1$. Seine Tangentialebene berührt in $Y$ den Kreis $(A)D$ und schneidet also $E$ in einer Normalen $n$ durch $Y$ zu $BA$. Projizieren wir die drei in $r_1$ liegenden Berührungspunkte der erwähnten Tangentialebenen auf $BA$, so erhalten wir $B$, $A$ und den unendlich fernen Punkt von $BA$. Ihnen entsprechen die drei Linien $YB$, $YD$ und $n$. Konstruieren wir in dieser projektivischen Zuordnung zu $Y$ die entsprechende Gerade, so berührt sie in $Y$ die Kurve $K^3$. Wir können die Konstruktion so ausführen, dass wir die drei Linien $YB$, $YD$ und $n$ mit $DB$ schneiden. Dann entstehen auf $AB$ und $DB$ perspektivische Reihen, in welchen $B$ sich selbst entspricht. $A$, $D$ ist ein korrespondierendes Paar. Dem Schnittpunkte

von $n$ mit $BD$ entspricht der unendlich ferne Punkt. Die Verbindungslinie dieser zwei Punkte schneidet also aus $AD$ das Perspektivzentrum $C$. Durch dieses und $Y$ geht die gesuchte Tangente. Daraus ergiebt sich folgende allgemeine Konstruktion:

Wir ziehen im Punkte $Y$ von $K^3$ die Normale $n$ zu $BY$, schneiden mit derselben $BD$ und projizieren den Schnittpunkt in der Richtung von $BY$ auf $a$. Durch die Projektion $C$ geht die Tangente in $Y$.

16. Um $K^3$ als Projektion einer Raumkurve zu zeichnen, gehen wir von folgender Konstruktion aus (Fig. 5): Wir beschreiben aus der Mitte $M$ von $BD$ einen Kreis $(M)$ durch $B$ und $D$. Ferner legen wir einen beliebigen Kreis $[MB]$ durch $M$ und $B$. Dann ziehen wir durch $D$ zwei beliebige Gerade $dd_1$ und verbinden die Punkte, in welchen diese Geraden den Kreis $(M)$ zum zweiten Male schneiden, mit $M$. Diese Verbindungslinien $m$, $m_1$ treffen den Kreis $[MB]$ je in einem zweiten Punkte. Durch diese Schnittpunkte und $B$ gehen zwei Gerade $bb_1$, für welche $\sphericalangle bb_1 = \sphericalangle mm_1$. Aber $\sphericalangle mm_1 = 2 \sphericalangle dd_1$. Also ist $\sphericalangle bb_1 = 2 \sphericalangle dd_1$. Folglich sind $d$, $b$; $d_1 b_1$ entsprechende Paare der Büschel $S_d S_b$ und schneiden sich in Punkten von $K^3$. Wir nehmen jetzt an, dass die Kreise $(M)$ und $[MB]$ Leitkurven von zwei Kegeln $K_1 K_2$ seien. Wir fassen $D$ und $B$ als Projektionen der Spitzen $M_1 M_2$ der Kegel aus einem beliebigen Punkte $C$ des Raumes auf. Die Verbindungslinie der Spitzen treffe die Ebene der Leitkurven in $M$. Dann sind die Geraden $m$ Spuren von Ebenen, welche durch $M_1$, $M_2$ gehen. Die Geraden $d$, $b$ sind Projektionen von Mantellinien der Kegel und $K^3$ ist das Bild der Durchdringungskurve beider Kegel. Diese ist von der vierten Ordnung. Sie erscheint als Kurve dritter Ordnung, weil das Projektionszentrum $C$ als Schnitt der Mantellinien $M_1 D$ und $M_2 B$ auf der Durchdringungskurve liegt. Wir schliessen daher:

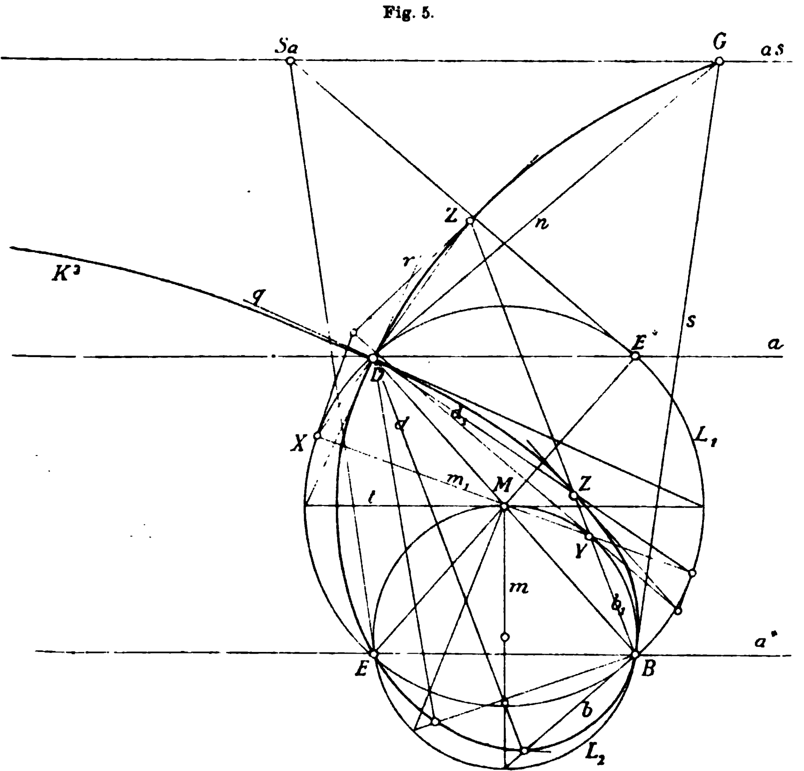
Zwei Kegel $K_1 K_2$, deren Leitkurven Kreise einer Ebene sind, sollen so angeordnet sein, dass die Bilder $D$, $B$ der resp. Spitzen $M_1 M_2$ in den Endpunkten eines Durchmessers vom Leitkreise $L_1$ des einen Kegels $K_1$ liegen. Die Verbindungslinie der Kegelspitzen gehe durch den Mittelpunkt $M$ dieses Kreises. Der andere Kreis $L_2$ gehe durch $M$ und $B$. Dann durchdringen sich beide Kegel in einer Kurve, deren Bild auf die Ebene $E$ die Kurve $K^3$ ist.

17. Konstruieren wir $K^3$ in bekannter Weise als Bild der Durchdringungskurve von $K_1 K_2$, so ergeben sich dabei noch einige Schlüsse.

Der Punkt $E$, welchen der Kreis $(M)$ mit dem Kreise $[MB]$ ausser $B$ noch gemeinsam hat, liegt auf $K^3$. Schneide die Gerade $ME$ den Kreis $(M)$ zum zweiten Male in $E^*$, so ist $BE$ $DE^*$. Diese Geraden treffen sich aber in einem Punkte von $K^3$. Folglich giebt $BE$ die reelle Asymptotenrichtung von $K^3$ an.

Eine Gerade $m_1$ durch $M$ schneide die Kreise $(M)$ und $[MB]$ resp. in $X, Y$. Die Geraden $BY$ und $DX$ treffen sich in einem Punkte $Z$ von $K^3$. Dann muss die Tangente in $Y$ an $[MB]$ aus der Geraden, welche in $X$ den Kreis $(M)$ berührt, einen Punkt schneiden, durch welchen die Tangente in $Z$ an $K^3$ geht. Spezialisieren wir diese Tangentenkonstruktion, indem wir an Stelle von $m_1$ die Gerade $DB$ treten lassen, so folgt, dass die Tangente $s$ in $B$ an $[MB]$ die Kurve $K^3$ berührt. Ferner ergiebt sich, dass die Tangente $n$ in $D$ an $(M)$ aus $s$ den Punkt $G(3)$ von $K^3$ schneidet. Tritt an Stelle von $m_1$ die Linie $ME$, so folgt, dass die Tangente in $E$ an $[MB]$ aus

Fig. 5.




der Tangente in $E^*$ an $(M)$ einen Punkt $S_a$ schneidet, durch welchen die reelle Asymptote $as$ von $K^3$ geht. Nun ist:

$$\Delta BGD \sim ES_aE^*.$$

Also ist:

$$BG = ES_a.$$

Daraus folgt $EB$ $S_aG$. Durch $S_a$ geht aber die reelle Asymptote von $K^3$ und ist parallel $EB$. Folglich ist $S_aG$ die Asymptote und wir schliessen:

Die reelle Asymptote von $K^3$ geht durch den Punkt $G$, in welchem die Brennpunkttangente $s$ in $B$ die Kurve $K^3$ zum dritten Male schneidet.

Oben (8.) haben wir bewiesen, dass auf einer Brennpunktsehne zwei Punkte von $K^3$ liegen, deren Entfernung durch $a$ halbiert wird. Auf der Brennpunktsehne $s$ sind $B$ und $G$ ein solches Punktepaar. Durch $B$ geht $a^*$, durch $G$ geht $as$. Also folgt:

$a$ liegt in der Mitte zwischen $a^*$ und $as$.

Die Linie $t$, welche in $M$ den Kreis $[MB]$ berührt, trifft den Kreis $(M)$ in zwei Punkten, durch welche die Tangenten $q$, $r$ im Doppelpunkte $D$ gehen. Nun schliesst $t$ mit $MB$ denselben Winkel ein wie $s$. Folglich muss $t \| a$. Die Punkte, welche $t$ aus dem Kreise $(M)$ schneidet, werden durch den Mittelpunkt $M$ und den unendlich fernen Punkt harmonisch getrennt. Projizieren wir diese harmonische Gruppe aus $D$, so erhalten wir die Strahlen $q$, $r$, $DB$ und $a$. Daraus folgt:

Die Tangenten $q$, $r$ im Doppelpunkte $D$ werden durch $DB$ und $a$ harmonisch getrennt.

V.

18. Wir entwickeln aus den abgeleiteten Darstellungen und Eigenschaften von $K^3$ eine Reihe von Konstruktionen, bei denen die Kurve durch gegebene Elemente bestimmt wird.

Eine Kurve $K^3$ wird in eindeutiger Weise gegeben durch:

a) $D$, $B$ und einen beliebigen Punkt. Wir konstruieren nach 1, 6, 10 oder 16.

b) $D$, $B$ und die Richtung der reellen Asymptote. Wir ziehen durch $D$ die Parallele $a^*$ zur Asymptotenrichtung und benützen Kreise $(A)D$ (8.).

c) $D$ und drei beliebige Punkte $PQR$. Wir suchen $B$. Wir errichten zu diesem Zwecke in der Mitte von $DQ$ eine Normale und bestimmen ihre Schnittpunkte $P_1$, $R_1$ mit $DP$, $DR$. Dann legen wir einen Kreis durch $PQP_1$ und einen zweiten Kreis durch $RQR_1$. Beide Kreise schneiden sich in $Q$ und dem gesuchten Punkte $B$; denn

$$\sphericalangle PP_1Q = 2 \sphericalangle PDQ = \sphericalangle PBQ$$

und

$$\sphericalangle RR_1Q = 2 \sphericalangle RDQ = \sphericalangle RBQ.$$

d) $D$ und zwei beliebige Punkte $PQ$, sowie die Asymptotenrichtung. Wir ziehen $a$ und zeichnen zwei Kreise, die $a$ in $D$ berühren und resp. durch $P$, $Q$ gehen. Die Tangente in $P$ an den einen Kreis schneidet aus der Geraden, welche in $Q$ den anderen Kreis berührt, den Punkt $B$ (1.).

e) $D$ und zwei beliebige Punkte $PQ$, sowie die Tangente $p$ in $P$. Wir konstruieren wie bei c) den Kreis $[PQP_1]$. Ein zweiter Kreis, der $p$ in $P$ berührt und durch die Mitte von $PD$ geht (7.) schneidet den Kreis $[PQP_1]$ in $P$ und $B$.

f) $D$, einen beliebigen Punkt $P$ und die Asymptote $as$. Wir ziehen $a$ und die Linie $a^*$, welche zu $as$ in Bezug auf $D$

symmetrisch liegt. Dann legen wir durch $P$ einen Kreis, der $a$ in $D$ berührt. Die Tangente in $P$ an diesen Kreis trifft $a^*$ in $B$.

g) $D$, $G$ und die Asymptote $as$ durch $G$. Wir ziehen $a^*$. $B$ liegt auf $a^*$ und auf der Geraden, welche in $D$ zu $DG$ senkrecht steht.

h) $B$ und die Tangenten $q$, $r$ im Doppelpunkte $D$. Wir zeichnen den Kreis, welcher $DB$ zu einem Durchmesser hat. Die Linien $q$, $r$ treffen diesen Kreis in zwei Punkten, deren Verbindungslinie die Asymptotenrichtung angiebt. Dann konstruieren wir wie bei b).

i) $q$, $r$ und $G$. Wir ziehen $DB \perp DG$ und konstruieren zu $DB$ den vierten harmonischen Strahl $a$ in Bezug auf $q$, $r$ (17.). Wir zeichnen $as$ und verfahren wie bei g).

k) $q$, $r$ und zwei beliebige Punkte $Q$, $R$. Wir zeichnen die Normalen in den Mitten von $QD$ und $RD$. Sie bestimmen mit $q$, $r$ die Parabel $P_h$ (9.).

l) $q$, $r$ und einen beliebigen Punkt $P$ mit seiner Tangente $p$. Wir zeichnen einen Kreis, der $p$ in $P$ berührt und durch die Mitte von $DP$ geht. Dann errichten wir in dieser Mitte die Senkrechte $h$ zu $DP$ und bestimmen ihre Schnittpunkte mit $q$, $r$. Durch diese, $D$ und $P$, geht ein zweiter Kreis (8.). Beide Kreise schneiden sich in $P$ und $B$.

m) $q$, $r$ und einen beliebigen Punkt $P$ und die Asymptotenrichtung. Wir ziehen $a$, zeichnen den vierten harmonischen Strahl $BD$ zu $a$ in Bezug auf $q$, $r$. Dann liegt $B$ auf einer Geraden, welche in $P$ den Kreis $[PDa]$ berührt, und auf dem erwähnten vierten harmonischen Strahle.

n) $q$, $r$ und die Asymptote $as$. Wir ziehen $a$, konstruieren wieder $DB$ als vierten harmonischen Strahl zu $a$ in Bezug auf $qr$. Dieser schneidet aus der Geraden $a^*$, welche zu $as$ in Bezug auf $a$ symmetrisch liegt, den Punkt $B$.

19. Vier resp. zwei Kurven $K^3$ werden bestimmt, wenn gegeben sind:

o) $B$ und drei beliebige Punkte $PQR$. Wir suchen die möglichen Lagen von $D$ und gehen dabei von der Winkelbeziehung aus, durch welche die Kurve definiert wurde. Dann ergiebt sich folgende Konstruktion: Ein Kreis aus $B$, welcher durch $Q$ geht, schneide die Geraden $BP$, $BR$ resp. in $P^* P_1^*$ und $R^* R_1^*$. Wir konstruieren die Kreise $[QPP^*]$ und $[QPP_1^*]$, sowie die Kreise $[QRR^*]$ und $[QRR_1^*]$. Jeder der zwei ersten Kreise schneidet jeden der zwei anderen Kreise — ausser in $Q$ — noch in einem Punkte. Diese vier Schnittpunkte sind vier mögliche Lagen von $D$.

p) $B$ und zwei beliebige Punkte $PQ$, sowie die Tangente $p$ in $P$. Wir konstruieren wie bei o) die zwei Kreise $[PQP^*]$ und $[PQP_1^*]$. Dann zeichnen wir zu $P$ in Bezug auf $B$ den symmetrischen Punkt und legen durch ihn einen Kreis, der $p$ in $P$ berührt. Dieser Kreis schneidet die Kreise $[PQP^*]$ und $[PQP_1^*]$ ausser in $P$ noch je in einem Punkte. Diese zwei Schnittpunkte können Doppelpunkte von zwei Kurven $K^3$ sein.

q) $B$ und zwei beliebige Punkte $PQ$ und die Richtung der reellen Asymptote. Wir zeichnen wieder die Kreise $[PQP^*]$ und $[PQP_1^*]$. Dann ziehen wir $a^*$ und bestimmen die zwei Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Kreise aus $B$ durch $Q$. Durch jeden dieser Punkte und $Q$ geht eine Gerade. Diese zwei Geraden schneiden aus den zwei Kreisen $[PQP^*]$ und $[PQP_1^*]$ die vier möglichen Lagen der Doppelpunkte.

r) $B$, ein beliebiger Punkt $P$ und die Asymptote $as$. Wir ziehen $a^*$ und zeichnen $a$ in der Mitte von $a^*$ und $as$. Dann konstruieren wir die zwei Kreise, welche $BP$ in $P$ berühren und $a$ zur gemeinsamen Tangente haben. Ihre Berührungspunkte mit $a$ sind zwei Lagen von $D$.

s) $B$, $G$ und ein beliebiger Punkt $P$. Wir beginnen die Konstruktion wie bei o). Der Kreis aus $B$ durch $P$ schneide die Gerade $BG$ in $G^*$, $G_1^*$. Dann legen wir einen Kreis durch $GPG^*$ und einen Kreis durch $GPG_1^*$. Auf jedem dieser Kreise kann $D$ liegen. $D$ liegt aber auch auf dem Kreise, welcher $BG$ zum Durchmesser hat. Folglich schneidet dieser Kreis aus $[GPG^*]$ und $[GPG_1^*]$ ausser $G$ noch zwei Punkte, welche Doppelpunkte einer Kurve $K^3$ sein können.

t) $B$, $G$ und die Asymptotenrichtung. Wir ziehen $a$ in der Mitte zwischen $B$ und $G$. Ein Kreis mit dem Durchmesser $BG$ schneidet $a$ in zwei möglichen Lagen von $D$.

Die Konstruktionen o), p), q) versagen, wenn die zwei beliebigen Punkte $P$, $Q$ auf einem Kreise $(B)$ liegen. Für diesen Fall bemerken wir, dass durch $P$, $Q$ und $D$ ein Kreis geht, der in $P$ und $Q$ zum Kreise $(B)$ orthogonal steht. Der Mittelpunkt dieses Orthogonalkreises liegt im Schnittpunkte der Geraden, welche in $P$ und $Q$ den Kreis $(B)$ berühren. Zeichnen wir nun bei o) die Schnittpunkte des Orthogonalkreises mit den Kreisen $[QRR^*]$ und $QRR_1^*]$, so ist $Q$ der eine dieser Punkte. Die zwei anderen sind Lagen von $D$. Im Falle p) schneidet der Berührungskreis in $P$ an $K^3$ aus dem Orthogonalkreise $[PQ]$ zu $(B)$ einen Punkt $D$ aus. Im Falle q) verbinden wir $P$ und $Q$ mit den Punkten, in welchen $a^*$ den Kreis $(B)$ trifft. Diese vier Verbindungslinien schneiden sich paarweise auf $a^*$; ferner in $P$ und $Q$ und überdies in zwei Punkten, welche mögliche Lagen von $D$ vorstellen.

VI.

20. Wir untersuchen schliesslich eine spezielle Form $K_s^3$ des kubischen Kreises (Fig. 6).

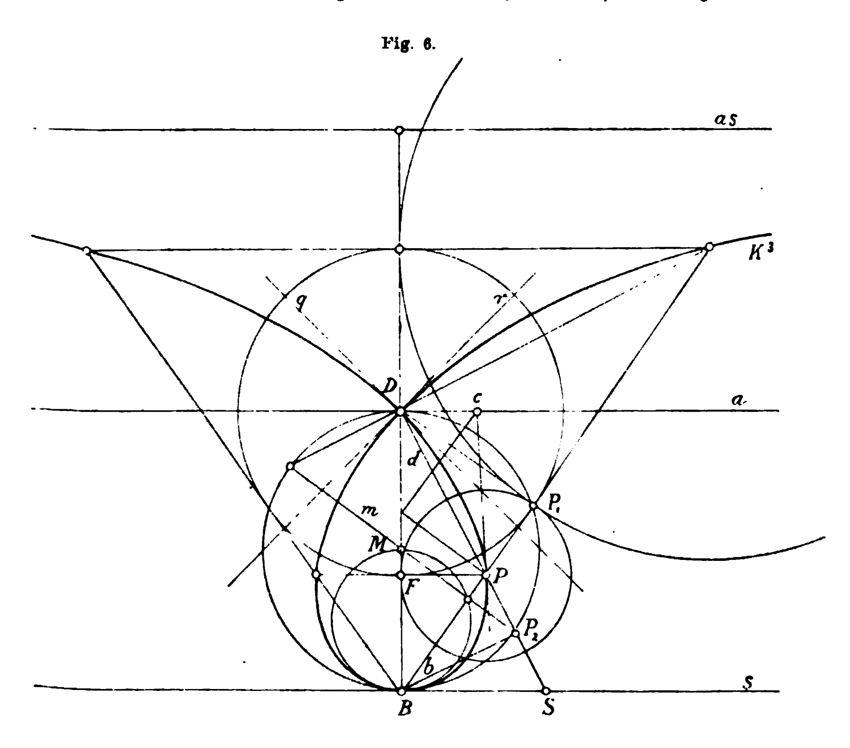
Wir nehmen an, dass die Verbindungslinie $c$ der Punkte $DB$ den Winkel der Tangenten $qr$ halbiere. Dann ist $a$ — d. h. die vierte harmonische Linie zu $c$ in Bezug auf $qr$ — senkrecht zu $c$. Also ist auch die Tangente $s$ in $B$ an $K_s^3$ senkrecht zu $c$. Nun sind $c$ und $s$ entsprechende Strahlen der Büschel $S_d$, $S_b$. Sei $d$, $b$ ein weiteres Paar, so ist $\sphericalangle cd = \frac{1}{2} sb$ d. h.:

Der Winkel $\varphi$, den ein Strahl $d$ mit $c$ einschliesst, ist halb so gross wie der Winkel, den der entsprechende Strahl $b$ mit $s$ bildet.

Aus diesem Satze ergeben sich einige Konstruktionen von $K_s^3$.

Wir zeichnen über $DB$ als Durchmesser einen Kreis $[BDa]$. $b$ schneide diesen Kreis in $P_1$. Dann ist $\sphericalangle sb = \sphericalangle BDP_1$. Halbieren

Fig. 6.




wir den letzteren Winkel, so ist diese Halbierungslinie die zu $b$ gehörende Linie $d$ und trifft $b$ in einem Punkte $P$ von $K_s^3$. Allgemein folgt daraus:

Verbinden wir die Endpunkte $D$, $B$ eines Kreisdurchmessers mit einem beliebigen Punkte $P_1$ des Kreises, so

schneiden die Halbierungslinien des Winkels $P_1DB$ aus $P_1B$ zwei Punkte von $K_s^3$.

Treffe $d$ den Kreis $[BDa]$ in $P_2$ und die Linie $s$ in $S$, so ist:

$$\sphericalangle P_2BS = \sphericalangle P_2DB.$$

Aber
$$\sphericalangle P_2DB = \frac{1}{2} \sphericalangle PBS.$$

Also ist
$$P_2BS = \frac{1}{2} \sphericalangle PBS, \text{ d. h.:}$$

Verbinden wir $D$ und $B$ mit einem beliebigen Punkte $P_2$ des Kreises $[BDa]$ und zeichnen wir zu $s$ die symmetrische Linie in Bezug auf $P_2B$, so trifft sie $P_2D$ auf $K_s^3$.

Weil $P_2B$ zu $DP_2$ senkrecht steht, ist $PP_2 = P_2S$, d. h.:

Halbieren wir auf den Geraden durch $D$ die Strecke, welche zwischen dem Schnittpunkte mit $s$ und dem dritten Schnittpunkte mit $K_s^3$ liegt, so ist der Ort dieser Mittelpunkte ein Kreis über $BD$.

21. Fällen wir aus $P$ die Normale auf $c$ und sei $F$ der Fusspunkt, so ist $PF = PP_1$, weil $P$ auf der Halbierungslinie des Winkels $P_1DF$ liegt. Folglich muss ein Kreis aus $P$ durch $P_1$ die Linie $c$ berühren. Daraus ergiebt sich folgende Darstellung von $K_s^3$:

Sind $D$, $B$ die Durchmesserendpunkte eines Kreises, so gehen durch jeden Punkt $P_1$ dieses Kreises zwei Kreise, welche $DP_1$ in $P_1$ berühren und die Gerade $DB$ zur Tangente haben. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen auf $K_s^3$.

Die Punkte $P_1$ und $F$ liegen auf einem Kreise $(D)$, für welchen die Geraden $P_1P$ und $PF$ Tangenten sind. Daraus folgt allgemein:

Die Tangenten durch $B$ an einen Kreis $(D)$ schneiden aus den Geraden, welche in den Schnittpunkten von $BD$ mit $(D)$ diesen Kreis berühren, vier Punkte von $K_s^3$.

Nach diesem Satze erhalten wir die Punkte von $K_s^3$ paarweise in orthogonal symmetrischer Lage zu $c$ und in Gruppen von vier Punkten, welche ein doppelt zentrisches Kreisviereck bilden. Spezialisieren wir diese Konstruktion für den Kreis $(D)B$, so folgt, dass er in $B$ die Kurve $K_s^3$ berührt. Die Tangente in seinem zweiten Schnittpunkte mit $BD$ ist die reelle Asymptote $as$. Eine bequeme Darstellung von $K_s^3$ ergiebt sich auch, wenn wir diese Kurve als Bild der Durchdringung von zwei Kegeln zweiten Grades auffassen (16.). Die Leitkurven dieser Kegel sind zwei Kreise und zwar der Kreis, welcher $BD$ zu einem Durchmesser hat und der Kreis, für welchen $B$ und die Mitte $M$ der Strecke $BD$ Endpunkte eines Durchmessers sind. Eine Gerade durch $M$ schneidet beide Kreise. Indem wir diese Schnittpunkte resp. mit $D$ und $B$ verbinden, erhalten wir Punkte von $K_s^3$. Wir bemerken noch, dass $BP$ auf $MP_2$ senkrecht steht. Folglich lässt sich $K_s^3$ auch durch einen Kreis $(M)$ so erzeugen:

Wir ziehen einen Durchmesser $m$ des Kreises und verbinden seine Schnittpunkte mit dem Endpunkte $D$ eines zweiten Durchmessers. Fällen wir aus dem anderen Endpunkte $B$ dieses Durchmessers die Senkrechte auf $m$, so trifft sie die erwähnten Verbindungslinien in zwei Punkten von $K_s^3$.

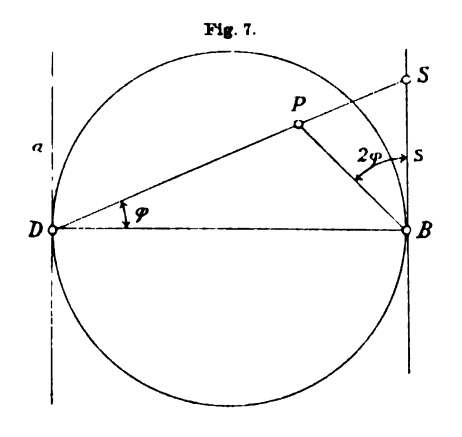
Um die Tangente in einem Punkte $P$ von $K_s^3$ zu zeichnen, verfahren wir — nach 15 — wie folgt:

Wir ziehen in $P$ die Senkrechte zu $BP$, schneiden mit dieser $DB$ und projizieren den Schnitt in der Richtung von $BP$ auf $a$. Durch die Projektion $C$ geht die Tangente in $P$.

---

Wir haben uns in der vorstehenden Monographie einer besonderen Kurve dritter Ordnung vollständig auf die graphische Darstellung dieser Kurve beschränkt und sind allen Verallgemeinerungen, sowie allen analytischen Betrachtungen aus dem Wege gegangen. Was die Verallgemeinerungen betrifft, so lassen sich aus den entwickelten Erzeugungen und Eigenschaften von $K^3$ durch Transformation leicht Entstehungen und Eigenschaften von allgemeinen Kurven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte herleiten. Ferner liegt es nahe, die zirkulare Kurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt zu untersuchen, deren Tangenten in den imaginären Kreispunkten sich in einem Punkte der Kurve schneiden. Diese Kurve wäre als kubischer Kreis (ohne Doppelpunkt) zu bezeichnen.

Fig. 7.




Die analytische Betrachtung knüpft bequem an die Kurve $K_s^3$ an, welche eine ähnliche Form hat wie das Folium von Descartes. Machen wir $D$ zum Nullpunkte, $a$ zur $y$-Axe und sei $DB = c$; $\sphericalangle PDB = \varphi$ (Fig. 7), so ist: $y = x \operatorname{tg} \varphi$ die Gleichung von $DP$ und

$$y = (x - c) \operatorname{tg}(90^0 + 2\varphi) \text{ die Gleichung von } BP.$$

Eliminieren wir $\varphi$, so ergiebt sich:

$$x^3 - x^2c + y^2(x + c) = 0$$

als Gleichung von $K_s^3$. Transformieren wir diese Gleichung, indem wir die Tangenten $q, r$ in $D$ zu Axen machen, so folgt die Gleichung:

$$x^3 - y^3 - x^2y + y^2x + 2c\sqrt{2} \cdot xy = 0.$$

# Über das Problem der Winkelhalbierenden.

Von

A. Korselt,

Reallehrer in Meerane i S.

---

Die bis jetzt behandelten elementar-geometrischen Aufgaben sind:

a) solche, welche sich durch Lineal und Zirkel, also durch Quadratwurzeln lösen lassen;

b) solche, deren Lösung nur durch Ausziehen höherer Wurzeln möglich ist, z. B. das Delische Problem, die Dreiteilung eines beliebigen Winkels;

c) solche, die überhaupt nicht auf algebraische Gleichungen führen, z. B. die Quadratur des Kreises.

Die Aufgabe nun, die Seiten eines Dreiecks aus den inneren Winkelhalbierenden zu bestimmen, ist von einer neuen Art, denn

sie lässt sich im allgemeinen weder mit Lineal und Zirkel, noch mit Hilfe beliebiger Wurzelgrössen lösen.

Das will ich jetzt zeigen. Der erste Teil dieser Behauptung, der nur ein besonderer Fall des zweiten Teiles ist, wurde schon im ersten Hefte der Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterricht von Hoffmann 1897 bewiesen. Dabei muss ich zuweilen das neue Werk: Weber, Lehrbuch der Algebra, 2 Bde (W.) anführen.

Sind $a_1 a_2 a_3$ die Seiten, $w_1 w_2 w_3$ die entsprechenden innern Winkelhalbierenden eines Dreiecks, so ist bekanntlich:

$$1)\qquad w_1{}^2 = \frac{a_2 a_3 [(a_2 + a_3)^2 - a_1{}^2]}{(a_2 + a_3)^2} \cdots,$$

also

$$2)\qquad \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^2 = \frac{a_1}{a_2} \frac{(a_3 + a_2)^2}{(a_3 + a_1)^2} \frac{a_3 + a_1 - a_2}{a_3 - a_1 + a_2},$$

setzt man nun:

$$3)\qquad \frac{w_2}{w_1} = e_1, \quad \frac{w_3}{w_1} = e_2, \quad \frac{a_2}{a_1} = x_2, \quad \frac{a_3}{a_1} = x_3,$$

so erhält man:

$$4)\qquad e_2^2 = \frac{(x_3+x_2)^2(x_3-x_2+1)}{x_2(x_3+1)^2(x_3+x_2-1)},$$

oder nach $x_2$ geordnet:

$$5)\qquad \begin{cases} x_2^3 + x_2^2[e_2^2x_3^2 + (2e_2^2+1)x_3 + e_2^2 - 1] \\ \quad + x_2[e_2^2x_3^3 + (e_2^2-1)x_3^2 - (e_2^2+2)x_3 - e_2^2] \\ \quad - x_3^3 - x_3^2 = 0. \end{cases}$$

Man findet noch:

$$6)\qquad \frac{e_3^2}{e_2^2} = \frac{x_2(x_3+1)^2(x_2-x_3+1)}{x_3(x_2+1)^2(x_3-x_2+1)},$$

oder:

$$7)\qquad \begin{cases} x_2^2(e_3^2x_3^2-1) + x_2[e_2^2x_3^3 + (e_2^2+2e_3^2)x_3^2 - (e_2^2+2)x_3 - e_2^2] \\ \qquad + e_3^2x_3^2 - x_3^2 = 0. \end{cases}$$

5), 7) sind Gleichungen für die Unbekannten $x_2 x_3$ und haben die Form:

$$a x_2^3 + b x_2^2 + c x_2 + d = 0,$$
$$a' x_2^3 + b' x_2^2 + c' x_2 + d' = 0,$$

wo:

$$a = 1, \quad b = e_2^2x_3^2 + (2e_2^2+1)x_3 + e_2^2 - 1,$$
$$a' = 0, \quad b' = e_3^2x_3^2 - 1,$$
$$c = e_2^2x_3^3 + (e_2^2-1)x_3^2 - (e_2^2+2)x_3 - e_2^2,$$
$$c' = e_2^2x_3^3 + (e_2^2+2e_3^2)x_3^2 - (e_2^2+2)x_3 - e_2^2,$$
$$d = -x_3^3 - x_3^2$$
$$d' = (e_3^2-1)x_3^2.$$

Versteht man nun unter $(mn')$ den Ausdruck $mn' - m'n$, so ist nach **Salmon-Fiedler**: „Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen" S. 93 die Resultante $R$ der Gleichungen 5), 7):

$$8)\qquad \begin{cases} R = (ad')^3 - 2(ad')(ab')(cd') - (ad')(ac')(bd') + (ac')^2(cd') \\ \qquad + (bd')^2(ab') - (ab')(bc')(cd') = 0. \end{cases}$$

Hierbei ist:

$$(ab') = e_3^2x_3^2 - 1,$$
$$(ac') = e_2^2x_3^3 + (e_2^2+2e_3^2)x_3^2 - (e_2^2+2)x_3 - e_2^2,$$
$$(ad') = (e_3^2-1)x_3^2,$$
$$\begin{aligned}(bc') = {} & (e_2^4 - e_2^2e_3^2)x_3^5 + (3e_2^4 + e_2^2e_3^2 + e_2^2 + e_3^2)x_3^4 \\ & + (2e_2^4 + 5e_2^2e_3^2 - e_2^4 + 4e_3^2)x_3^3 \\ & + (-2e_2^4 + 3e_2^2e_3^2 - 5e_2^2 - 2e_3^2 - 3)x_3^2 \\ & + (-3e_2^4 - 3e_2^2)x_3 - e_2^4,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(bd') = {} & e_3^2x_3^5 + (e_2^2e_3^2 - e_2^2 + e_3^2)x_3^4 + (2e_2^2e_3^2 - 2e_2^2 + e_3^2 - 2)x_3^3 \\ & + (e_2^2e_3^2 - e_2^2 - e_3^2\; x_3^2,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(cd') = {} & e_2^2x_3^6 + (e_2^2 + 2e_3^2 + e_2^2e_3^2)x_3^5 + (e_2^2e_3^2 - e_2^2 + e_3^2 - 1)x_3^4 \\ & + (-e_2^2e_3^2 - e_2^2 - 2e_3^2)x_3^3 + (-e_2^2e_3^2)x_3^2.\end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in 8) ein, multipliziert aus und bezeichnet abkürzend $\frac{R}{x^5}$ mit $R_1$, $x_3$ mit $x$, $a e_2^m e_3^n$ mit $a \cdot mn$, so erhält man nach einer allerdings mühsamen Rechnung:

$$
9)\left\{\begin{aligned}
R_1 = {} & (1\cdot 44 - 1\cdot 62)x^{10} \\
& + (1\cdot 46 - 1\cdot 64 - 4\cdot 62 - 2\cdot 44 + 2\cdot 26 + 1\cdot 60 + 1\cdot 06 - 1\cdot 42 - 1\cdot 24)x^9 \\
& + (-4\cdot 64 - 3\cdot 62 - 15\cdot 44 + 4\cdot 60 + 6\cdot 42 - 10\cdot 24)x^8 \\
& + (-6\cdot 46 - 4\cdot 64 + 8\cdot 62 - 12\cdot 44 - 12\cdot 26 + 2\cdot 24 + 4\cdot 60 \\
& \qquad + 26\cdot 42 - 6\cdot 06 + 8\cdot 22 - 4\cdot 40 - 4\cdot 04)x^7 \\
& + (-4\cdot 46 + 4\cdot 64 + 17\cdot 44 + 14\cdot 62 + 4\cdot 06 + 21\cdot 42 \\
& \qquad + 30\cdot 24 - 4\cdot 60 + 12\cdot 04 - 12\cdot 40)x^6 \\
& + (9\cdot 46 + 10\cdot 64 + 18\cdot 26 + 13\cdot 44 + 2\cdot 62 + 11\cdot 06 - 4\cdot 24 - 13\cdot 42 \\
& \qquad - 10\cdot 60 - 9\cdot 04 - 18\cdot 22 - 9\cdot 40)x^5 \\
& + (12\cdot 46 + 4\cdot 64 - 21\cdot 44 - 14\cdot 62 - 12\cdot 06 - 30\cdot 24 \\
& \qquad - 17\cdot 42 - 4\cdot 60 + 4\cdot 40 - 4\cdot 04)x^4 \\
& + (-4\cdot 64 + 4\cdot 46 - 8\cdot 26 - 26\cdot 44 - 8\cdot 62 + 12\cdot 42 - 2\cdot 24 + 4\cdot 06 \\
& \qquad + 4\cdot 60 + 6\cdot 04 + 12\cdot 22 + 6\cdot 40)x^3 \\
& + (-4\cdot 64 - 6\cdot 44 + 3\cdot 62 + 10\cdot 24 + 15\cdot 42 + 4\cdot 60)x^2 \\
& + (-1\cdot 64 + 1\cdot 44 + 4\cdot 62 + 1\cdot 24 + 2\cdot 42 + 1\cdot 60 - 2\cdot 22 - 1\cdot 40 - 1\cdot 04)x \\
& + (1\cdot 20 - 1\cdot 00)1\cdot 42 = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Im folgenden werden in einer Funktion $f$ der Variabeln $x, y \ldots$ zuweilen für letztere andere Ausdrücke $a, b \ldots$ zu setzen sein; wir wollen dies mit $f(x = a,\ y = b, \ldots)$ bezeichnen.

Die Gleichung 9) habe ich durch vielfache Proben bestätigt gefunden. Man findet z. B.:

$$
10)\left\{\begin{aligned}
\frac{R_1(e_2 = e_3 = e)}{-e^4} = {} & 4e^4x^9 + (4e^6 + 18e^4)x^8 + (10e^6 + 16e^4 - 26e^2)x^7 \\
& + (-31e^4 - 51e^2)x^6 + (-19e^6 - 33e^4 + 12e^2 + 36)x^5 \\
& + (-16e^6 + 35e^4 + 63e^2)x^4 \\
& + (42e^4 - 18e^2 - 24)x^3 + (4e^6 + 3e^4 - 29e^2)x^2 \\
& + (e^6 - 5e^4 - 4e^2 + 4)x - e^4 + e^2 \\
= {} & (2e^2x^3 + 3e^2x^2 - 4x - e^2)[2e^2x^6 + (2e^4 + 6e^2)x^5 \\
& + (2e^4 - e^2 - 9)x^4 + (-3e^4 - 9e^2)x^3 \\
& + (-4e^4 + 4e^2 + 6)x^2 + (-e^4 + 5e^2)x + e^2 - 1],
\end{aligned}\right.
$$

oder abgekürzt,

$$= \varphi_1 \varphi_2,$$

und $\varphi_1 = 0$ ist auch gerade diejenige Gleichung, welche man aus 1) unter der Annahme $w_2 = w_3$, also im Falle eines gleichschenkligen Dreiecks findet. In etwas vereinfachter Gestalt ist dies Gleichung 7)

in meiner Bemerkung S. 82 der Hoffmannschen Zeitschrift, Jahrgang 1897.

Wir haben nun zu beweisen, dass die Gleichung $R_1 = 0$, aus welcher sich das Verhältnis zweier Seiten durch die Winkelhalbierenden bestimmt, nicht auflösbar ist und zerlegen den Beweis in zwei Teile.

a) $R_1$ ist eine unzerlegbare Funktion von $x$.

Jeder Faktor $R_1$ müsste nämlich $e_2$ und $e_3$ enthalten. Denn wäre ein solcher Faktor z. B. von $e_2$ unabhängig, so müsste er in allen Koeffizienten desjenigen Ausdrucks aufgehen, der aus $R_1$ durch Ordnen nach Potenzen von $e_2$ hervorgeht. Diese Koeffizienten haben aber nur 1 als gemeinsames Maß. Ähnliches findet man für $e_3$. Also wäre $R_1$ auch eine zerlegbare Funktion von $e_2$ und $e_3$ für beliebige Werte von $x$, welche nur die Dimension von $R_1$ in Bezug auf $e_2$ und $e_3$ nicht erniedrigen, z. B. für $x = 1$. Dann ist aber:

$$11)\quad \begin{cases} R_1(x=1) = 2R_2 \\ = 2(8e_2^4e_3^6 + e_2^6e_3^2 - 25e_2^4e_3^4 + 25e_2^4e_3^2 - 2e_2^2e_3^4 + e_3^6 - 8e_2^4). \end{cases}$$

$R_2$ müsste also zerlegbar sein. Nun beweist man wie vorhin, dass jeder Faktor von $R_2$ sowohl $e_2$ als $e_3$ enthalten muss. Also muss $R_2$ eine zerlegbare Funktion von $e_2$ bleiben für jeden Wert von $e_3$, der den Grad von $R_2$ in Bezug auf $e_2$ nicht erniedrigt, z. B. für $e_3 = i$. Dann ist aber:

$$12)\quad R_2(e_3 = i) = -R_3 = -(e_2^6 + 66e_2^4 + 2e_2^2 + 1).$$

$R_3 = 0$ hat nur komplexe Wurzeln, jeder reelle Faktor von $R_3$ muss geraden Grades sein. Wie man leicht sieht, hat $R_3 = 0$ keine rationalen Wurzeln, $R_3$ müsste daher, weil es sechsten Grades ist, einen quadratischen Faktor $e_2^2 + ae_2 + b$ haben, der in zwei komplexe lineare Faktoren zerfällt. $b$ ist $= \pm 1$, infolge des eben angegebenen Umstandes ist es $= 1$. $R_3$ enthält nur gerade Potenzen von $e_2$, dasselbe muss für $e_2^2 + ae_2 + b$ gelten, also ist $a = 0$. $R_3$ müsste also durch $e_2^2 + 1$ teilbar sein, was nicht geschieht. Also ist $R_3$ unzerlegbar im Bereiche der rationalen Zahlen und damit auch $R_1$.

b) $R_1 = 0$ ist durch Wurzelgrössen nicht auflösbar.

Wäre $R_1 = 0$ algebraisch auflösbar, so wäre es umsomehr

$$13)\quad \begin{cases} R_1(e_2 = e_3 = i) = 2R_4 \\ = 2(2x^3 + 3x^2 + 4x - 1)(x^6 + 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x + 1) = 0, \end{cases}$$

oder abgekürzt:

$$2R_4 = 2f_1f_2 = 0.$$

Da $f_1 = 0$ als Gleichung dritten Grades auflösbar ist, so müsste es auch $f_2 = 0$ sein. Wir beweisen nun, dass das Letztere nicht stattfindet.

b$_1$) $f_2$ ist unzerlegbar.

$f_2 = 0$ hat nämlich keine rationalen und nur komplexe Wurzeln, müsste also, wenn es zerlegbar wäre, einen unzerlegbaren quadratischen Faktor $x^2 + ax + b$ haben, der in komplexe lineare Faktoren zerfiele. Daher und da $b$ eine ganze in 1 aufgehende Zahl sein soll, kann $b$ nur $= 1$ sein, also $a$ nur entweder $= 0$ oder $= \pm 1$. Keiner der so entstehenden Ausdrücke geht aber in $f_2$ auf. Also ist $f_2$ unzerlegbar.

b$_2$) $f_2 = 0$ ist nicht auflösbar.

Wir hatten unter b) die Gleichung $R_1 = 0$ als auflösbar angenommen und in a) und b$_1$) die Funktionen $R_1$ und $f_2$ als unzerlegbar nachgewiesen. Wir benutzen nun den Satz (W. II, S. 296):

Wenn eine unzerlegbare Gleichung, in deren Grade $rs$ mehr als eine Primzahl aufgeht, durch folgeweise Adjunktion von Wurzelgrössen in Faktoren zerfällt, so wird eine Zerfällung in $s$ Faktoren $r^{\text{ten}}$ Grades herbeigeführt durch Adjunktion der Wurzeln einer auflösbaren Gleichung $r^{\text{ten}}$ Grades.

Darnach müsste $R_1$ entweder ein Produkt $f_{1,5}f_{2,5}$ von zwei Faktoren fünften Grades werden durch Adjunktion der Wurzeln einer quadratischen Gleichung $\varrho_2 = 0$, oder ein Produkt $f_{1,2} \ldots f_{5,2}$ aus fünf Faktoren zweiten Grades durch Adjunktion der Wurzeln einer Gleichung fünften Grades $\varrho_5 = 0$. Diese Faktoren kann man immer so einrichten, dass durch die Substitution $e_2 = e_3 = i$ kein Koeffizient unendlich oder unbestimmt wird und nicht alle Koeffizienten eines Faktors verschwinden. Durch diese Substitution wird dann in beiden Fällen der höchste Koeffizient nur eines Faktors verschwinden, da $R_1$ dadurch eine Funktion neunten Grades wird. $f_{1,5}f_{2,5}(e_2 = e_3 = i)$ ist also ein Produkt aus einem Faktor vierten und einem fünften Grades, $f_{1,2} \ldots f_{5,2}(e_2 = e_3 = i)$ besteht aus einem Faktor ersten und vier Faktoren zweiten Grades. Das Produkt $2R_4$, in welches nach 13) $R_1$ durch diese Substitution übergeht, hat aber keine von diesen Formen, und da

> in jedem bestimmten Rationalitätsbereich eine ganze Funktion nur auf eine Art in unzerlegbare Faktoren zerlegt werden kann (Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, S. 13),

so muss jeder Faktor $f_1$ und $f_2$ von $R_4$ durch jede der obigen Adjunktionen zerfallen. Nun ist $f_1 = 0$ unzerlegbar und dritten Grades, die Adjunktion $\varrho_2 = 0$ kann also diese Gleichung nicht zerlegen, und es bleibt nur die Adjunktion der Wurzeln einer Gleichung $\varrho_5 = 0$ zu betrachten übrig.

Durch $\varrho_5(e_2 = e_3 = i) = 0$ muss also $f_1$ in lineare und $f_2$ in Faktoren von nicht höherem als zweiten Grade zerfallen. $f_2$ ist sechsten Grades, und es besteht der Satz (W. II, S. 296):

Um alle auflösbaren Gleichungen sechsten Grades in einem Körper $\Omega$ zu erhalten, adjungiere man dem Körper $\Omega$ eine Quadratwurzel und bilde in dem erweiterten Körper alle kubischen Gleichungen, oder man adjungiere die Wurzel einer kubischen Gleichung und bilde in dem erweiterten Körper alle quadratischen Gleichungen.

Daher muss $\varrho_5(e_2 = e_3 = i) = 0$ einen solchen unzerlegbaren Faktor dritten Grades $e_3$ enthalten, dass die Adjunktion der Wurzeln von $\varrho_3 = 0$ die Ausdrücke $f_1$ und $f_2$ zerfällt. Die Gleichungen $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ müssen also äquivalent sein, d. h. eine Wurzel der einen Gleichung ist eine rationale Funktion einer Wurzel der anderen Gleichung. Wir dürfen daher geradezu $f_1 = 0$ oder eine ihr äquivalente Gleichung als $\varrho_3 = 0$ annehmen.

Nehmen wir z. B. die Gleichung, die aus $f_1 = 0$ hervorgeht, durch die Substitution:

14) $$x = -\frac{y+1}{y-1} \quad \text{oder} \quad y = \frac{x-1}{x+1},$$

so erhält man:

15) $$y^3 - y^2 + 2y + 2 = 0.$$

Wir benutzen nun die Begriffe der Dedekindschen Theorie der algebraischen Zahlen, die sich in dem letzten Supplemente von Dirichlets „Vorlesungen über die Zahlentheorie“ (Braunschweig 1894) findet. Darnach sind die Wurzeln von 15) ganze algebraische Zahlen, und wenn $y_\mu$ eine derselben, so ist der Körper $(y_\mu)$ dritten Grades, und jede Zahl desselben hat die Form:

$$m = \frac{a + b y_\mu + c y^2_\mu}{k},$$

wo $a, b, c, k$ ganze teilerfremde Zahlen sind, deren letzte positiv genommen werden kann. Es soll nun bewiesen werden, dass

> $m$ nur dann in $(y_\mu)$ eine ganze algebraische Zahl ist, wenn $k = 1$ ist.

Denn die Diskriminante von 15) ist:

$$D = -200$$

und $k$ kann nach der benutzten Theorie nur solche Faktoren enthalten, deren Quadrate in $D$ aufgehen. Also kann $k$ nur eine der Zahlen 1, 2, 5 sein.

Ist aber $z_\mu$ $(\mu = 1, 2, 3)$ eine jede Wurzel der Gleichung:

15') $$z^3 - p_1 z^2 + p_2 z - p_3 = 0,$$

so ist allgemein:

$$16)\left\{\begin{array}{l}\prod_u^{1,3}(u+u_0+vz_\mu+wz^2_\mu)=u^3+[3u_0+p_1v+(p^2_1-2p)w]u^2\\ \quad+(3u^2_0+2[p_1v+(p^2_1-2p_2)w]u_0+p_2v^2\\ \quad+(p_1p_2-3p_3)vw+(p^2_2-2p_1p_3)w^2)u\\ \quad+u^3+[p_1v+(p^2_1-2p_2w]u^2_0+[p_2v^2+(p_1p_2-3p_3)vw\\ \quad+(p^2_2-2p_1p_3)w^2]u_0+p_3(v^3+p_1v^2w+p_2vw^2+p_3w^3).\end{array}\right.$$

In unserem Falle ist:

$$p_1=1,\quad p_2=2=-p_3,\quad u_0=\frac{a}{k},\quad v=\frac{b}{k},\quad w=\frac{c}{k}.$$

Nach der Definition der ganzen algebraischen Zahlen müssen die Koeffizienten der Potenzen von $u$ in 16) ganze rationale Zahlen sein, also:

$$17)\left\{\begin{array}{l}3a_3+b-3c\equiv 0\pmod k,\\ 3a^2+(2b-6c)a+2b^2+8bc+8c^2\equiv 0\pmod{k^2},\\ a^3+(b-3c)a^2+(2b^2+8bc+8c^2)a-2b^3-2b^2c-4bc^2+4c^3\equiv 0\\ \qquad\qquad\pmod{k^3}.\end{array}\right.$$

Aus der ersten Kongruenz folgt:

$$17')\qquad b\equiv 3c-3a\pmod k,$$

oder

$$b=3c-3a+kb_1,$$

und dies in die zweite eingesetzt ergiebt:

$$15a^2-10kab_1+50c^2+20kcb_1-60ac\equiv 0\pmod{k^2},$$

oder da $k$ nur $1, 2, 5$ sein kann:

$$18)\qquad 15a^2+50c^2-60ac=15(a-2c)^2-10c^2\equiv 0\,(k^2).$$

Ist also $k=2$, so folgt:

$$a\equiv 0,\ b\equiv c\pmod 2,$$

daher aus $17_3$):

$$b\equiv 0\equiv c\equiv 0\pmod 2,$$

gegen die Voraussetzung, dass $a, b, c, k$ teilerfremd sind.

Ist aber $k=5$, so folgt aus 18):

$$a(a+c)\equiv 0\,(5),$$

also entweder

$$a\equiv 0,\quad\text{oder}\quad a+c\equiv 0\pmod 5.$$

Beides giebt auf $17_3$) angewandt:

$$c\equiv a\equiv b\equiv 0\,(5),$$

wiederum gegen Voraussetzung. Also ist in dem Ausdrucke $m$ der Nenner $k=1$.

Es ist also $(1, y_\mu, y_\mu^2)$ eine „Minimalbasis“ des Körpers $(y_\mu)$. Würde nun $f_2$ durch Adjunktion der Wurzeln von 15) zerlegbar, so könnte man setzen:

$$19)\quad \begin{cases} f_2 = \prod\limits_\mu [x^2 + (a_2 + a_1 y_\mu + a_0 y_\mu^2)x + b_2 + b_1 y_\mu + b_0 y_\mu^2] \\ \quad = \prod\limits_\mu [(x^2 + a_2 x) + b_2 + (a_1 x + b_1) y_\mu + (a_0 x + b_0) y_\mu^2]. \end{cases}$$

worin die Grössen $ab$ rationale Zahlen sind. Wir beweisen noch, dass sie ganz sein müssen.

In der That sind alle Wurzeln der Gleichung $f_2 = 0$ ganze Zahlen, also muss auch jeder Faktor der rechten Seite von 19) nur ganze algebraische Zahlen als Wurzeln haben. Nun besteht der Satz:

Sind die Koeffizienten einer algebraischen Gleichung algebraische Zahlen und insbesondere der höchste $=1$, und hat die Gleichung nur ganze algebraische Zahlen als Wurzeln, so sind alle Koeffizienten ganze Zahlen.

Der Beweis folgt daraus, dass Summe, Differenz und Produkt ganzer algebraischer Zahlen wieder algebraische Zahlen sind (W. II. S. 491), und dass jede ganze Funktion $n^{\text{ten}}$ Grades in $n$ lineare Faktoren zerlegt werden kann.

Darnach, und weil $(1, y_\mu, y_\mu^2)$ eine Minimalbasis des Körpers $(y_\mu)$ ist, müssen die Grössen $a$ und $b$ in 19) sogar ganze rationale Zahlen sein.

Das Ausmultiplizieren der rechten Seite von 19) geschieht nach der Formel 16), wenn man darin setzt:

$$u = x^2 + a_2 x, \quad u_0 = b_2, \quad v = a_1 x + b_1, \quad w = a_0 x + b_0,$$

$$p_1 = 1 \quad , \quad p_2 = 2\,, \qquad p_3 = -2,$$

also:

$$\begin{aligned} f_2 = {} & x^3(x + a_2)^3 + [3b_2 + a_1 x + b_1 - 3(a_0 x + b_0)]x^2(x + a_2)^2 \\ & + (3b^2_2 + 2r_1)(x + a_2) + b^3_2 + [a_1 x + b_1 - 3(a_0 x + b_0)]b^2_2 \\ & + 2r_2 b_2 + 2r_3, \end{aligned}$$

oder:

$$20)\quad \begin{cases} f_2 = x^6 + (3a_2 + a_1 - 3a_0)x^5 + [3a_2^2 + 3(b_2 - b_0)]x^4 \\ \qquad + [a^3_2 + (a_1 - 3a_0)a_2^2]x^3 + [3(b_2 - b_0)a^2_2 + 3b^2_2]x^2 \\ \qquad + [3b^2_2 + (a_1 - 3a_0)b^2_2]x + b^3_2 + (b_1 - 3b_0)b^2_2 + 2r_4, \end{cases}$$

wo $r_1 r_2 r_3 r_4$ ganze ganzzahlige Funktionen der Grössen $a, b, x$ sind. Vergleicht man aber die beiderseitigen Koeffizienten von $x^5$ und $x^3$, so findet man:

$$\begin{aligned} 2 &\equiv 3a_2 + a_1 - 3a_0 \\ -3 &\equiv a^3_2 + (a_1 - 3a_0)a^2_2 \pmod 2, \end{aligned}$$

oder da:

$$a_2^2 \equiv a_2 (\mathrm{mod}. 2),$$

$$0 \equiv a_2 + a_1 - a_0,$$

$$1 \equiv a_2^2 + (a_1 - a_0) a_2 \equiv a_2 (a_2 + a_1 - a_0) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2).$$

Letztere Kongruenz ist ein Widerspruch, die Gleichung 20) kann also nicht bestehen, $f_2$ ist nicht durch Adjunktion der Wurzeln von 15) zerlegbar, also $R_1 = 0$ auch nicht algebraisch auflösbar.

Dies Ergebnis können wir auch so aussprechen:

Die Aufgabe, die Seiten eines Dreiecks aus den inneren Winkelhalbierenden zu bestimmen, lässt sich im allgemeinen weder mit Lineal und Zirkel noch durch Ausziehen beliebiger Wurzeln oder durch beliebige Winkelteilungen lösen.

Damit ist die Frage des Herrn Dr. Heymann auf S. 567 der Hoffmannschen Zeitschrift, Jahrgang 1896, ob das Gleichungensystem des Problems der Winkelhalbierenden auflösbar sei, verneinend entschieden.

# Eine Determinantenformel.

Von

Prof. Dr. E. SCHULZE

in Friedenau bei Berlin.

Die doppelt orthosymmetrische Determinante ist sowohl in dieser Zeitschrift (Zehfuss, 7. Bd.; Weihrauch, 26. Bd.) als auch in anderen (Crelle, 73. Bd., Abhandlung von Stern) wiederholt Gegenstand der Untersuchung gewesen. Als ihre wichtigste, auf verschiedenen Wegen abgeleitete Formel ist gefunden worden:

$$
1)\quad \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \ldots a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_n & a_{n-1} \ldots\ldots & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_n \ldots\ldots\ldots\ldots & & a_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & \ldots\ldots\ldots & \ldots a_2 & a_1 & a_n \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \ldots . \alpha_n,
$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sind die Werte der $n$-wertigen Grösse

$$
\alpha = a_1 e + a_2 e^2 + a_3 e^3 + \cdots a_n e^n,
$$

wo $e$ eine der $n^{ten}$ Wurzeln der Einheit ist.

In dieser Abhandlung soll gezeigt werden, dass nicht nur die doppelt orthosymmetrische Determinante sich in obiger Weise als Produkt von $n$ Faktoren schreiben lässt, sondern eine Determinante von viel allgemeinerer Form, von welcher jene nur einen ganz besonderen Fall darstellt. Es ist die Determinante, welche Weierstraß in seinem an Schwartz gerichteten Briefe (Göttinger Nachrichten 1884) mit

$$
\varepsilon = \left| \sum_k \varepsilon_{\mu k r} \cdot a_k \right| \qquad (k, \mu, r = 1, 2, 3, \ldots n)
$$

bezeichnet hat; falls sie gleich Null ist, wird die Division zweier aus $n$ Einheiten gebildeten komplexen Zahlen unmöglich, und ein Produkt kann verschwinden, ohne dass einer seiner Faktoren verschwindet.

Zunächst soll der Wert der Determinante $\varepsilon$, den Weierstraß nur in obiger kurzer Form angiebt, aber nicht ableitet, genauer entwickelt werden. Machen wir betreffs der Multiplikation zweier komplexen Zahlen-

$$
\alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots a_n e_n, \quad \beta = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \cdots b_n e_n
$$

die Annahme, dass die Produkte der Einheiten lineare Funktionen von ihnen sind, dass also

$$2)\quad \begin{cases} e_1 \cdot e_1 = \varepsilon_{111} e_1 + \varepsilon_{211} e_2 + \varepsilon_{311} e_3 + \cdots + \varepsilon_{n11} e_n \\ e_1 \cdot e_2 = \varepsilon_{112} e_1 + \varepsilon_{212} e_2 + \varepsilon_{312} e_3 + \cdots + \varepsilon_{n12} e_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_k \cdot e_r = \varepsilon_{1kr} e_1 + \varepsilon_{2kr} e_2 + \cdots \varepsilon_{\mu kr} e_\mu + \cdots + \varepsilon_{nkr} e_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n \cdot e_n = \varepsilon_{1nn} e_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \varepsilon_{nnn} e_n \end{cases}$$

ist, so ergiebt sich:

$$\alpha \cdot \beta = \sum_k a_k e_k \cdot \sum_r b_r e_r = \sum a_k b_r \varepsilon_{\mu k r} e_\mu. \quad (k, \mu, r = 1, 2, \ldots n).$$

Setzen wir $\alpha \cdot \beta = \gamma = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n$, so ist

$$\sum a_k b_r \varepsilon_{\mu k r} e_\mu = \sum c_\mu e_\mu$$

und daher

$$\sum a_k b_r \varepsilon_{1kr} = c_1, \quad \sum a_k b_r \varepsilon_{2kr} = c_2, \cdots \sum a_\mu b_r \varepsilon_{nkr} = c_n.$$

Fassen wir $\beta = \frac{\gamma}{\alpha}$ als unbekannte Zahl auf, so haben wir zur Bestimmung der Koeffizienten $b_1, b_2, \ldots b_n$ die Gleichungen:

$$\begin{gathered} \left(\sum a_k \varepsilon_{1k1}\right) \cdot b_1 + \left(\sum a_k \varepsilon_{1k2}\right) b_2 + \cdots + \left(\sum a_k \varepsilon_{1kn}\right) b_n = c_1 \\ \left(\sum a_k \varepsilon_{2k1}\right) \cdot b_1 + \left(\sum a_k \varepsilon_{2k2}\right) b_2 + \cdots + \left(\sum a_k \varepsilon_{2kn}\right) b_n = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\sum a_k \varepsilon_{nk1}\right) b_1 + \left(\sum a_k \varepsilon_{nk2}\right) b_2 + \cdots + \left(\sum a_k \varepsilon_{nkn}\right) b_n = c_n. \end{gathered}$$

Die Determinante dieses Gleichungensystems ist:

$$3)\quad \varepsilon = \begin{vmatrix} \sum a_k \varepsilon_{1k1} & \sum a_k \varepsilon_{1k2} \ldots & \sum a_k \varepsilon_{1kr} \ldots & \sum a_k \varepsilon_{1kn} \\ \sum a_k \varepsilon_{2k1} & \sum a_k \varepsilon_{2k2} \ldots & \sum a_k \varepsilon_{2kr} \ldots & \sum a_k \varepsilon_{2kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum a_k \varepsilon_{\mu k1} & \sum a_k \varepsilon_{\mu k2} \ldots & \sum a_k \varepsilon_{\mu kr} \ldots & \sum a_k \varepsilon_{\mu kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum a_k \varepsilon_{nk1} & \sum a_k \varepsilon_{nk2} \ldots & \sum a_k \varepsilon_{nkr} \ldots & \sum a_k \varepsilon_{nkn} \end{vmatrix}$$

wo $\sum a_k \varepsilon_{\mu k r} = a_1 \varepsilon_{\mu 1 r} + a_2 \varepsilon_{\mu 2 r} + a_3 \varepsilon_{\mu 3 r} + \cdots + a_k \varepsilon_{\mu k r} + \cdots a_n \varepsilon_{\mu n r}$ ist.

Hiernach hat $\frac{\gamma}{\alpha}$ die Form:

$$4)\quad \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{\varepsilon} (\Delta_1 e_1 + \Delta_2 e_2 + \cdots \Delta_n e_n).$$

Aus Gleichung 4) folgt, dass für $\varepsilon = 0$ die Division unmöglich wird.

Wir wollen jetzt nach Dedekindscher Auffassung (Göttinger Nachrichten 1885) die Grössen $e_1, e_2, \ldots e_n$ nicht mehr als Einheiten, sondern als $n$-wertige Zahlen ansehen. Die $n$ Werte von $e_1$ seien $e_1^{(1)}, e_1^{(2)}, \ldots e_1^{(n)}$, von $e_2$ $e_2^{(1)}, e_2^{(2)}, \ldots e_2^{(n)}$ u. s. f.; $e_1^{(\mu)}, e_2^{(\mu)} \ldots e_n^{(\mu)}$ sollen zusammengehören. Dann ist auch $\alpha$ eine $n$-wertige Grösse; ihre $n$ Werte sind:

$$5)\quad \begin{cases} \alpha_1 = a_1 e_1^{(1)} + a_2 e_2^{(1)} + \cdots + a_n e_n^{(1)} \\ \alpha_2 = a_1 e_1^{(2)} + a_2 e_2^{(2)} + \cdots + a_n e_n^{(2)} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \alpha_n = a_1 e_1^{(n)} + a_2 e_2^{(n)} + \cdots + a_n e_n^{(n)}. \end{cases}$$

Bringen wir Gleichung 4) in die Form $\varepsilon = \alpha \cdot \varphi$, so können wir sie in die $n$ Gleichungen

$$\varepsilon = \alpha_1 \varphi_1, \quad \varepsilon = \alpha_2 \varphi_2, \quad \varepsilon = \alpha_3 \varphi_3 \ldots \varepsilon = \alpha_n \varphi_n$$

auflösen, d. h. $\varepsilon$ enthält $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ als Divisoren, und daher ist:

$$6)\quad \varepsilon = \lambda \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \ldots \cdot \alpha_n.$$

Es kommt nun darauf an, den Wert von $\lambda$ zu ermitteln. Führen wir die Multiplikation des Produkts $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n$ aus, so erhalten wir als ein Glied der Summe $a_k{}^n \cdot e_k^{(1)} \cdot e_k^{(2)} \ldots e_k^{(n)}$.

Auch die Determinante $\varepsilon$ lässt sich, da ihre Elemente Summen sind, in eine Summe von Determinanten gleichen Grades zerlegen; dasjenige Glied, welches von den Koeffizienten $a_1, a_2 \ldots a_n$ keinen andern als $a_k$ enthält, ist:

$$\begin{vmatrix} a_k\varepsilon_{1k1}, & a_k\varepsilon_{1k2}, \ldots & a_k\varepsilon_{1kn} \\ a_k\varepsilon_{2k1}, & a_k\varepsilon_{2k2}, \ldots & a_k\varepsilon_{2kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_k\varepsilon_{nk1}, & a_k\varepsilon_{nk2}, \ldots & a_k\varepsilon_{nkn} \end{vmatrix} = a_k{}^n \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon_{1k1} & \varepsilon_{1k2} \ldots & \varepsilon_{1kn} \\ \varepsilon_{2k1} & \varepsilon_{2k2} \ldots & \varepsilon_{2kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_{nk1} & \varepsilon_{nk2} \ldots & \varepsilon_{nkn} \end{vmatrix}$$

Hiernach geht Gleichung 6) in die folgende über:

$$a_k{}^n \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon_{1k1} & \varepsilon_{1k2} \ldots & \varepsilon_{1kn} \\ \varepsilon_{2k1} & \varepsilon_{2k2} \ldots & \varepsilon_{2kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_{nk1} & \varepsilon_{nk2} \ldots & \varepsilon_{nkn} \end{vmatrix} + \cdots = \lambda \cdot a_k^n \cdot e_k^{(1)} \cdot e_k^{(2)} \ldots e_k^{(n)} + \cdots$$

und daher ist:

$$7)\quad \begin{vmatrix} \varepsilon_{1k1} & \varepsilon_{1k2} \ldots & \varepsilon_{1kn} \\ \varepsilon_{2k1} & \varepsilon_{2k2} \ldots & \varepsilon_{2kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_{nk1} & \varepsilon_{nk2} \ldots & \varepsilon_{nkn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot e_k^{(1)} \cdot e_k^{(2)} \ldots e_k^{(n)}.$$

Zur Bestimmung der $n$-wertigen Grösse $e_k$ betrachten wir die $n$ Einheitsprodukte:

$$\begin{aligned} e_k \cdot e_1 &= \varepsilon_{1k1}\, e_1 + \varepsilon_{2k1}\, e_2 + \cdots + \varepsilon_{nk1}\, e_n \\ e_k \cdot e_2 &= \varepsilon_{1k2}\, e_1 + \varepsilon_{2k2}\, e_2 + \cdots + \varepsilon_{nk2}\, e_n \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ e_k \cdot e_n &= \varepsilon_{1kn}\, e_1 + \varepsilon_{2kn} e_2 + \cdots + \varepsilon_{nkn} \varepsilon_n \end{aligned}$$

und schreiben die Gleichungen in der Form:

$$\begin{array}{l} 0 = (\varepsilon_{1k1} - e_k)e_1 + \varepsilon_{2k1} e_2 + \cdots + \varepsilon_{nk1} e_n \\ 0 = \varepsilon_{1k2} e_1 + (\varepsilon_{2k2} - e_k)e_2 + \cdots + \varepsilon_{nk2} e_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 = \varepsilon_{1kn} e_1 + \varepsilon_{2kn} e_2 + \cdots + (\varepsilon_{nkn} - e_k)e_n. \end{array}$$

Aus diesem Gleichungssystem folgt die Determinantengleichung:

$$8) \quad \begin{vmatrix} (\varepsilon_{1k1} - e_k) & \varepsilon_{1k2} & \varepsilon_{1k3} \cdots & \varepsilon_{1kn} \\ \varepsilon_{2k1} & (\varepsilon_{2k2} - e_k) & \varepsilon_{2k3} \cdots & \varepsilon_{2kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_{nk1} & \varepsilon_{nk2} & \cdots\cdots & (\varepsilon_{nkn} - e_k) \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung ist in Bezug auf $e_k$ vom $n^{\text{ten}}$ Grade; sie heisse:

$$e_k^n + q_1 e_k^{n-1} + \cdots q_n = 0.$$

Bekanntlich gilt für das Produkt der $n$ Wurzeln dieser Gleichung die Beziehung: $e_k^{(1)} \cdot e_k^{(2)} \cdot e_k^{(3)} \cdots e_k^{(n)} = (-1)^n q_n$.

Anderseits finden wir, wenn wir die von $e_k$ freien Glieder der Determinantengleichung 8) sammeln,

$$(-1)^n \cdot q_n = \begin{vmatrix} \varepsilon_{1k1} & \varepsilon_{1k2} \cdots & \varepsilon_{1kn} \\ \varepsilon_{2k1} & \varepsilon_{2k2} \cdots & \varepsilon_{2kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_{nk1} & \cdots\cdots & \varepsilon_{nkn} \end{vmatrix}.$$

Vergleichen wir diese Resultate mit Gleichung 7), so ergiebt sich $\lambda = 1$, und daher hat die Determinante $\varepsilon$ den Wert:

$$9) \qquad \varepsilon = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdots \alpha_n,$$

wo $\varepsilon$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die in 3) und 5) angegebenen Werte haben.

Hiermit ist der Nachweis geführt, dass nicht nur die doppelt orthosymmetrische Determinante, sondern eine Determinante von viel allgemeinerer Form, eben diè Determinante $\varepsilon$, sich als Produkt von $n$ Faktoren darstellen lässt. Dass letztere die doppelt orthosymmetrische Determinante als besonderen Fall in sich schliesst, erkennen wir, wenn wir für das Gleichungssystem 2) die Form wählen:

$$1)\ e_1 \cdot e_1 = e_2, \quad 2)\ e_1 e_2 = e_3, \quad 3)\ e_1 \cdot e_3 = e_4, \ldots n)\ e_1 e_n = e_1.$$

Diese $n$ Gleichungen sind hinreichend zur Bestimmung der $n$ Grössen $e_1, e_2, \ldots e_n$; es ist:

$$e_1^n = 1 \quad \text{und} \quad e_k = e_1^k.$$

Man erkennt leicht, dass in diesem Falle $\varepsilon_{\mu k r}$ entweder gleich 1 oder gleich 0 ist, je nachdem $\mu$ bezw. $n + \mu$ gleich oder ungleich $k + r$ ist, und dass demgemäss die Determinante $\varepsilon$ doppelt orthosymmetrisch wird und für sie die in der Einleitung hingeschriebene Gleichung 1) gilt.

Diè Determinante $\varepsilon$ ist in ihrer allgemeinen Form 3) von ziemlich kompliziertem Bau, und die Formel 9) liefert infolgedessen nur bei besonders einfachen Annahmen brauchbare Resultate. Ausser der doppelt

orthosymmetrischen Determinante, die wohl den einfachsten und interessantesten Fall darstellt, mögen noch einige andere Determinanten, die verhältnismässig leicht zu behandeln sind, als Beispiele für die Determinante $\varepsilon$ geboten und die Form, welche die Gleichung 9) für sie annimmt, in Kürze angegeben werden.

Eine etwas allgemeinere Annahme als die, welche auf die doppelt orthosymmetrische Determinante führt, ist die folgende:

$$1)\ e_1\cdot e_1 = p_1 e_2,\quad 2)\ e_1 e_2 = p_2 e_3,\quad 3)\ e_1 e_3 = p_3 e_4, \ldots n)\ e_1 e_n = p_n e_1,$$

wo $p_1, p_2, \ldots p_n$ beliebige reelle oder komplexe Zahlen seien. Hier ist:

$$e_1{}^n = p_1\cdot p_2\cdot p_3 \ldots p_n \quad \text{und} \quad e_k = \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_{k-1}} e_1{}^k.$$

Unsere Determinantenformel 9) nimmt hier, wie ohne Schwierigkeit zu erkennen ist, die Form an:

$$\begin{vmatrix} a_n p_n & a_{n-1} p_{n-1} p_n & a_{n-2} p_{n-2} p_{n-1} p_n \ldots\ldots\ldots\ldots & a_1 p_1 p_2 \ldots p_n \\ a_1 & a_n p_n & a_{n-1} p_{n-1} p_n \quad a_{n-2} p_{n-2} p_{n-1} p_n \ldots & a_2 p_2 p_3 \ldots p_n \\ \frac{a_2}{p_1} & a_1 & a_n p_n \quad a_{n-1} p_{n-1} p_n \ldots & a_3 p_3 p_4 \ldots p_n \\ \frac{a_3}{p_1 p_2} & \frac{a_2}{p_1} & a_1 \quad a_n p_n \ldots & a_4 p_4 p_5 \ldots p_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{a_{n-1}}{p_1 \ldots p_{n-2}} & \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{a_3}{p_1 p_2} & \frac{a_2}{p_1} \quad a_1 & a_n p_n \end{vmatrix} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n,$$

wo
$$\alpha_r = a_1 e_1^{(r)} + \frac{a_2}{p_1}(e_1^{(r)})^2 + \frac{a_3}{p_1 p_2}(e_1^{(r)})^3 + \cdots \frac{a_n}{p_1 p_2 \ldots p_{n-1}}(e_1^{(r)})^n \quad \text{und}$$

$e_1^{(r)} = \sqrt[n]{p_1 p_2 \ldots p_n}\; e^{\frac{2\pi i r}{n}}$ ist.

Vorliegende Determinante ist nur einfach orthosymmetrisch; sie wird zur doppelt orthosymmetrischen, wenn $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$ gesetzt wird.

Ein anderes Beispiel sei:

$$\begin{aligned} &1)\quad e_1 e_1 = e_2, \\ &2)\quad e_1 e_2 = e_3, \\ &3)\quad e_1 e_3 = e_4, \ldots\ n-1)\ e_1 e_{n-1} = e_n, \\ &n)\quad e_1 e_n = -e_1 - e_2 - e_3 - \cdots - e_n. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von $e_1, e_2, \cdots e_n$ ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{e_1{}^{n+1} - 1}{e_1 - 1} = 0 \quad \text{und} \quad e_k = e_1{}^k,$$

$e_1$ bedeutet diesmal eine der $n+1^{\text{ten}}$ Wurzeln der Einheit, die Eins nicht mitgerechnet. Man erhält nach einiger Umformung:

$$\begin{vmatrix} -a_n & a_n - a_{n-1} & a_{n-1} - a_{n-2} \dots a_3 - a_2 & a_2 - a_1 \\ a_1 & -a_n & a_n - a_{n-1} \dots a_4 - a_3 & a_3 - a_2 \\ a_2 - a_1 & a_1 & -a_n \dots \dots a_4 - a_3 & \\ a_3 - a_2 & a_2 - a_1 & a_1 \quad -a_n \dots a_5 - a_4 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} - a_{n-2} \dots & \dots a_3 - a_2 & a_2 - a_1 & a_1 - a_n \end{vmatrix} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n,$$

wo
$$\alpha_r = a_1 e_1^{(r)} + a_2 (e_1^{(r)})^2 + \cdots a_n (e_1^{(r)})^n$$
und $e_1^{(r)} = e^{\frac{2\pi i r}{n+1}}$ ist, z. B.:

$$\begin{vmatrix} -a_3 & a_3 - a_2 & a_2 - a_1 \\ a_1 & -a_3 & a_3 - a_2 \\ a_2 - a_1 & a_1 & -a_3 \end{vmatrix} = (-a_1 - a_2 - a_3) \cdot (a_1 i - a_2 - a_3 i) \cdot (a_1 i - a_2 + a_3 i).$$

In einem weiteren Beispiele nehmen wir $n = 2m$ als gerade an; die Gleichungen, aus denen $e_1, e_2, \dots e_n$ zu bestimmen sind, mögen lauten:

$$1)\ e_1 e_1 = e_2, \quad 2)\ e_1 e_2 = e_3, \quad \dots \quad 2_{m-1})\ e_1 \cdot e_{2m-1} = e_{2m},$$
$$2m)\ e_1 e_{2m} = -e_1 + 2e_{m+1}.$$

Aus ihnen folgt: $(e_1^m - 1)^2 = 1$ und $e_k = e_1^k$.

Die Determinantengleichung 9) erhält für diesen Fall die Gestalt:

$$\begin{vmatrix} -a_{2m}, -a_{2m-1}, -a_{2m-2} \cdots -a_{m+1}, -(a_m + 2a_{2m}), -(a_{m-1} + 2a_{2m-1}) \cdots -(a_2 + 2a_{m+2}), -(a_1 + 2a_{m-1}) \\ a_1, \ -a_{2m}, \ -a_{2m-1} \cdots\cdots a_{m+1}, \quad -(a_m + 2a_{2m}), \ -(a_{m-1} + 2a_{2m-1}) \dots -(a_2 + 2a_{m+2}) \\ (a_2 \quad a_1 \quad -a_{2m} \cdots\cdots -a_{m+1}, \quad -(a_m + 2a_{2m}) \dots -(a_3 + 2a_{m+3}) \\ \dots \\ a_m \dots\dots a_2, \ a_1, \ -a_{2m} \dots\dots -a_{m+1} \\ (2a_1 + a_{m+1}), \ a_m \dots a_2, \quad a_1, \quad -a_{2m} \dots\dots -a_{m+2} \\ 2a_2 + a_{m+2}), \ (2a_1 + a_{m+1}), \ a_m \dots a_2, \quad a_1, \ -a_{2m} \dots\dots -a_{m+3} \\ \dots \\ (2a_{m+1} + a_{2m-1}), \dots (2a_1 + a_{m+1}), \ a_m \dots\dots a_2, \quad a_1, \ -a_{2m} \end{vmatrix}$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2m})^m \cdot (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{2m})^m.$$

Ferner werde $n = 2^p$ als Potenz von 2 angenommen, und das Gleichungssystem heisse:

$$1)\ e_1^2 = e_n \qquad 2)\ e_2^2 = e_n \qquad 3)\ e_3 \cdot e_1 = e_4 \cdot e_2 \qquad 4)\ e_4^2 = e_n$$
$$5)\ e_5 \cdot e_1 = e_8 \cdot e_4 \qquad 6)\ e_6 \cdot e_1 = e_8 \cdot e_3 \qquad 7)\ e_7 e_1 = e_8 \cdot e_2 \qquad 8)\ e_8^2 = e_n$$
$$9)\ e_9 \cdot e_1 = e_{16} \cdot e_8 \qquad 10)\ e_{10} e_1 = e_{16} \cdot e_7 \dots 15)\ e_{15} e_1 = e_{16} \cdot e_2 \qquad 16)\ e_{16}^2 = e_n$$
$$\cdots n_{-2})\ e_{n-2} \cdot e_1 = e_n \cdot e_3 \qquad n_{-1})\ e_{n-1} e_1 = e_n e_2 \qquad n)\ e_n^2 = e_n.$$

Hieraus folgt: $e_n = 1 \quad e_1^2 = e_2^2 = e_4^2 = e_8^2 = \cdots = 1.$

Durch $e_1, e_2, e_4, e_8, \dots$ lassen sich die übrigen Grössen $e_\mu$ ausdrücken:

$$e_3 = e_1 e_2 e_4, \quad e_5 = e_1 e_4 e_8, \quad e_6 = e_2 e_4 e_8, \quad e_7 = e_1 e_2 e_8, \ \dots \ e_{n-3} = e_1 e_4,$$
$$e_{n-2} = e_2 e_4, \quad e_{n-1} = e_1 e_2.$$

Die Determinantengleichung 9) lautet in diesem Falle:

$$\begin{vmatrix}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} \dots a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\
a_{n-1} & a_n & a_{n-3} & a_{n-2} \dots a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\
a_{n-2} & a_{n-3} & a_n & a_{n-1} \dots a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\
a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \quad \dots a_1 & a_2 & a_3 & a_3 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \quad \dots a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} \\
a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \quad \dots a_{n-1} & a_n & a_{n-3} & a_{n-2} \\
a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \quad \dots a_{n-2} & a_{n-3} & a_n & a_{n-1} \\
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \quad \dots a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n
\end{vmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l}
(\quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) \\
\cdot(- a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots - a_{n-3} + a_{n-2} - a_{n-1} + a_n) \\
\cdot(\quad a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + \dots + a_{n-3} - a_{n-2} - a_{n-1} + a_n) \\
\cdot(- a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - \dots - a_{n-3} - a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot(\quad a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + \dots - a_{n-3} - a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) \\
\cdot(- a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - \dots + a_{n-3} - a_{n-2} - a_{n-1} + a_n) \\
\cdot(\quad a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{n-3} + a_{n-2} - a_{n-1} + a_n) \\
\cdot(- a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - \dots + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n).
\end{array} \right.$$

Als letztes Beispiel wählen wir das Gleichungssystem:

$$1)\ e_1 e_2 = e_3 \quad 2)\ e_2 e_3 = e_4 \quad 3)\ e_3 e_4 = e_5$$

$$4)\ e_4 e_5 = e_6 \dots \quad n_{-1})\ e_{n-1} e_n = e_1 \quad n)\ e_n e_1 = e_2.$$

Die Gleichungen sind dadurch charakterisiert, dass sie durch cyklische Vertauschung von $e_1, e_2, e_3, \dots$ ineinander übergehen.

Für $n = 6$ ergiebt z. B. die Rechnung:

$$\begin{vmatrix}
a_1+a_3+a_4+a_5-(a_3-a_5)i & -a_2-a_4+a_5+a_6-(a_4-a_6)i & \dots\ a_6+a_2-a_3-a_4+(a_2+a_4-2a_5)i \\
a_1+a_3-a_4-a_5+(a_3+a_5-2a_6)i & a_2+a_4+a_5+a_6-(a_4-a_6)i & \dots -a_6+a_2+a_3-a_4+(a_2+a_4-2a_1)i \\
-a_1+a_3+a_4-a_5+(a_3+a_5-2a_2)i & a_2+a_4-a_5-a_6+(a_4+a_6-2a_1)i & \dots\ a_6-a_2+a_3-a_4+(a_2-a_4)i \\
a_1-a_3+a_4-a_5+(a_3-a_5)i & -a_2+a_4+a_5-a_6+(a_4+a_6-2a_3)i & \dots\ a_6-a_2-a_3+a_4+(a_2-a_4)i \\
a_1-a_3-a_4+a_5)+(a_3-a_5)i & a_2-a_4+a_5-a_6+(a_4-a_6)i & \dots -a_6-a_2+a_3+a_4-(a_2-a_4)i \\
-a_1-a_3+a_4+a_5-(a_2-a_5)i & a_2-a_4-a_5+a_6+(a_4-a_6)i & \dots\ a_6+a_2+a_3+a_4-(a_2-a_4)i
\end{vmatrix}$$

$$= -2^6 \cdot [(a_5-a_2)+(a_1-a_3+a_4+a_6)i] \cdot [(a_4-a_1)+(a_6-a_2+a_3+a_5)i] \cdot [(a_3-a_6)+(a_5-a_1+a_2+a_4)i]$$

$$\cdot [(a_2-a_5)+(a_4-a_6+a_1+a_3)i] \cdot [(a_1-a_4)+(a_3-a_5+a_6+a_2)i] \cdot [(a_6-a_3)+(a_2-a_4+a_5+a_1)i].$$

Diese Beispiele mögen genügen, um die Anwendbarkeit der Formel 9) zu zeigen. Von den Koeffizienten $\varepsilon_{\mu k r}$, welche durch das Gleichungssystem 2) eingeführt sind, sind nur $n^2$ unabhängig, denn zur Bestimmung der $n$ Grössen $e_1, e_2, \ldots e_n$ genügen $n$ Gleichungen, z. B.:

$$\begin{aligned} e_1 e_1 &= \varepsilon_{111} e_1 + \varepsilon_{211} e_2 + \cdots + \varepsilon_{n11} e_n \\ e_1 e_2 &= \varepsilon_{112} e_1 + \varepsilon_{212} e_2 + \cdots + \varepsilon_{n12} e_n \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ e_1 e_n &= \varepsilon_{11n} e_1 + \varepsilon_{21n} e_2 + \cdots + \varepsilon_{n1n} e_n \end{aligned}$$

mit den $n^2$ Koeffizienten $\varepsilon_{111}, \varepsilon_{211}, \ldots \varepsilon_{n1n}$. Die übrigen Gleichungen des Systems 2) müssen identisch erfüllt sein. Weil aber die Berechnung der abhängigen Koeffizienten $\varepsilon_{\mu k r}$ durch die $n^2$ unabhängigen nur bei besonders einfachen Annahmen leicht zu bewerkstelligen ist und ausserdem zur Auffindung der Wurzeln $e_k^{(1)}, e_k^{(2)}, \ldots e_k^{(n)}$ eine Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades (8) gelöst werden muss, ist die Ausnützung der Formel 9) eine beschränkte.

Im Prinzip freilich lässt sich nicht nur die Determinante $\varepsilon$, sondern jede beliebige Determinante $\sum \pm a_{11} a_{22} a_{33} \ldots a_{nn}$ als Produkt von $n$ Faktoren darstellen, man muss zu diesem Zwecke die $n^2$ unabhängigen Koeffizienten $\varepsilon_{\mu k r}$ durch die $n^2$ Elemente $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{nn}$ der Determinante $\sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ mit Hilfe der $n^2$ Gleichungen:

$$a_{11} = a_1 \varepsilon_{111} + a_2 \varepsilon_{112} + \cdots + a_n \varepsilon_{11n},$$

$$a_{21} = a_1 \varepsilon_{211} + a_2 \varepsilon_{212} + \cdots + a_n \varepsilon_{21n}, \cdots \quad a_{\mu k} = a_1 \varepsilon_{\mu k 1} + a_2 \varepsilon_{\mu k 2} + \cdots + a_n \varepsilon_{\mu k n}$$

berechnen und die erhaltenen Werte in die Gleichung 8) einsetzen, wodurch die Wurzeln $e_k^{(1)}, e_k^{(2)}, \ldots e_k^{(n)}$ gefunden werden können.

Weil in den obigen $n^2$ Gleichungen ausser den Koeffizienten $\varepsilon_{\mu k r}$ noch die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ vorkommen, lässt sich sogar aussprechen, dass jede Determinante auf unendlich viele Weisen als Produkt von $n$ Faktoren dargestellt werden kann, da wir über diese Grössen oder statt ihrer über ebensoviele von den Koeffizienten $\varepsilon_{\mu k r}$ beliebig verfügen können.

Für $n = 3$ wollen wir dies durch ein Beispiel erläutern. Da $a_1$ unbeschadet der Allgemeinheit gleich eins angenommen werden kann, sind zwei willkürliche Annahmen erlaubt. Es sei z. B. $\varepsilon_{213} = \varepsilon_{313} = 0$.

Dann ist:

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_1 &= \varepsilon_{111} e_1 + \varepsilon_{211} e_2 + \varepsilon_{311} e_3 \\ e_1 \cdot e_2 &= \varepsilon_{112} e_1 + \varepsilon_{212} e_2 + \varepsilon_{312} e_3 \\ e_1 \cdot e_3 &= \varepsilon_{113} e_1. \end{aligned}$$

Aus der dritten Gleichung folgt: $e_3 = \varepsilon_{113}$ und daher ist:

$$e_2 \cdot e_3 = \varepsilon_{113} e_2^2 \quad e_3 \cdot e_3 = \varepsilon_{113} e_3 \quad e_2 \cdot e_2 = \varepsilon_{122} e_1 + \varepsilon_{222} e_2 + \varepsilon_{322} e_3.$$

Wählt man $\varepsilon_{122}, \varepsilon_{222}, \varepsilon_{322}$ als die abhängigen Koeffizienten, so findet man:




$$\varepsilon_{122} = \frac{1}{\varepsilon_{211}}(\varepsilon_{2\,2}\,\varepsilon_{112} + \varepsilon_{312}\,\varepsilon_{113}),$$

$$\varepsilon_{222} = \frac{1}{\varepsilon_{211}}(\varepsilon_{211}\,\varepsilon_{112} + \varepsilon_{212}^2 - \varepsilon_{212}\,\varepsilon_{111} - \varepsilon_{311}\,\varepsilon_{113}),$$

$$\varepsilon_{322} = \frac{1}{\varepsilon_{211}}(\varepsilon_{311}\,\varepsilon_{112} + \varepsilon_{312}\,\varepsilon_{212} - \varepsilon_{312}\,\varepsilon_{111}).$$

Aus den 9 Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} a_{11} = \varepsilon_{111} + a_2\varepsilon_{112} + a_3\varepsilon_{113} & a_{12} = \varepsilon_{112} + a_2\varepsilon_{122} & a_{13} = \varepsilon_{113} \\ a_{21} = \varepsilon_{211} + a_2\varepsilon_{212} & a_{22} = \varepsilon_{212} + a_2\varepsilon_{222} + a_3\varepsilon_{113} & a_{23} = a_2\varepsilon_{113} \\ a_{31} = \varepsilon_{311} + a_2\varepsilon_{312} & a_{32} = \varepsilon_{312} + a_2\varepsilon_{322} & a_{33} = a_3\varepsilon_{113} \end{array}$$

ergeben sich für die 9 Unbekannten $a_2, a_3, \varepsilon_{111}, \varepsilon_{211}, \varepsilon_{311}, \varepsilon_{112}, \varepsilon_{212}, \varepsilon_{312}, \varepsilon_{113}$ die Werte:

$$a_2 = \frac{a_{23}}{a_{13}} \quad a_3 = \frac{a_{33}}{a_{13}} \quad \varepsilon_{113} = a_{13}$$

$$\varepsilon_{112} = \frac{1}{q}(a_{12}a_{21} - a_2 a_{12}a_{11} + a_2 a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}),$$

$$\varepsilon_{212} = \frac{1}{q}(a_{21}a_{22} - a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31} - a_2 a_{12}a_{21}),$$

$$\varepsilon_{312} = \frac{1}{q}(a_{21}a_{32} - a_2 a_{12}a_{31}),$$

wo

$$q = a_{21} + a_2 a_{22} - a_2 a_{11} - a_2^2 a_{12},$$

$$\varepsilon_{111} = a_{11} - a_{33} - a_2\varepsilon_{112},$$

$$\varepsilon_{211} = a_{21} - a_2\varepsilon_{212},$$

$$\varepsilon_{311} = a_{31} - a_2\varepsilon_{312}.$$

Hiernach ist:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left(e_1^{(1)} + \frac{a_{23}}{a_{13}}e_2^{(1)} + a_{33}\right)\cdot\left(e_1^{(2)} + \frac{a_{23}}{a_{13}}e_2^{(2)} + a_{33}\right) \cdot\left(e_1^{(3)} + \frac{a_{23}}{a_{13}}e_2^{(3)} + a_{33}\right),$$

$e_1^{(1)}, e_1^{(2)}, e_1^{(3)}$ sind die Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{111} - e_1 & \varepsilon_{211} & \varepsilon_{311} \\ \varepsilon_{112} & \varepsilon_{212} - e_1 & \varepsilon_{312} \\ \varepsilon_{113} & 0 & -e_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$e_2^{(1)}, e_2^{(2)}, e_2^{(3)}$ findet man aus einer der Gleichungen:

$$e_1\cdot e_1 = \varepsilon_{111}\cdot e_1 + \varepsilon_{211}\cdot e_2 + \varepsilon_{311}\cdot a_{13} \quad \text{oder} \quad e_1\cdot e_2 = \varepsilon_{112}e_1 + \varepsilon_{212}e_2 + \varepsilon_{312}a_{13}.$$

Beispielsweise ist:

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 10 & 22 & 2 \\ -19 & -26 & 3 \end{vmatrix} = (1 + 2\cdot 2 + 3)\cdot\left(2 + 2\cdot\frac{5}{2} + 3\right)\cdot(3 + 2\cdot 4 + 3) = 1120.$$

Falls

$$a_{11} = a_{23} = a_{32} = a,$$
$$a_{12} = a_{21} = a_{33} = b,$$
$$a_{13} = a_{22} = a_{31} = c$$

ist, wird die Determinante doppelt orthosymmetrisch, und die Rechnung ergiebt für diesen Fall:

$$(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc} = r \text{ gesetzt}).$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (c + a + b) \cdot \left(c \frac{a - b + r}{c - a} + a \frac{(b-a)(a-b+r)}{(c-a)(a-c+r)} + b\right) \cdot \left(c \frac{a-b-r}{c-a} + a \frac{(b-a)(a-b-r)}{(c-a)(a-c-r)} + b\right).$$

Die Form, in welcher die doppelt orthosymmetrische Determinante hier als Produkt auftritt, weicht von der bekannten Form, wie sie Gleichung 1) liefert, nämlich:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a & c \\ c & b & a \\ a & c & b \end{vmatrix} = -(c + a + b) \cdot \left(c \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + a \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} + b\right) \cdot \left(c \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} + a \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + b\right)$$

erheblich ab.

Erstere Form wird für den Fall, dass $b = c$ ist, besonders einfach; es ist:

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & b & a \\ b & a & b \end{vmatrix} = (a + 2b)(a - b)(-a + b).$$

# Über eine von Abel untersuchte Funktionalgleichung.

Von

PAUL STÄCKEL

in Kiel.

In einer im ersten Bande von Crelles Journal veröffentlichten Abhandlung* hat Abel die Aufgabe behandelt, zu untersuchen, bei welchen Funktionen $f(x, y)$ der Ausdruck:

$$f[z, f(x, y)]$$

eine symmetrische Funktion der drei unabhängigen Veränderlichen $x, y, z$ wird, und ist zu dem eleganten Resultate gelangt, dass zu jeder Funktion $f(x, y)$ der verlangten Beschaffenheit eine Funktion $\psi(u)$ gehört, für die identisch:

$$1)\qquad \psi[f(x, y)] = \psi(x) + \psi(y)$$

ist. Nimmt man aber umgekehrt die Funktion $\psi(u)$ willkürlich an und bezeichnet die inverse Funktion mit $\psi_1(u)$, sodass

$$2)\qquad \psi[\psi_1(u)] \equiv u$$

ist, so wird durch die Gleichung:

$$3)\qquad f(x, y) = \psi_1[\psi(x) + \psi(y)]$$

die allgemeinste Lösung der Aufgabe gegeben, denn es ist:

$$f[z, f(x, y)] = \psi_1[\psi(z) + \psi(x) + \psi(y)]$$

eine symmetrische Funktion von $x, y, z$.

Gegen die Herleitung dieser Lösung lässt sich indessen mehr als ein Einwand machen und da in den Anmerkungen, die Sylow und Lie den gesammelten Werken Abels hinzugefügt haben, über die betreffende Abhandlung nichts bemerkt wird, so sei es gestattet hierauf genauer einzugehen.

---

* Wieder abgedruckt in den Oeuvres complètes, 1. Ausgabe S. 1—4, 2. Ausgabe S. 61—65.

Abel bemerkt zuerst, dass infolge der Symmetrie

$$4)\qquad f[z, f(x, y)] = f[z, f(y, x)]$$

sein muss. Wenn er aber daraus den Schluss zieht, dass notwendig

$$f(x, y) = f(y, x)$$

sein müsse, so ist zu bemerken, dass durch diese Annahme allerdings die Gleichung 7) erfüllt wird, dass es jedoch sehr gut noch andere Lösungen von 4) geben könnte. Wäre z. B.:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

und dieser Ausdruck genügt der Gleichung 4), so wird 4) auch durch

$$f(x, y) = -f(y, x)$$

befriedigt.

Glücklicherweise lassen sich jedoch die folgenden Entwickelungen Abels ohne Mühe so umgestalten, dass man die Gleichung:

$$f(x, y) = f(x, y)$$

gar nicht zu benützen braucht. Wenn nämlich Abel behauptet, infolge dieser Gleichung reduzierten sich die fünf Bedingungsgleichungen für die Symmetrie von $f[z, f(x, y)]$ auf die beiden:

$$5)\qquad \begin{cases} f[z, f(x, y)] = f[x, f(y, z)], \\ f[z, f(x, y)] = f[y, f(z, x)], \end{cases}$$

so braucht man dafür nur zu sagen: Soll

$$f[z, f(x, y)]$$

symmetrich in $x, y, z$ sein, so ist sicher notwendig, dass die beiden Gleichungen:

$$6)\qquad \begin{cases} f[z, f(x, y)] = f[x, f(y, z)], \\ f[z, f(x, y)] = f[y, f(x, z)] \end{cases}$$

bestehen. Die erste der Gleichungen 6) ist mit der ersten der Gleichungen 5) identisch, die zweite der Gleichungen 6) enthält rechts

$$f(x, z) \quad \text{statt} \quad f(z, x),$$

und dadurch wird bewirkt, dass man die Gleichungen 6) genau ebenso behandeln kann, wie die Gleichungen 5) von Abel behandelt werden, aber ohne die Symmetrie von $f(x, y)$ in $x$ und $y$ benutzen zu müssen.

In der That, setzt man zur Abkürzung

$$7)\qquad f(x, y) = \tau, \quad f(y, z) = \varrho, \quad f(x, z) = \sigma,$$

so ergiebt sich durch Differentiation nach $x, y, z$:

$$8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f(z, \tau)}{\partial \tau} \cdot \dfrac{\partial \tau}{\partial x} = \dfrac{\partial f(y, \sigma)}{\partial \sigma} \cdot \dfrac{\partial \sigma}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial f(x, \varrho)}{\partial \varrho} \cdot \dfrac{\partial \varrho}{\partial y} = \dfrac{\partial f(z, \tau)}{\partial \tau} \cdot \dfrac{\partial \tau}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial f(y, \sigma)}{\partial \sigma} \cdot \dfrac{\partial \sigma}{\partial z} = \dfrac{\partial f(x, \varrho)}{\partial \varrho} \cdot \dfrac{\partial \varrho}{\partial z} \end{cases}$$

und hieraus folgt sofort:

$$9)\qquad \frac{\partial\varrho}{\partial y}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial z}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial x}=\frac{\partial\varrho}{\partial z}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial x}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial y}.$$

Legt man der Veränderlichen $z$ einen festen Wert $z_0$ bei, so wird:

$$10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varrho}{\partial y}:\dfrac{\partial\varrho}{\partial z}=\chi(y,z_0)=\varphi'(y), \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}:\dfrac{\partial\sigma}{\partial z}=\chi(x,z_0)=\varphi'(x), \end{cases}$$

und aus 9) folgt:

$$\tau\equiv f(x,y)=\Omega[\varphi(x)+\varphi(y)],$$

wo $\Omega$ eine willkürliche Funktion bedeutet. Das ist aber — von der Bezeichnung abgesehen* — genau das Ergebnis, zu dem Abel in seiner Gleichung 7) gelangt.

Die gesuchte Funktion $f(x,y)$ hat also notwendig die Gestalt:

$$11)\qquad f(x,y)=\Omega[\varphi(x)+\varphi(y)].$$

Bildet man jetzt $f(z,\tau)$, so kommt:

$$12)\qquad f[z,f(x,y)]=\Omega[\varphi z+\varphi\Omega(\varphi x+\varphi y)],$$

und dieser Ausdruck muss symmetrisch in $x, y, z$ sein. Wenn aber Abel hieraus folgert, dass das Argument:

$$\varphi z+\varphi\Omega[\varphi(x)+\varphi(y)]$$

selbst in $x, y, z$ symmetrisch sein muss, so geht er wieder zu weit. Wäre z. B.:

$$f(x,y)=(\sqrt{x}+\sqrt{y})$$

— und dieser Ausdruck genügt der Gleichung 11) —, so könnte jenes Argument bei den Vertauschungen von $x, y, z$ sehr wohl sein Vorzeichen ändern, ohne dass die Funktion sich änderte.

Aber auch wenn man hiervon absieht, lässt die Untersuchung der Gleichung 12) zu wünschen übrig. Abel sagt nämlich, der Veränderlichen $z$ möge ein solcher Wert beigelegt werden, dass

$$\varphi(z)=0$$

ist. Setzt man aber z. B.:

$$\varphi(z)=e^z,$$

so lässt sich diese Forderung nicht erfüllen, und es bleibt daher fraglich, ob man auf diesem Wege alle Lösungen der Aufgabe erhält.

Am einfachsten dürfte folgendes Verfahren zum Ziele führen. Setzt man zur Abkürzung:

$$13)\qquad \varphi(x)=\xi,\quad \varphi(y)=\eta,\quad \varphi(z)=\zeta$$

so muss die Identität bestehen:

$$14)\qquad \Omega[\zeta+\varphi\Omega(\xi+\eta)]=\Omega[\xi+\varphi\Omega(\eta+\zeta)].$$

---

* Abel schreibt $\psi$ statt $\Omega$, da er jedoch das Zeichen $\psi$ nachher in einem andern Sinne verwendet, schien es zweckmässig, hier die Bezeichnung zu ändern.

Differentiiert man nach $x$ und $y$, so kommt:

$$\Omega'[\zeta + \varphi\Omega(\xi + \eta)] \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi\Omega(\xi + \eta) \cdot \varphi'(x) = \Omega'[\xi + \varphi\Omega(\eta + \zeta)] \cdot \varphi'(x),$$

$$\Omega'[\zeta + \varphi\Omega(\xi + \eta)] \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \varphi\Omega(\xi + \eta) \cdot \varphi'(y)$$

$$= \Omega'[\xi + \varphi\Omega(\eta + \zeta)] \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \varphi\Omega(\eta + \zeta) \cdot \varphi'(y)$$

und da

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \varphi\Omega(\xi + \eta) = \frac{\partial}{\partial \eta} \varphi\Omega(\xi + \eta)$$

ist, so muss

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \varphi\Omega(\eta + \zeta) = 1,$$

mithin, wenn $\eta + \zeta = p$ gesetzt wird:

$$\varphi\Omega(p) = p + c \tag{15}$$

sein, wo $c$ eine Konstante bedeutet. Das ist aber genau die Gleichung, zu der auch Abel gelangt.

Führt man jetzt, nach dem Vorgange von Abel, statt $\varphi(x)$ eine neue Funktion $\psi(x)$ durch die Gleichung:

$$\varphi(x) = \psi(x) - c \tag{16}$$

ein, so wird vermöge 15):

$$\psi\Omega(p) = p, \tag{17}$$

und es ist daher:

$$\psi f(x, y) = \psi x + \psi y. \tag{1}$$

Damit ist aber nachgewiesen, dass die von Abel gegebene Lösung der Aufgabe auch die allgemeinste Lösung ist, wofern man die Differentiierbarkeit von $f(x, y)$ nach $x$ und $y$ voraussetzt.

# Zum Gesetz der elastischen Dehnungen.

Von

R. Mehmke

in Stuttgart.

---

Die Grundlage der Elastizitäts- und Festigkeitslehre bildet auch in den neuesten Darstellungen, die ihr zu Teil geworden sind, noch immer der 1660 von Robert Hooke gefundene, 18 Jahre später von ihm veröffentlichte Satz, dass die Kraft, mit der ein elastischer Körper die natürliche Lage seiner Teile wieder herzustellen sucht, dem Betrage proportional sei, um den jene Teile, einerlei ob durch Zug oder durch Druck, daraus entfernt worden waren. Auf einen in seiner Längsrichtung gezogenen oder gedrückten Stab angewendet und durch eine Gleichung ausgedrückt heisst dies:

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \alpha\sigma,$$

wo $\sigma$ die in dem Stab hervorgerufene (positive bezw. negative) Spannung, $\varepsilon$ die zugehörige (positive bezw. negative) Dehnung, $E$ eine für jedes Material konstant vorausgesetzte Grösse, den sogenannten Elastizitätsmodul, $\alpha = 1 : E$ den „Dehnungskoeffizienten"* bezeichnet. Das „Hookesche Gesetz" oder, wie es auch genannt wird, das Gesetz der Proportionalität zwischen Spannung und Dehnung, oder das lineare Spannungs-Dehnungs-Gesetz, hat zwar zu keiner Zeit unbedingte Anerkennung gefunden; führten doch die, namentlich von seiten der Ingenieure in überaus grosser Zahl angestellten Zug-, Druck- und Biegungsversuche immer wieder — namentlich bei einzelnen für die Technik wichtigen Stoffen, wie Gusseisen, Stein, Holz — mehr oder minder bedeutende, auf keinen Fall zu übersehende Abweichungen vor Augen. Nachdem aber durch die Experimente mehrerer Physiker (Wertheim 1848, Morin 1862, Edlund 1861, 1865, Miller 1882) das Hookesche Gesetz scheinbar bestätigt worden war, drohte es zum Dogma zu werden; hat man es doch sogar schon als selbstverständlich oder aus Gründen allgemeiner Art folgend hingestellt.** Und während die Techniker dasselbe längst einer erneuten Kritik unterzogen hatten, ist dies seitens der Physiker erst 1891 geschehen. In diesem Jahre ist nämlich von J. O. Thompson durch Zugversuche mit 23 m langen Kupfer-, Stahl-, Messing- und Silberdrähten, die er unter F. Kohlrausch im physikalischen Institut der Universität Strassburg ausgeführt hat, nachgewiesen worden, dass auch bei geringen Belastungen das Proportionalitätsgesetz nur eine Annäherung an das wirkliche

---

* C. Bach, Elastizität und Festigkeit, § 2, 1. Auflage. Stuttgart 1889.

** Siehe z. B.: F. Auerbach in Winkelmanns Handbuch der Physik, Bd. I, S. 218, 1891.

Elastizitätsgesetz darstellt.* Thompson zeigt unter anderem, dass die (dem spannungslosen Zustand entsprechenden) wahren Elastizitätsmoduln bis 10 Prozent grösser sein können als die auf dem früher üblichen Wege ermittelten, weshalb er es für notwendig hält, physikalische Konstanten, die von dem Elastizitätsmodul abhängen, neu zu berechnen. Wenn, wie oben erwähnt wurde, die Ergebnisse einiger früheren Beobachter mit dem Hookeschen Gesetze sich scheinbar im Einklang befinden, so erklärt dies Thompson auf sehr glaubhafte Weise dadurch, dass jene Beobachter gewisse Fehlerquellen (Krümmungen und Knicke in den Drähten, elastische Nachwirkung) nicht zu beseitigen verstanden haben. Wir sehen hier den eigentümlichen Fall, dass die Physiker eine Zeit lang den Fortschritt in der Erkenntnis der Wirklichkeit gehemmt und indirekt die Entwickelung eines wichtigen Zweiges der Ingenieurwissenschaften aufgehalten haben. Nach einem Ausspruche, den C. Bach neuerdings gethan hat,** „gestatten die Anforderungen, welche die Technik an den Ingenieur stellt, heute nicht mehr — wenigstens in verschiedenen Fällen der Anwendung — die Beziehung $\varepsilon = \alpha\sigma$, welche nur für eine Minderheit von Stoffen innerhalb gewisser Grenzen als zutreffend erscheint, als allgemeines Gesetz anzusehen und zur Grundlage der gesamten Elastizitäts- und Festigkeitslehre zu machen.“

Es fehlt nicht an Versuchen, an Stelle obiger Gleichung eine dem thatsächlichen Verhalten elastischer Körper besser entsprechende zu setzen und für die Festigkeitslehre nutzbar zu machen, aber keiner scheint in weiteren Kreisen Beachtung gefunden zu haben. Nun hat im Anfange dieses Jahres C. Bach ein allgemeines Gesetz der elastischen Dehnungen veröffentlicht,*** das von einem seiner Schüler, Herrn W. Schüle, aus den Ergebnissen umfangreicher, sich über mehr als ein Jahrzehnt erstreckender Versuche Bachs abgeleitet worden ist. Es lautet:

$$\varepsilon = \alpha\sigma^m;$$

$\alpha$ und $m$ bezeichnen Konstanten, die vom Material abhängen und bei einem und demselben Material für Druck andere Werte haben, als für Zug. Als eine die Form andeutende Benennung dafür schlage ich „Potenzgesetz“ vor.† Der Exponent $m$ liegt in der Regel — bei Gusseisen, Kupfer, Körpern aus Cement u. s. w. — zwischen 1 und 2, seltener.

* Joseph Osgood Thompson, Über das Gesetz der elastischen Dehnung. Wiedemanns Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge Bd. 44, S 555 bis 576, 1891.

** C. Bach, Abhandlungen und Berichte, S. 294, Stuttgart 1897.

*** Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. 41, S. 248 bis 252, 1897. Übrigens ist, wie ich allerdings erst nachträglich bemerkt habe, das gleiche Gesetz schon früher in Vorschlag gebracht worden, 1729 von Bülffinger und 1822 von Hodgkinson (siehe die später folgende Zusammenstellung).

† Vergl. A. Steinhauser, Die Lehre von der Aufstellung empirischer Formeln, S. 173, 1889.

wie bei Leder, zwischen 0 und 1. Nur bei einer mässigen Zahl der in der Technik verwendeten Stoffe — Schmiedeisen und Stahl gehören zu ihnen — nähert sich $m$ in beträchtlichem Grade dem Grenzwert 1, für den das Potenzgesetz in das Hookesche übergeht.

Das Potenzgesetz besticht durch seine Eleganz und giebt, wie sich zeigen wird, in den wichtigen Fällen des Gusseisens und der Körper aus Cement und Cementmörtel die Versuchsergebnisse besser wieder, als andere empirische Formeln mit nur zwei Konstanten. Es hat zugleich eine für die logarithmische Rechnung bequeme Gestalt und wird sich deshalb für manche Anwendungen vermutlich sehr gut eignen. Wenn man jedoch versucht, auch nur die Lehre von der Biegung gerader Balken diesem Gesetz gemäss umzugestalten, stösst man auf mathematische Schwierigkeiten. Nicht allein treten an Stelle des statischen und des Trägheitsmomentes, mit denen man in der alten Biegungslehre auskam, Integrale, die schon bei ganz einfachen Querschnittformen sich nicht mittels bekannter Funktionen auswerten lassen, es versagen auch bei diesen Integralen, die eine Art höherer Momente bilden, die meisten Methoden zur graphischen und mechanischen Bestimmung von Momenten höherer Ordnung, weil sie nur bei Momenten mit ganzzahliger Ordnung anwendbar sind. Die Aufgabe lässt sich zwar durch Benützung graphischer Hilfsmittel lösen, es schien mir jedoch von Wert, zu untersuchen, ob nicht innerhalb derselben Grenzen, zwischen denen das Potenzgesetz in guter Übereinstimmung mit den Beobachtungen gefunden worden ist, letztere mit hinreichender Genauigkeit durch eines der anderen früher vorgeschlagenen, dem fraglichen Zweck sich leichter anpassenden Gesetze, insbesondere das parabolische, dargestellt werden könnten. Indem ich mir vorbehalte, auf die Folgerungen für die Biegungslehre später einzugehen, beschränke ich mich heute darauf, sämtliche mir bekannt gewordenen Formeln, durch die man die Abhängigkeit der elastischen Dehnung von der Spannung teils allgemein, teils bei einzelnen bestimmten Stoffen hat ausdrücken wollen, zusammenzustellen und die Ergebnisse meiner, zur Prüfung des Potenzgesetzes unternommenen Rechnungen, die ich zu gelegenerer Zeit fortzusetzen gedenke, mitzuteilen.

## I. Zusammenstellung der bis jetzt vorgeschlagenen empirischen Formeln zur Darstellung der Abhängigkeit der elastischen Dehnung von der Spannung.

(Ergänzungen vorbehalten.)

Des leichteren Vergleiches wegen sind die Bezeichnungen der verschiedenen Verfasser nicht immer beibehalten und ihre Gleichungen zum Teil umgeformt worden. Wo keine Materialien genannt sind, ist das betreffende Gesetz von seinem Urheber als für eine Vielzahl von solchen oder allgemein giltig gedacht, und zwar, wenn die Angabe der Art der Beanspruchung fehlt, für Zug sowohl als für Druck.

$\varepsilon$ = elastische Dehnung oder Zusammendrückung (Stauchung), bezogen auf die Längeneinheit; $\sigma$ = Spannung bezw. Pressung, bezogen auf die Flächeneinheit des Querschnittes; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $a$, $b$, $c$, $d$, $m$ vom Material (und in der Regel auch von der Art der Beanspruchung) abhängige Konstanten.

1. Lineares Gesetz: $\varepsilon = \alpha\sigma$. Hooke 1678.

2. Potenzgesetz: $\varepsilon = \alpha\sigma^m$. Bülffinger 1729 (Zug). Hodgkinson 1822. Bach-Schüle 1897.

3. Parabolisches Gesetz: $\sigma = a\varepsilon - b\varepsilon^2$. Hodgkinson 1849 (Gusseisen). Hartig 1893 (Gusseisen, Cement u. Cementmörtel).

4. Hyperbolische Gesetze:

a) $$\varepsilon = \frac{\sigma}{a - b\sigma}.$$

Cox 1850 (Gusseisen). Lang 1896 (Gusseisen, Steine, Mörtel).

b) $$\varepsilon^2 = a\sigma^2 + b\sigma.$$

Wertheim 1847 (organische Gewebe).

5. Kubisch- und biquadratisch-parabolisches Gesetz:

a) $\sigma = a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c\varepsilon^3$. Cox 1850 (Gusseisen).

$\varepsilon = \alpha\sigma + \beta\sigma^2 + \gamma\sigma^3$.

J. O. Thompson 1891 (Metalle, Zug).

b) $\sigma = a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c\varepsilon^3 + d\varepsilon^4$. Hodgkinson 1849 (Gusseisen).

6. Exponentialgesetze:

a) $\sigma = ce^{-\frac{1}{\varepsilon}}$. Riccati 1731.

b) $\varepsilon = e^{m\sigma} - 1$. Imbert 1880 (Kautschuk).

c) $\sigma = c(e^{m\varepsilon} - 1)$.

Hartig 1893 (Leder, Zug; gebrannter roter Thon, Druck).

d) $\varepsilon = \sigma(a + be^{m\sigma})$. Poncelet 1839 (Messing, Zug).

e) $\sigma = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot e^{m\varepsilon}$. Hartig 1893 (Kork, Druck).

### Litteratur und Bemerkungen zu vorstehender Zusammenstellung.

**1.** † Robert Hooke, De potentia restitutiva, London 1678. Die Arbeiten, deren Titel † vorgesetzt ist, sind mir bis jetzt nicht zugänglich gewesen; ich führe dieselben grösstenteils nach folgendem ungemein reichhaltigen Werke an: Isaac Todhunter-Karl Pearson, A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to the present time, vol. I. 1886, vol. II. 1893.

**2.** De solidorum resistentia specimen G. B. Bulffingeri, Commentarii Academiae Petropolitanae, t. 4, ad annum 1729, p. 164—181. Petropoli 1735. — Eaton Hodgkinson, On the transverse strain, and strength of materials, Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester, Second series, vol. 4, S. 225—289. London 1824 (gelesen 1822). — C. Bach, Allgemeines Gesetz



der elastischen Dehnungen, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. 41, S. 248—252, 1897.

**3.** † E. Hodgkinson, Report of the Commissioners appointed to inquire into the application of iron to railway structures. Appendix A, p. 47—67. London 1849. — E. Hartig, Der Elastizitätsmodul des geraden Stabes als Funktion der spezifischen Beanspruchung, Civilingenieur Bd. 39, S. 113—138, 1893. Derselbe, Das elastische Verhalten der Mörtel und Mörtelbindematerialien, Ebenda S. 425 bis 472. — Im Gegensatz zu Hodgkinson giebt Hartig den Koeffizienten $a$, $b$ bei Druck dieselben Werte, wie bei Zug.

**4.** a) Homersham Cox, The deflection of imperfectly elastic beams and the hyperbolic law of elasticity, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, vol. 9, part. 2, p. 177—190, 1851 (gelesen 1850). — G. Lang, Der Schornsteinbau, Heft 2, S. 127, 1896. Lang berücksichtigt auch die Temperatur; er nennt $E = \sigma : \varepsilon$ das Elastizitätsmaß und setzt:

$$E = E_0 - c \cdot t - d \cdot \sigma,$$

wo $E_0$ das Elastizitätsmaß für den spannungslosen Zustand bei 0° C bezeichnet, $c$ und $d$ Erfahrungszahlen sind. Die Spannungs-Dehnungs-Formel wird dann

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0 - c \cdot t - d \cdot \varepsilon}.$$

Föppl giebt in seiner soeben erschienenen Festigkeitslehre (3. Bd. seiner Vorlesungen über technische Mechanik) auf S. 54 (unter Hinweis auf eine Abhandlung von Lang in der deutschen Bauzeitung, Jahrgang 1897, S. 54) als „Langsche Formel" die Gleichung $E = E_0 - c\sigma$. Er sagt, der Elastizitätsmodul $E$ sei von Lang anscheinend im Sinne von $E = d\sigma / d\varepsilon$ verstanden worden, und leitet dementsprechend durch Integration die Gleichung

$$\varepsilon = \frac{1}{c} \lg \cdot \frac{E_0}{E_0 - c\sigma}$$

ab; daneben stellt er auch im Anschluss an die zweite mögliche Definition des Elastizitätsmoduls, $E = \sigma : \varepsilon$, die Gleichung

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0 - c\sigma}$$

auf (a. a. O. S. 55, Gleichungen 26) und 27). Die erste dieser Gleichungen stimmt inhaltlich mit dem von Hartig bei Leder und rotem Thon gebrauchten Exponentialgesetz (7c der obigen Zusammenstellung) überein. Dass aber Lang nicht dieses Gesetz, sondern das hyperpolische im Auge gehabt hat, geht daraus hervor, dass er in der von Föppl zitierten Abhandlung in einem Beispiel als Bild der Spannungsverteilung eine aus zwei Hyperbelbögen zusammengesetzte Kurve angiebt und zeichnet, und es ist mir dies auch auf meine briefliche Anfrage von Herrn Lang bestätigt worden.

**4.** b) † G. Wertheim, Mémoire sur l'élasticité et la cohésion des principeaux tissus du corps humain. Annales de Chimie, t. 21, p. 355—414. Paris 1847. A. W. Volkmann († Über die Elastizität der organischen Gewebe, Archiv für Anatomie, Physiologie u. s. w, Bd. 1, S. 293—313, Leipzig 1859) hat gefunden, dass bei Seidenfäden, menschlichem Haar, Arterien, Nerven der Koefficient $a$ positiv ist, bei Muskeln dagegen negativ, in welchem Falle also die Spannungs-Dehnungs-Kurve eine Ellipse wäre.

**5.** a) Cox a. a. O. (siehe unter 4a). — Joseph Osgood Thompson, Über das Gesetz der elastischen Dehnung, Wiedemanns Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge Bd. 44, S. 555—576, 1891. b) Hodgkinson, siehe unter 3.

**6.** a) Jacobi Riccati, Verae et germanae virium elasticarum leges ex phaenomenis demonstratae, De Bononiensi Academia Commentarii. t. 1, p. 523—544, Bononiae 1731. — b) † A Imbert, Recherches théoriques et expérimentales sur

l'élasticité du caoutchouc. Lyon 1880 (nach Hartig angeführt). — c) **Hartig** in der unter 3 angeführten Abhandlung „Der Elastizitätsmodul des geraden Stabes...". — d) J. V. **Poncelet**, Introduction à la mécanique industrielle, physique et expérimentale, 2ème édition, p. 348. Metz 1839.

Zu den in obiger Zusammenstellung gebrauchten Benennungen sei folgendes bemerkt. Nach einer aus dem Jahre 1850 stammenden Angabe von **Cox** (siehe unter 4a) trug damals schon die Voraussetzung, dass Proportionalität zwischen Spannung und elastischer Dehnung bestehe, in England den Namen „Dr **Hooke's** law". **Cox** hat (a. a. O.) die Namen „parabolic law" und „hyperbolic law" eingeführt, **Pearson**, der Herausgeber der unter 1 erwähnten History of the theory of elasticity den ähnlich gebildeten „linear law" für das **Hooke**sche Gesetz hinzugefügt. Natürlich sind alle diese „Gesetze" nur Annäherungen an das noch unbekannte (in der Überschrift dieser Mitteilung gemeinte) wahre Elastizitätsgesetz und es wäre deshalb gegen die Ersetzung obiger Namen durch weniger hochtönende gewiss nichts einzuwenden, nur müsste dann gleichzeitig mit den übrigen auch die Bezeichnung „**Hooke**sches Gesetz" fallen, weil letzteres ja den engsten Giltigkeitsbereich hat.

Es ist nicht meine Absicht, hier schon in weitere Erörterungen über die obigen empirischen Formeln einzutreten, dieselben z. B. bezüglich ihrer Brauchbarkeit und der Grenzen ihrer Giltigkeit zu vergleichen, vielmehr betrachte ich diese Mitteilung nur als Vorläuferin einer Reihe weiterer, die nachfolgen sollen. Um Ingenieuren und Mathematikern die Wiederholung längst ausgeführter Untersuchungen zu ersparen, scheint es mir z. B. angezeigt zu sein, die ganz in Vergessenheit geratenen älteren Bestrebungen, Aufgaben der Festigkeitslehre ohne die **Hooke**sche Annahme zu lösen, wieder ans Licht zu ziehen.

## II. Beiträge zur Prüfung des Potenzgesetzes.

Für die sämtlichen Beispiele, die C. **Bach** in der wiederholt angeführten Arbeit (Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure Jahrg. 1897) zur Stützung des Potenzgesetzes heranzieht, habe ich aus den gegebenen Werten von $\sigma$ und den zugehörigen beobachteten Werten von $\varepsilon$ die Konstanten des in der Form
$$\varepsilon = \alpha\sigma + \beta\sigma^2$$
angenommenen parabolischen Gesetzes nach der Methode der kleinsten Quadratsummen bestimmt, für ein Beispiel auch die Konstanten des hyperbolischen und des kubisch-parabolischen Gesetzes. Die hiernach berechneten Werte von $\varepsilon$ sind im folgenden mit den beobachteten und denjenigen, die das Potenzgesetz liefert, zusammengestellt, und zwar habe ich die letzteren (von W. **Schüle** berechneten) Werte einfach der **Bach**schen Arbeit entnommen. In den mit $f$ überschriebenen Spalten stehen die Fehler (Differenzen aus den beobachteten und berechneten Werten) und am Fuss dieser Spalten die als Maß für die Brauchbarkeit der einzelnen Formeln dienenden mittleren Fehler. Die Spannungen sind in kg/qcm ausgedrückt.

Die Notwendigkeit derartiger Vergleiche, die leider sehr zeitraubende Rechnungen erfordern, leuchtet ein. **Cox** hat schon 1850 solche angestellt (nämlich zwischen dem parabolischen und dem von ihm vorgeschlagenen hyperbolischen Gesetz an den Ergebnissen der Zug- und Druckversuche mit Gusseisen von **Hodgkinson**) und **Föppl** hat sie neuerdings (a. a. O.) für die „**Schüle**sche" und „**Lang**sche" Formel

(also das Potenzgesetz und das hyperbolische Gesetz nach der hier gebrauchten Benennung) gefordert.

### 1. Gusseisen, Druck.

Die $\varepsilon$ sind in 1/600 cm ausgedrückt und beziehen sich auf 75 cm Länge:

Potenzformel: $\varepsilon = \frac{75 \cdot 600}{1381700} \sigma^{1,0663}$;

parabolische Formel: $\varepsilon = 0{,}04661 \cdot \sigma + 0{,}000004969 \cdot \sigma^2$;

hyperbolische Formel: $\varepsilon = \frac{0{,}04685 \cdot \sigma}{1 - 0{,}0000918 \cdot \sigma}$;

kubisch-parabol. Formel: $\varepsilon = 0{,}04385 \cdot \sigma + 0{,}0^4 1343 \cdot \sigma^2 - 0{,}0^8 5970 \cdot \sigma^3$.

| $\sigma$ | $\varepsilon$ beob. | $\varepsilon$ berechnet | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Potenzgesetz | $f$ | parab. | $f$ | hyperb. | $f$ | kub.-parab. | $f$ |
| 166 | 7,60 | 7,59 | 0,01 | 7,87 | −0,27 | 7,90 | −0,30 | 7,65 | −0,05 |
| 333 | 15,88 | 15,94 | −0,06 | 16,07 | −0,19 | 16,09 | −0,21 | 15,89 | −0,01 |
| 499 | 24,60 | 24,54 | 0,06 | 24,50 | 0,10 | 24,50 | 0,10 | 24,54 | 0,06 |
| 666 | 33,42 | 33,38 | 0,04 | 33,25 | 0,17 | 33,23 | 0,19 | 33,44 | −0,02 |
| 832 | 42,34 | 42,32 | 0,02 | 42,22 | 0,12 | 42,20 | 0,14 | 42,42 | −0,08 |
| 998 | 51,31 | 51,38 | −0,07 | 51,47 | −0,16 | 51,47 | −0,16 | 51,31 | 0,00 |
| Mittlere Fehler: | | | 0,06 | | 0,22 | | 0,24 | | 0,057 |

Die Genauigkeit der Potenzformel ist hier auffallend gross und ungefähr gleich derjenigen der drei Konstanten enthaltenden kubisch-parabolischen Formel. Weil in diesem Beispiel die parabolische und die hyperbolische Formel annähernd gleich genau sind, habe ich letztere in den folgenden Beispielen nicht mehr berücksichtigt. Erst nach Beendigung meiner Rechnungen lernte ich die Vergleiche von Cox kennen, der die hyperbolische Formel 3 bis 4 mal genauer als die parabolische findet. Es bedarf dieser Punkt noch der Aufklärung.

### 2. Gusseisen, Zug.

Messlänge 15 cm, $\varepsilon$ in 1/1000 cm.

Potenzformel: $\varepsilon = \frac{15 \cdot 1000}{1132700} \sigma^{1,395}$;

parabolische Formel: $\varepsilon = 0{,}01112 \cdot \sigma + 0{,}00001017 \cdot \sigma^2$.

| Spannungsstufe | $\varepsilon$ beob. | $\varepsilon$ berechnet | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Potenzgesetz | $f$ | parab. | $f$ |
| 103,52 — 258,80 | 2,27 | 2,22 | 0,05 | 2,30 | −0,03 |
| 103,52 — 414,08 | 5,07 | 5,07 | 0,00 | 5,09 | −0,02 |
| 103,52 — 569,30 | 8,33 | 8,38 | −0,05 | 8,37 | −0,04 |
| 103,52 — 724,61 | 12,08 | 12,08 | 0,00 | 12,05 | 0,03 |
| | | Mittlere Fehler: | 0,05 | | 0,044 |

Das parabolische und das Potenzgesetz stehen sich hier ziemlich gleich.

### 3. Körper aus reinem Cement, Druck.

Es ist $\varepsilon$ ausgedrückt in 1/600 cm auf die Länge 75 cm.

Formeln:

Körper Ia: $\varepsilon = \frac{75 \cdot 600}{254841} \sigma^{1,0903}$, $\varepsilon = \frac{1,6715}{7,8} \sigma + \frac{0,05214}{7,8^2} \sigma^2$;

„ Ib: $\varepsilon = \frac{75 \cdot 600}{259131} \sigma^{1,0950}$, $\varepsilon = \frac{1,6998}{8,0} \sigma + \frac{0,05136}{8,0^2} \sigma^2$;

„ Va u. Vb: $\varepsilon = \frac{75 \cdot 600}{231416} \sigma^{1,0928}$, $\varepsilon = \frac{1,8671}{7,9} \sigma + \frac{0,06008}{7,9^2} \sigma^2$.

Körper Ia.

| $\sigma$ | $\varepsilon$ beob. | $\varepsilon$ berechnet Potenz-gesetz | $f$ | parab. | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 7,8 | 1,67 | 1,66 | 0,01 | 1,72 | − 0,05 |
| 15,7 | 3,52 | 3,54 | − 0,02 | 3,55 | − 0,03 |
| 23,5 | 5,56 | 5,53 | 0,03 | 5,48 | 0,08 |
| 31,3 | 7,56 | 7,55 | 0,01 | 7,52 | 0,04 |
| 39,2 | 9,59 | 9,63 | − 0,04 | 9,66 | − 0,07 |
| Mittlere Fehler: | | | 0,032 | | 0,074 |

Körper Ib.

| $\sigma$ | $\varepsilon$ beob. | $\varepsilon$ berechnet Potenz-gesetz | $f$ | parab. | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 8,0 | 1,70 | 1,683 | 0,017 | 1,751 | − 0,051 |
| 15,9 | 3,60 | 3,593 | 0,007 | 3,605 | − 0,005 |
| 23,9 | 5,60 | 5,610 | − 0,010 | 5,562 | 0,038 |
| 31,8 | 7,62 | 7,677 | − 0,057 | 7,621 | − 0,001 |
| 39,8 | 9,77 | 9,804 | − 0,034 | 9,783 | − 0,013 |
| | | | 0,040 | | 0,038 |

Körper Va und Vb.

| $\sigma$ | $\varepsilon$ beob. | $\varepsilon$ berechnet Potenz-gesetz | $f$ | parab. | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 7,9 | 1,865 | 1,859 | 0,006 | 1,927 | − 0,062 |
| 15,8 | 3,945 | 3,965 | − 0,020 | 3,976 | − 0,031 |
| 23,7 | 6,175 | 6,178 | − 0,003 | 6,142 | 0,033 |
| 31,6 | 8,485 | 8,460 | 0,025 | 8,430 | 0,055 |
| 39,5 | 10,795 | 10,796 | − 0,001 | 10,838 | − 0,043 |
| Mittlere Fehler: | | | 0,019 | | 0,060 |

Die Potenzformel giebt hier durchschnittlich die bessere Annäherung.

### 4. Körper aus Cementmörtel, Druck.

Federung $\varepsilon$ in 1/600 cm auf 75 cm Länge.

Formeln:

Körper IIa, b, c: $\varepsilon = \frac{75 \cdot 600}{355942} \sigma^{1,10984}$, $\varepsilon = \frac{1,3025}{8,1} \sigma + \frac{0,04779}{8,1^2} \sigma^2$;

„ IIIa, b, c: $\varepsilon = \frac{75 \cdot 600}{315239} \sigma^{1,11732}$, $\varepsilon = \frac{1,5769}{8,0} \sigma + \frac{0,07640}{8,0^2} \sigma^2$;

„ IVa, b, c: $\varepsilon = \frac{75 \cdot 600}{229026} \sigma^{1,16871}$, $\varepsilon = \frac{1,6351}{8,1} \sigma + \frac{0,08239}{8,1^2} \sigma^2$.

Körper IIa, b, c (1 Cement, $1\frac{1}{2}$ Sand).

| $\sigma$ | $\varepsilon$ beob. | $\varepsilon$ berechnet Potenzgesetz | $f$ | $\varepsilon$ berechnet parab. | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 8,1 | 1,297 | 1,293 | 0,004 | 1,350 | − 0,053 |
| 16,2 | 2,796 | 2,791 | 0,005 | 2,796 | ± 0,000 |
| 24,3 | 4,366 | 4,377 | − 0,011 | 4,338 | 0,028 |
| 32,3 | 6,023 | 6,024 | − 0,001 | 5,975 | 0,048 |
| 40,4 | 7,703 | 7,716 | − 0,013 | 7,707 | − 0,004 |
| | | Mittlere Fehler: | 0,011 | | 0,044 |

Körper IIIa, b, c (1 Cement, 3 Sand).

| $\sigma$ | $\varepsilon$ beob. | $\varepsilon$ berechnet Potenzgesetz | $f$ | $\varepsilon$ berechnet parab. | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 8,0 | 1,550 | 1,550 | + 0,000 | 1,646 | − 0,096 |
| 16,0 | 3,457 | 3,435 | 0,022 | 3,459 | − 0,002 |
| 24,1 | 5,483 | 5,470 | 0,013 | 5,418 | 0,065 |
| 32,1 | 7,587 | 7,610 | − 0,023 | 7,530 | 0,057 |
| 40,1 | 9,783 | 9,831 | − 0,048 | 9,795 | − 0,012 |
| | | Mittlere Fehler: | 0,034 | | 0,075 |

Körper IVa, b, c (1 Cement, $4\frac{1}{2}$ Sand).

| $\sigma$ | $\varepsilon$ beob. | $\varepsilon$ berechnet Potenzgesetz | $f$ | $\varepsilon$ berechnet parab. | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 8,1 | 1,625 | 1,624 | 0,001 | 1,717 | − 0,092 |
| 16,1 | 5,605 | 3,573 | 0,032 | 3,600 | 0,005 |
| 24,2 | 5,725 | 5,813 | − 0,088 | 5,647 | 0,078 |
| 32,2 | 7,875 | 7,938 | − 0,063 | 7,859 | 0,016 |
| 40,3 | 10,245 | 10,248 | − 0,003 | 10,235 | 0,010 |
| | | Mittlere Fehler: | 0,065 | | 0,071 |

Auch hier giebt die Potenzformel die bessere Annäherung; auffallend ist die absolute und relative Abnahme ihrer Genauigkeit mit der Menge des Sandzusatzes.

## 5. Körper aus Beton, Druck.

Federung $\varepsilon$ ausgedrückt in 1/600 cm auf 75 cm Länge.

Formeln:

Körper XVIa, b, c: $\varepsilon = \frac{75 \cdot 600}{217260}\sigma^{1,15662}$, $\varepsilon = \frac{2,2237}{7,9}\sigma + \frac{0,1433}{7,9^2}\sigma^2$;

„ XVIIa, b, c: $\varepsilon = \frac{75 \cdot 600}{367018}\sigma^{1,20677}$, $\varepsilon = \frac{1,4415}{7,9}\sigma + \frac{0,1294}{7,9^2}\sigma^2$.

### Körper XVIa, b, c.

| $\sigma$ | $\varepsilon$ beob. | $\varepsilon$ berechnet Potenzgesetz | $f$ | parab. | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 7,9 | 2,287 | 2,263 | 0,024 | 2,367 | − 0,080 |
| 15,9 | 5,017 | 5,045 | − 0,028 | 5,021 | − 0,004 |
| 23,8 | 8,013 | 8,066 | − 0,053 | 7,961 | 0,052 |
| 31,7 | 11,193 | 11,250 | − 0,057 | 11,188 | 0,005 |
| 39,6 | 14,680 | 14,536 | 0,144 | 14,702 | − 0,022 |
| | | Mittlere Fehler: | 0,097 | | 0,057 |

### Körper XVIIa, b, c.

| $\sigma$ | $\varepsilon$ beob. | $\varepsilon$ berechnet Potenzgesetz | $f$ | parab. | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 7,9 | 1,487 | 1,497 | − 0,010 | 1,571 | − 0,084 |
| 15,8 | 3,400 | 3,414 | − 0,014 | 3,400 | + 0,000 |
| 23,7 | 5,523 | 5,570 | − 0,047 | 5,489 | 0,034 |
| 31,6 | 7,867 | 7,881 | − 0,014 | 7,836 | 0,031 |
| 39,5 | 10,410 | 10,317 | 0,093 | 10,441 | − 0,031 |
| | | Mittlere Fehler: | 0,062 | | 0,058 |

Hier ist die Potenzformel im Nachteil.

### 6. Granit, Druck und Zug.

a) Druck:

Körp. I: $\varepsilon$ in 1/600 cm auf 75 cm; $\varepsilon = \frac{75 \cdot 600}{249540} \sigma^{1.132}$, $\varepsilon = \frac{3,3928}{13,8} \sigma + \frac{0,2167}{13,8^2} \sigma^2$;

„ II: $\varepsilon$ in 1/600 cm auf 50 cm; $\varepsilon = \frac{50 \cdot 600}{339750} \sigma^{1.109}$, $\varepsilon = \frac{1,7218}{14,9} \sigma + \frac{0,0911}{14,9^2} \sigma^2$.

### Körper I.

| $\sigma$ | $\varepsilon$ beob. | $\varepsilon$ berechnet Potenzgesetz | $f$ | parab. | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 13,8 | 3,50 | 3,50 | + 0,00 | 3,61 | − 0,11 |
| 27,75 | 7,76 | 7,76 | ± 0,00 | 7,65 | 0,11 |
| 41,3 | 12,09 | 12,17 | − 0,08 | 12,13 | − 0,04 |
| | | Mittlere Fehler: | 0,08 | | 0,16 |

### Körper II.

| $\sigma$ | $\varepsilon$ beob. | $\varepsilon$ berechnet Potenzgesetz | $f$ | parab. | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,9 | 1,77 | 1,77 | + 0,00 | 1,81 | − 0,04 |
| 29,7 | 3,85 | 3,79 | 0,06 | 3,81 | 0,04 |
| 44,6 | 5,97 | 5,96 | 0,01 | 5,99 | − 0,02 |
| | | Mittlere Fehler: | 0,06 | | 0,06 |

b) Zug: Körper III: $\varepsilon$ in 1/1200 cm auf 50 cm;

$$\varepsilon = \frac{50\cdot 1200}{234600}\sigma^{1,374} = \frac{1,4983}{3,50}\sigma + \frac{0,2135}{3,50^2}\sigma^2.$$

| $\sigma$ | $\varepsilon$ beob. | $\varepsilon$ berechnet | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Potenzgesetz | $f$ | parab. | $f$ |
| 3,50 | 1,43 | 1,43 | $\pm$ 0,00 | 1,71 | − 0,28 |
| 7,00 | 3,82 | 3,71 | 0,11 | 3,85 | − 0,03 |
| 14,00 | 9,61 | 9,61 | + 0,00 | 9,41 | 0,20 |
| 21,01 | 16,60 | 16,78 | − 0,18 | 16,68 | − 0,08 |
| | | Mittlere Fehler: | 0,15 | | 0,25 |

## 7. Kupfer, Zug.

Federnde Ausdehnung $\varepsilon$ in 1/1000 cm auf 10 cm.

Formeln: $\varepsilon = \frac{10\cdot 1000}{2084000}\sigma^{1,093}$, $\varepsilon = \frac{1,3537}{160,75}\sigma + \frac{0,0219}{160,75^2}\sigma^2$.

| Spannungsstufe | $\varepsilon$ beob | $\varepsilon$ berechnet | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Potenzgesetz | $f$ | parab. | $f$ |
| 160,75 — 321,5 | 1,40 | 1,40 | + 0,00 | 1,42 | − 0,02 |
| 160,75 — 482,25 | 2,89 | 2,87 | 0,02 | 2,88 | 0,01 |
| 160,75 — 643,0 | 4,39 | 4,39 | + 0,00 | 4,39 | $\pm$ 0,00 |
| 160,75 — 803,75 | 5,95 | 5,94 | 0,01 | 5,94 | 0,01 |
| 160,75 — 964,6 | 7,53 | 7,53 | $\pm$ 0,00 | 7,54 | − 0,01 |
| | | Mittlere Fehler: | 0,013 | | 0,014 |

## 8. Leder, Zug.

Federnde Ausdehnung $\varepsilon$ in Millimetern auf 780,7 mm Länge.

Formeln: $\varepsilon = \frac{780,7}{415}\sigma^{0,7}$, $\varepsilon = \frac{3,092}{3,88}\sigma - \frac{0,0954}{3,88^2}\sigma^2$.

| Spannungsstufe | $\varepsilon$ beob. | $\varepsilon$ berechnet | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Potenzgesetz | $f$ | parab. | $f$ |
| 3,88 — 11,65 | 5,5 | 5,6 | − 0,1 | 5,4 | 0,1 |
| 3,88 — 19,4 | 10,0 | 10,1 | − 0,1 | 10,1 | − 0,1 |
| 3,88 — 27,2 | 14,0 | 14,1 | − 0,1 | 14,0 | $\pm$ 0,0 |
| | | Mittlere Fehler: | 0,17 | | 0,14 |

In den letzten Beispielen halten einander die parabolische und die Potenzformel beinahe die Wage.

Das Ergebnis dieser Untersuchungen ist, dass bei den betrachteten Materialien und innerhalb der angenommenen Spannungsgrenzen das Potenzgesetz die Beziehung zwischen Spannung und elastischer Dehnung im ganzen genauer zum Ausdruck bringt, als das parabolische. Jedoch genügt, wie mir scheint, auch beim letzteren die Genauigkeit für etwaige

Anwendungen in der Festigkeitslehre. Zwei Bemerkungen sind noch zu machen. Erstens kommen die Versuchsergebnisse von Bach durch die obigen Näherungsgleichungen nicht voll zum Ausdruck, weil jedesmal der Vergleich nur bis zu einer Spannung fortgeführt ist, die ungefähr mit der höchsten, in der Technik bei dem betreffenden Material für zulässig gehaltenen übereinstimmt. Es können z. B., worauf Bach selbst bereits hingewiesen hat (in den schon erwähnten gesammelten Abhandlungen und Berichten, S. 294) die bei manchen von Bach gezeichneten Spannungs-Dehnungs-Kurven auftretenden Wendepunkte durch das Potenzgesetz ihre Erklärung nicht finden; allerdings, wie wir hinzufügen müssen, durch das parabolische, hyperbolische und manches andere Gesetz ebenso wenig. Zweitens fehlt noch die Prüfung in der Nähe des Nullpunkts, wozu in den Ergebnissen der mit sehr kleinen Belastungen vorgenommenen Zugversuche J. O. Thompsons ein vorzügliches Material vorhanden ist, das durch neuere Versuche Bachs, deren Veröffentlichung bevorsteht, eine willkommene Ergänzung erhalten wird. Die angedeuteten Lücken auszufüllen, soll in einem späteren Aufsatze versucht werden.

## Konstruktion der Trägheitsaxen eines Dreiecks.

Von Dr. **Otto Richter** in Leipzig.

In der graphischen Statik wird die Hauptträgheitsellipse („Zentralellipse") eines Dreiecks mit Hilfe konjugierter Durchmesser und Tangenten ermittelt, worauf sich die Hauptträgheitsaxen als Hauptaxen der Ellipse ergeben. Im folgenden ist die Aufgabe gelöst, die Hauptträgheitsaxen eines Dreieckes direkt zu konstruieren. Mit Hilfe der Ellipse:

$$\frac{\xi^2}{\frac{1}{3}(q_1^2+q_2^2+q_3^2)}+\frac{\eta^2}{\frac{1}{3}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)}=1,$$

worin $\xi$, $\eta$ die Hauptträgheitsaxen, und $p_1$, $p_2$, $p_3$ die Projektionen der Verbindungslinien des Schwerpunktes mit den Seitenmitten auf die $\xi$-Axe, $q_1$, $q_2$, $q_3$ auf die $\eta$-Axe bedeuten, kann man auf Grund des Satzes von C. Neumann u. Clebsch die Trägheitsaxen für einen beliebigen Punkt finden.*

Bezeichnungen für das folgende: Gegebenes Dreieck $A_1$, $A_2$, $A_3$; Schwerpunkt $S$; $SA_i = s_i (i = 1, 2, 3)$; das in $S$ auf $SA_i$ errichtete Lot $l_i$; $x$, $y$ zwei rechtwinklige Axen durch $S$, und zwar soll $x$ mit $l_1$, $y$ mit $s_1$ zusammenfallen; $x_i$, $y_i$ Koordinaten von $A_i$. Dann ist $x_1 = 0$. Ferner sei $y_1 = u$, $x_2 = v$, $y_2 = w$. Hieraus folgt $(\Sigma x_i = \Sigma y_i = 0)$

$$x_3 = -v, \quad y_3 = -u - w.$$

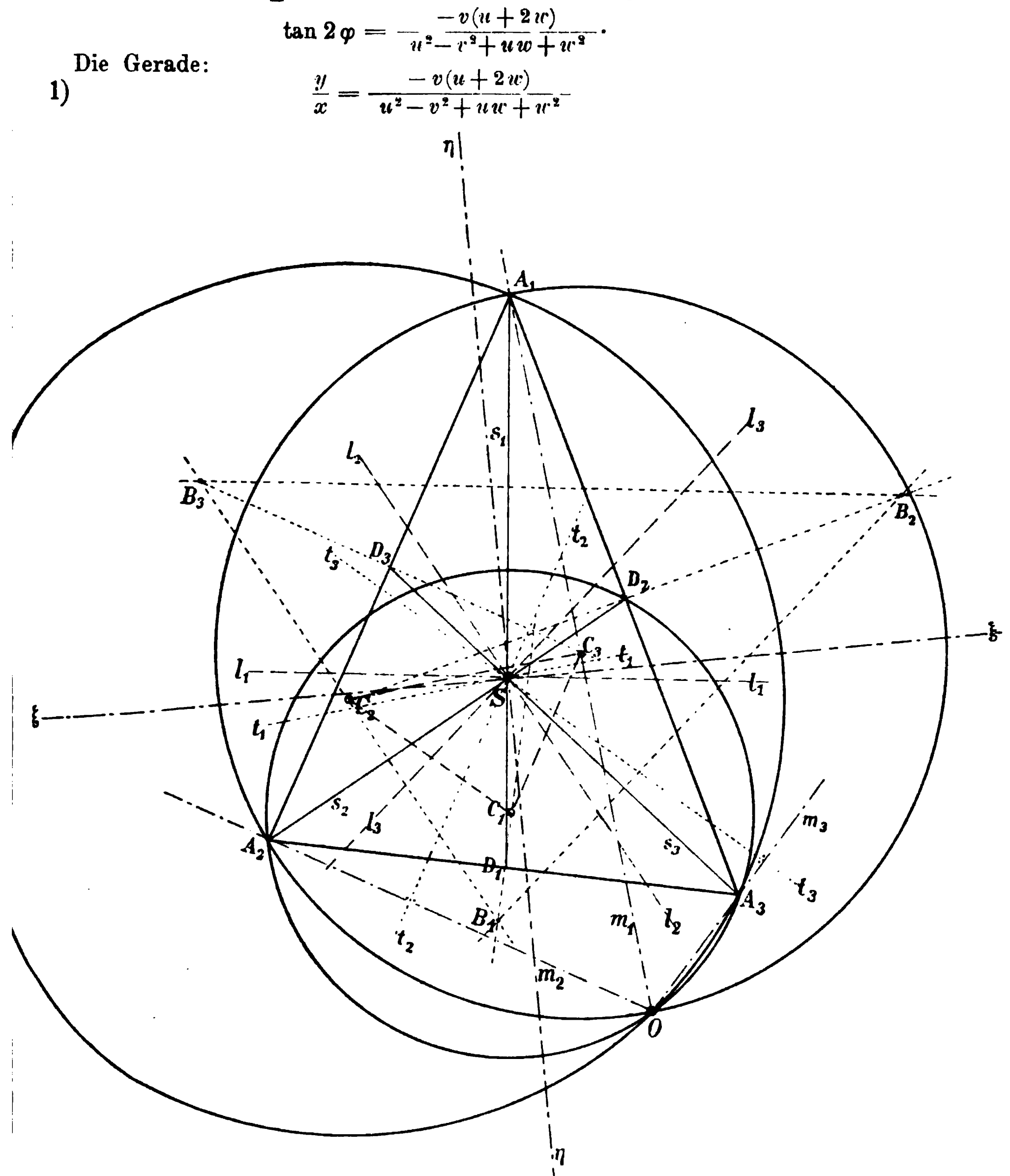
* A. Clebsch, Zur Theorie der Trägheitsmomente etc., Crelles Journal Bd. 57, und R. Mehmke, Über die Bestimmung von Trägheitsmomenten etc., Math. Annal. XXIII.

Die Bedingung dafür, dass $\xi$, $\eta$ die Hauptträgheitsaxen sind, ist $\Sigma\,\xi_i\,\eta_i = 0$,* oder wenn der Winkel der $\xi$-Axe mit der $x$-Axe $\varphi$ genannt wird:

$$\tan 2\varphi = \frac{-v(u+2w)}{u^2-v^2+uw+w^2}.$$

Die Gerade:

$$1)\qquad \frac{y}{x} = \frac{-v(u+2w)}{u^2-v^2+uw+w^2}$$




werde mit $t_1$ bezeichnet. Dann sind $\xi$, $\eta$ die Halbierungslinien der von $l_1$ und $t_1$ gebildeten Winkel. Wie $t_1$ der Ecke $A_1$, so entspricht

* R. Hoppe, Das Dreieck bezogen auf die Hauptträgheitsaxen, Hoppes Archiv Ser. 2 Bd. XII. Hieraus folgt übrigens, dass die Hauptträgheitsaxen eines Dreieckes diejenigen rechtwinkligen Axen durch den Schwerpunkt sind, für die $abs.\,|\Sigma\xi_i^2 - \Sigma\eta_i^2|$ ein Maximum ist.

eine Gerade $t_2$ der Ecke $A_2$, und $t_3 A_3$, sodass $\xi$, $\eta$ auch die Halbierungslinien der von $l_2$ und $t_2$, sowie der von $l_3$ und $t_3$ gebildeten Winkel sind. Stellt man nun (durch Koordinatentransformation) in demselben Axensysteme $x$, $y$ die Gleichungen von $t_2$ und $t_3$ auf, so findet man:

$$2)\qquad \frac{y}{x} = \frac{v(u^2 - v^2 - w^2)}{(v^2 + w^2)(u + w) + u^2 w},$$

$$3)\qquad \frac{y}{x} = \frac{-v(2uw + v^2 + w^2)}{u^3 + 2u^2 w + 2uw^2 + w(v^2 + w^2)}.$$

Fällt man von $A_i$ auf $t_i$ das Lot $m_i$, so findet man, dass sich diese drei Lote $m_i$ in einem Punkte treffen. Dieser Punkt sei $O$. Er hat also mit Beziehung auf $S$ und irgend zwei Ecken, z. B. $A_1$ und $A_2$, folgende Eigenschaft: Verbindet man ihn mit $A_1$, $A_2$ ($m_1$, $m_2$), fällt von $S$ auf diese Linien die Lote ($t_1$, $t_2$), und errichtet auf $s_1$, $s_2$ in $S$ die Lote ($l_1$, $l_2$), so fallen die Halbierungslinien der von $l_1$ und $t_1$ gebildeten Winkel mit denen der Geraden $l_2$, $t_2$ zusammen. Welches ist der geometrische Ort eines Punktes $O$, der bei gegebenen $S$, $A_1$, $A_2$ diese Eigenschaft hat?

Durch ganz elementare Betrachtungen (mit Hilfe des Sehnenviereckes $m_1 t_1 m_2 t_2$) findet man als geometrischen Ort den Kreis, der sich durch Spiegelung des dem Dreieck $SA_1A_2$ umbeschriebenen Kreises an $A_1A_2$ ergiebt. Spiegelt man also die Umkreise von $SA_1A_2$, $SA_2A_3$, $SA_3A_1$ an $A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A_1$, so gehen die drei neuen Kreise durch einen Punkt $O$ (dies gilt selbstverständlich, auch wenn $S$ nicht der Schwerpunkt ist).

Man gelangt also zur folgenden Konstruktion der Hauptträgheitsaxen:

Spiegele die Umkreise der Dreiecke $SA_iA_k$ an den zugehörigen Seiten $A_iA_k$ (es genügen zwei solche Kreise; in der Figur sind alle drei gezeichnet). Der Schnittpunkt dieser Kreise sei $O$. Verbinde $O$ mit einer Ecke $A_i$; fälle von $S$ das Lot $t_i$ auf $OA_i$, errichte auf $SA_i$ in $S$ das Lot $l_i$, halbiere die Winkel ($l_i$, $t_i$); die Halbierungslinien sind die gesuchten Axen.

In der Figur sind $B_i$ die drei Umkreismittelpunkte, $C_i$ die Mittelpunkte der Ortskreise, $D_i$ die Seitenmitten. Da sich nun z. B. die Kreise $C_2$, $C_3$ in $A_1$ und $O$ treffen, so ist $C_2C_3$ das Mittellot von $A_1O$ u. s. w. Hieraus folgt als einfachste Konstruktion diese:

Zeichne von zwei Seiten, z. B. $A_1A_2$ und $A_1A_3$, die Mittellote. Verbinde die Seitenmitten $D_3$, $D_2$ mit $A_3$, $A_2$, Schnittpunkt $S$. Errichte das Mittellot auf $A_1S$, das die beiden ersten Mittellote in $B_3$, $B_2$ treffe. Trage auf $B_3D_3$

$$D_3C_3 = B_3D_3, \quad \text{auf } B_2D_2$$
$$D_2C_2 = B_2D_2$$

ab. Ziehe durch $S$ zu $C_2C_3$, $B_2B_3$ die Parallelen ($t_1$, $l_1$). Die Halbierungslinien der Winkel dieser Linien sind die Hauptträgheitsaxen.

Auf viele sich hier anschliessende rein geometrische Beziehungen kann der Kürze wegen nicht eingegangen werden; die Spezialfälle sind leicht zu erledigen.

# Historisch-litterarische Abteilung

der

# Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaktion

von

**Dr. R. Mehmke** und **Dr. M. Cantor.**

---

42. Jahrgang.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1897.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

# Inhalt.

## I. Abhandlungen.



## II. Rezensionen.

### Geschichte der Mathematik.

## Philosophie, Didaktik.



## Arithmetik, Analysis, Ausdehnungslehre, Algebra.

**Synthetische und analytische Geometrie.**

### Geodäsie. Methode der kleinsten Quadrate. Astronomie.



### Mechanik, Physik.

# Historisch-litterarische Abteilung.

## Wilhelm Schrentzel.

Von

Prof. Dr. L. Schlesinger
in Berlin.

Am 26. Januar 1896 ist Dr. Wilhelm Schrentzel, ordentlicher Lehrer an der städtischen Viktoria-(Mädchen-)Schule zu Berlin, in Davos-Platz einem chronischen Brustübel erlegen. Mit ihm ist in jungen Jahren ein Mathematiker hingeschieden, dessen Inauguraldissertation „Über die Integration der Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchsschen Klasse mit drei im Endlichen gelegenen singulären Punkten", mit der er im Jahre 1893 bei der philosophischen Fakultät der Berliner Universität promovierte, von dem ernsten Streben und der nicht geringen Begabung des Verfassers für mathematische Forschung Zeugnis ablegt, und tief beklagen lässt, dass es nun Anderen überlassen bleiben muss, die schönen und originellen Untersuchungen, die Schrentzel in dieser Arbeit in Angriff genommen hat, weiter zu führen.

Wir wollen kurz die Gesichtspunkte hervorheben, die Schrentzel in seiner Arbeit geleitet haben, und die Resultate angeben, zu denen er gelangt ist.

Um die Bedeutung des Problems, mit welchem sich die Arbeit befasst, deutlich hervortreten zu lassen, schicken wir folgendes voraus.

Wenn man eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchsschen Klasse mit den $\sigma$ im Endlichen gelegenen singulären Punkten

$$r_0, r_1, \dots r_{\sigma-1}$$

von dem Gliede mit der ersten Ableitung der abhängigen Variabeln befreit, so hat dieselbe bekanntlich die Form:

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{A_0 x^{2\sigma-2} + A_1 x^{2\sigma-3} + \cdots + A_{2\sigma-2}}{(x-r_0)^2 (x-r_1)^2 \dots (x-r_{\sigma-1})^2}\,\eta = 0,$$

wo die $A_0, A_1, \dots A_{2\sigma-2}$ Konstanten bedeuten. Denkt man sich die Differenzen:

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_{\sigma-1}, \lambda$$

der Wurzeln der zu den singulären Punkten

$$r_0, r_1, \dots r_{\sigma-1}, \infty$$

gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen gegeben, so bestimmen diese $\sigma + 1$ Gleichungen zwischen den $A_0, A_1, \dots A_{2\sigma-2}$, so dass also abgesehen von den singulären Stellen selbst im allgemeinen noch $\sigma - 2$ Parameter in den Koeffizienten der Differentialgleichung unbestimmt bleiben. Nur wenn $\sigma = 2$ ist, wird die Differentialgleichung durch Angabe der $\lambda_0, \lambda_1, \lambda$ vollkommen bestimmt, und zwar kennt man dann unmittelbar nicht nur die Koeffizienten der Differentialgleichung, sondern auch die Koeffizienten der Substitutionen, die ein Fundamentalsystem erfährt, wenn die unabhängige Variable $x$ Umläufe um die singulären Punkte vollzieht. Es entspricht dieser Fall bekanntlich der Differentialgleichung, der die Gausssche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ Genüge leistet. — Schon der nächste Fall $\sigma = 3$, eben der, mit dem sich Schrentzels Arbeit beschäftigt, bietet dadurch, dass bei ihm durch Angabe der $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda$ weder die Koeffizienten der Differentialgleichung noch die Umlaufsubstitutionen vollkommen bestimmt sind, Veranlassung zu einer Reihe tiefer und schwieriger Probleme, die zum grössten Teile von einer Lösung noch weit entfernt sind.

In einer im Jahre 1875 auf Anregung von Herrn Fuchs in Göttingen verfassten Dissertation, hat Herr Seifert einen interessanten Beitrag zur Behandlung des Falles $\sigma = 3$ geliefert, in welchem er, Analogieen mit der Differentialgleichung der Gaussschen Reihe verfolgend, sein Augenmerk hauptsächlich auf die Bestimmung jener Umlaufssubstitutionen richtet, aber zu keinen abschliessenden Ergebnissen kommt.

Schrentzel geht in seiner Arbeit von einer Form der Differentialgleichung aus, die der von Herrn Seifert benützten ähnlich, aber allgemeiner ist als diese, von der Form nämlich:

$$\text{a)} \begin{cases} \dfrac{d^2\eta}{dx^2} + \dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{1-\lambda_0^2}{x^2} + \dfrac{1-\lambda_1^2}{(x-r_1)^2} + \dfrac{1-\lambda_2^2}{(x-r_2)^2}\right. \\ \left. + \dfrac{(\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2-\lambda^2-2)x + (\mu_1^2-\lambda_2^2-\lambda_0^2+1)r_1 + (\mu_2^2-\lambda_0^2-\lambda_1^2+1)r_2}{x(x-r_1)(x-r_2)}\right\}\eta = 0, \end{cases}$$

wo $r_0 = 0$ angenommen wurde und $\mu_0, \mu_1, \mu_2$ Konstanten bedeuten, die mit den Wurzeldifferenzen $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda$ der determinierenden Fundamentalgleichungen durch die Beziehung

$$\text{1)} \qquad \mu_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda^2 - 1$$

verknüpft sind. Macht man dann in a) die Substitution:

$$\text{2)} \qquad \eta = x^{\alpha_0}(x-r_1)^{\alpha_1}(x-r_2)^{\alpha_2}\, y,$$

wo die Konstanten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ durch die Formeln:

3) $$\alpha_\varkappa = \frac{1+\delta_\varkappa \lambda_\varkappa}{2}, \quad \delta_\varkappa^2 = 1, \quad (\varkappa = 0, 1, 2)$$

in zweideutiger Weise bestimmt werden, so genügt $y$ einer Differentialgleichung, die Schrentzel in die Form setzt:

D) $$x^2 D_{12}(y) - r_1 x D_2(y) - r_2 x D_1(y) + r_1 r_2 D(y) = 0,$$

worin

$$D_{12}(y) = x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) x \frac{dy}{dx} + \left[\left(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{4}\right] y,$$

$$D_2(y) = x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2(\alpha_0 + \alpha_2) x \frac{dy}{dx} + \left[\left(\alpha_0 + \alpha_2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\mu_1^2}{4}\right] y,$$

$$D_1(y) = x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2(\alpha_0 + \alpha_1) x \frac{dy}{dx} + \left[\left(\alpha_0 + \alpha_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\mu_2^2}{4}\right] y,$$

$$D(y) = x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2\alpha_0 x \frac{dy}{dx} + \left[\left(\alpha_0 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\lambda_0^2}{4}\right] y$$

zu nehmen ist. Diese vier Differentialausdrücke sind von der Lage der singulären Punkte $r_0, r_1, r_2$ unabhängig.

Statt nun wie gewöhnlich die Lösung der Differentialgleichung D) in Form einer einfachen nach Potenzen von $x$ fortschreitenden Reihe darzustellen, versucht Schrentzel die Differentialgleichung durch eine Reihe von der Form:

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_{m,n}}{r_1^m r_2^n}$$

zu befriedigen, wo $y_{m,n}$ von $r_1, r_2$ unabhängige Funktionen von $x$ bedeuten mögen. Dank der durch die Gleichungen 3) gekennzeichneten Wahl der Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ergiebt sich, dass die $y_{m,n}$ so eingerichtet werden können, dass die obige Entwickelung die Differentialgleichung befriedigt und die Form annimmt:

4) $$y = \sum_m \sum_n C_{m,n} u^m v^n,$$

wo die $C_{m,n}$ Konstanten bedeuten, die sich durch eine Rekursionsformel bestimmen lassen, und

5) $$u = \frac{x}{r_1}, \quad v = \frac{x}{r_2}$$

gesetzt wurde. Die Rekursionsformel für die $C_{m,n}$ versagt niemals, wenn die Entwickelungen der Integrale der Differentialgleichung D) in der Umgebung von $x = 0$ keine Logarithmen enthalten; diese Beschränkung wird im folgenden festgehalten.

Nun konvergiert die Reihe 4) für unbestimmte Werte der $u, v$, wenn

$$|u v| < 1, \quad \left|\frac{u+v}{1+uv}\right| < 1$$

ist; also, wenn für $u, v$ ihre Werte 5) genommen werden, für

$$|x^2| < r_1 r_2, \quad |x^2 + r_1 r_2| > |x(r_1 + r_2)|.$$

1*

Die erste dieser Ungleichungen repräsentiert das Innere eines Kreises, die letztere das Äussere einer Kurve vierter Ordnung in der Ebene der komplexen Variabeln $x$.

Die zweideutige Bestimmung der Grössen $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ durch die Gleichungen 3) bewirkt, dass sich acht verschiedene Entwickelungen 4) ergeben. Je vier derselben, die den verschiedenen Werten

$$\delta_1 = \pm 1, \quad \delta_2 = \pm 1$$

entsprechen, unterscheiden sich nur durch einen konstanten Faktor; dagegen entsprechen bei fixierten $\delta_1$, $\delta_2$, den beiden Wahlen

$$\delta_0 = +1 \quad \text{und} \quad \delta_0 = -1$$

zwei linear unabhängige Entwickelungen, die also ein Fundamentalsystem von D) bestimmen.

Der grösste Teil der Arbeit ist dem Konvergenzbeweise für die Reihe 4) gewidmet, einzelne Details des Beweises sind, wie der Verfasser bemerkt, aus dem der Fakultät vorgelegten Manuskripte bei der Drucklegung weggelassen worden. Der Konvergenzbeweis bedient sich im wesentlichen der Methoden von Gauss (Disquisitiones circa seriem etc.). Zum Schlusse bemerkt der Verfasser, dass die Reihe 4) für unbestimmte $u$, $v$, der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{cases} (uv - u - v + 1)\left(u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2uv\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right) \\ + [2(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)uv - (\alpha_0 + \alpha_1)u - (\alpha_0 + \alpha_2)v + \alpha_0]\left(u\frac{\partial y}{\partial u} + v\frac{\partial y}{\partial v}\right) \\ + \left[\left(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{4}\right]uv - \left[\left(\alpha_0 + \alpha_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\mu_2^2}{4}\right]u \\ - \left[\left(\alpha_0 + \alpha_2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\mu_1^2}{4}\right]v + \left[\left(\alpha_0 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\lambda_0^2}{4}\right]y = 0 \end{cases}$$

Genüge leistet, die durch die Substitution:

$$\eta = u^{\beta_1} v^{\beta_2} (u-1)^{\alpha_1} (v-1)^{\alpha_2} y, \qquad \beta_1 + \beta_2 = \alpha_0,$$

aus einer der Gleichung a) analog gebildeten partiellen Differentialgleichung für $\eta$ hervorgeht. Man erhält diese letztere partielle Differentialgleichung direkt aus a), wenn man a) zunächst so umformt, dass der Koeffizient von $\eta$ nur von den Verbindungen

$$u = \frac{x}{r_1}, \quad v = \frac{x}{r_2}$$

abhängt, und dann berücksichtigt, dass

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = u^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} + 2uv\frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v} + v^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2}$$

ist. Es ergiebt sich, dass für diese partielle Differentialgleichung den Grössen

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda, \quad \mu_0, \mu_1, \mu_2$$

eine ähnliche Bedeutung beigelegt werden kann, wie sie den $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda$ für die Differentialgleichung a) zukommt.

Dem der Dissertation angefügten Curriculum vitae zufolge ist Schrentzel im Jahre 1861 in Stettin geboren, studierte seit 1880 in Berlin und bestand 1886 das Examen pro facultate docendi. Seine Prüfungsarbeit löst in trefflicher Weise die Aufgabe, die Fälle, in welchen die Gausssche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ eine algebraische Funktion von $x$ definiert, mit Hilfe der Methoden aufzuzählen, die Herr Fuchs für die Entscheidung der allgemeineren Frage, wann das allgemeine Integral einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Koeffizienten eine algebraische Funktion ist, gegeben hat. Wahrscheinlich ist Schrentzel durch Beschäftigung mit dieser (von Herrn Fuchs gestellten) Aufgabe auf die Studien hingelenkt worden, deren Ergebnisse seine Dissertation enthält.

In nahen Beziehungen hat Schrentzel zu Kronecker gestanden, dem er während acht Jahren bei der Redaktion und Drucklegung seiner mathematischen Arbeiten behilflich war. Dem Andenken Kroneckers hat Schrentzel auch seine Dissertation gewidmet.

Berlin, 30. Januar 1896.

---

## „Eppur si muove.“

Von

Dr. med. G. Berthold

in Ronsdorf.

In einem beachtenswerten, übrigens in sehr gereiztem Tone geschriebenen Artikel* hat bekanntlich seinerzeit E. Heis in Münster das Unhistorische des obigen Ausspruches, welchen Galilei bei Gelegenheit seiner Abschwörung gethan haben soll, nachzuweisen versucht. Auf Grund seiner Nachforschungen,** bei welchen Heis von dem Jesuiten Dr. K. Braun unterstützt wurde, war er zu dem Resultate gelangt, „dass der Ursprung jener historischen Lüge im verflossenen Jahrhunderte bei unserem Nachbarvolke, den Franzosen, zu suchen sei.“ Indem er ausführt, dass es ihm nicht gelungen sei, den Ausspruch früher ausfindig zu machen, schreibt er: „Zum ersten Male

* Natur und Offenbarung. Münster 1868. Band XIV, Heft 8, S. 371–376.

** Zu den von Heis zitierten historischen Wörterbüchern, welche die Legende noch nicht bringen, von Zedler (1735), Moréri (20 Auflagen von 1673–1759), Barral (1758), ist Chaufepié's Nouveau Dictionnaire historique et critique (1750) hinzuzufügen; die Wörterbücher von Bayle und von Marchand enthalten keinen Artikel Galilei.

treffen wir in dem „Dictionaire historique ou histoire abregée ... par une societé. 7. édition Caen Leroy" im vierten Bande von 1789, bei Gelegenheit der Abschwörung, die folgende Stelle: Au moment qu'il se releva, agité par le remord d'avoir fait un faux serment, les yeux baissés vers la terre, on pretend, qu'il dit en la frappant du pied, E pur si muove." Schliesslich zeigte Heis, dass der Ex-Jesuit Feller in der zweiten Auflage seines Dictionnaire historique (Band IV vom Jahre 1794)* das „on prétend" einfach fortgelassen hatte.

Später wurde von P. H. Grisar nachgewiesen,** dass sich die Legende bereits 1774 bei Fr. N. Steinacher findet, indem es bei letzterem heisst:*** „Die Abbitte des Galilei war weder ernstlich noch standhaft genug; denn in dem Augenblicke, da er wieder aufstand und sein Gewissen ihm sagte, dass er falsch geschworen habe, schlug er die Augen nieder, stampfte mit dem Fusse und sagte: E pur si muove, sie bewegt sich doch." Gestützt auf dieses von P. Grisar beigebrachte Zitat aus Steinacher ist in neuester Zeit die Vermutung ausgesprochen:† „Anscheinend eignet dieser Sage ein deutscher Ursprung." Hierbei ist übersehen, dass Herr F. H. Reusch in scharfsinniger Weise bereits darauf aufmerksam gemacht hatte,†† dass der Schlusssatz bei Steinacher „wie eine Übersetzung des oben französisch angeführten Satzes klingt, vielleicht nach einer älteren Auflage des Dictionnaire."

Es handelt sich hier um das von dem Abbé Chaudon herausgegebene Dictionnaire historique, dessen erste Auflage im Jahre 1766 erschienen ist, und dessen siebenter Auflage von 1789 Heis sein Zitat entnommen hatte. Bereits die erste Auflage bringt denn auch in der That die Legende (ohne „on prétend"): „Galilée à l'âge de 70 ans demanda pardon d'avoir soutenu une vérité, & l'abjura les genoux à terre & les mains sur l'Evangile comme une Absurdité, une Erreur & une Hérésie. Au moment qu'il se releva, agité par le remords d'avoir fait un faux serment, les yeux baissés vers la terre, il dit en la frappant du pied: Cependant elle remue, e pur si move."†††

Ferner wurde inzwischen auf eine Fundstelle hingewiesen, welche weiter als das Jahr 1766 zurückreicht, indem Herr Gretschel er-

---

* Die zweite Auflage erschien Augsbourg et Liège 1789--1794.

** Zeitschrift für katholische Theologie. Zweiter Jahrgang. Innsbruck 1878. S. 124.

*** Lehrbuch der philosophischen Geschichte. Würzburg 1774. S. 336. — Auch hier fehlt das „on prétend".

† S. Günther, Kepler. Galilei. Berlin 1896. S. 144, S. 217 flg., Anmerkung 197.

†† Der Prozess Galilei's und die Jesuiten. Bonn 1879. S. 334, Anmerkung 2.

††† [Dom Chaudon] Nouveau Dictionnaire historique-portatif, ou Histoire abrégée de tous les hommes qui se sont fait un nom ... Par une Société de Gens de Lettres. A Amsterdam, Chez Marc-Michel Rey, Libraire. 1766. t. II. p 207. — Ein Exemplar dieser seltenen Ausgabe befindet sich in meinem Besitz.

wähnt,* dass die Legende „sich anscheinend zuerst im dritten Bande der „Querelles littéraires“ von Irailh (Paris 1761) findet.“

An der betreffenden Stelle,** in einem Essay, betitelt: Le Système du Monde, schreibt der Canonicus Irailh:

[p. 48] „Il [sc. Galilée] ne dut sa délivrance qu'à la foiblesse qu'il eut d'abjurer ses opinions & de blasphêmer contre la vérité. Il jura sur les saints évangiles de ne plus croire au mouvement de la terre: les inquisiteurs reçurent eux-mêmes ses sermens.(×)

(×) Aux pieds bénits de la docte assemblée,
Voyez-vous pas le pauvre Galilée
Qui, tout contrit, leur demande pardon,
Bien condamné pour avoir eu raison.

[p. 49] Au moment, assure-t-on, qu'il fut mis en liberté, le remords le prit. Il baissa les yeux vers la terre, & dit, en la frappant du pied: **Cependant elle remue.** (×)

(×) **E pur si move.**“

Aus dem Wortlaut ergiebt sich ohne weiteres, dass Chaudon auf Irailh fusst;*** aber ein Punkt ist wohl zu beachten. Während der Kanonikus Irailh einfach berichtet, Galilei habe, wie man versichere, den Ausspruch gethan: „au moment, qu'il fut mis en liberté“, bringt der Abbé Chaudon die Legende in pointiertester Form, Galilei habe nach der Abschwörung, welche er knieend geleistet, beim Aufstehen die Worte gesprochen. Wir sehen, wie sich hier vor unseren Augen die Legende bildet, indem der Abbé Chaudon den angeblichen Ausspruch Galilei's mit dem legendenhaften Zusatze ausschmückt, der vor allem in neuerer Zeit den Zweifel geweckt hat, da sämtliche Berichte über den Prozess Galilei's nichts von der Sache melden; und zum anderen, hätte Galilei den Ausspruch gethan unter den Umständen, wie es die Legende berichtet, „so hätte er leicht das werden können, was er nicht geworden ist, ein Martyrer seiner wissenschaftlichen Überzeugungen“, wie Herr Reusch sehr richtig bemerkt.

Soweit es sich um diese Legende handelt, bleibt demnach die Behauptung von Heis in voller Kraft, dass die Legende französischen Ursprunges, und der Abbé Chaudon der Urheber derselben ist, wie denn auch in erster Linie der Abbé Chaudon, und später der Ex-

* Lexikon der Astronomie. Leipzig 1882. S. 165. — Woher die Notiz entnommen, ist nicht angegeben. Eine Auskunft war nicht zu erlangen.

** [Irailh, Augustin-Simon] Querelles littéraires, ou Mémoires Pour servir à l'Histoire des Révolutions de la République des Lettres, depuis Homere jusqu'à nos jours. A Paris, Chez Durand, Libraire, rue du Foin. 1761. 12°. t. III. p. 48 s.

*** In einem dem vierten Bande von Chaudons Dictionnaire historique angefügten Verzeichnisse der benutzten Werke werden ausdrücklich die Querelles littéraires des Abbé Irailh aufgeführt. Vergl. t. IV, Catalogue etc. p. 11.

Jesuit Feller durch ihre historischen Wörterbücher der Legende die allgemeinste Verbreitung verschafft haben.*

Ist nun der so berühmt gewordene Ausspruch gleichfalls in das Reich der Legende zu verweisen, oder lässt er sich auf Galilei zurückführen? Da ergiebt sich denn, dass es trotz sorgfältigster Nachforschungen nicht gelungen ist, den Ausspruch weiter als bis zum Jahre 1761 zurück zu verfolgen. Es liegt kein Grund vor anzunehmen, dass der Kanonikus Irailh, welcher den Ausspruch zuerst durch den Druck veröffentlicht hat, die Sache erfunden habe; es liegt vielmehr die Vermutung nahe, dass er durch mündliche Tradition davon Kenntnis erlangt hat. Da bekannt ist, mit welch' ängstlicher Scheu sowohl Galilei selbst als auch dessen nächsten Freunde und ergebensten Schüler es vermieden, selbst in vertrauten Briefen, die heikle Frage der Bewegung der Erde zu berühren, so könnte es nicht auffallend erscheinen, dass von dieser Seite eine so kompromittierende Äusserung, falls sie wirklich gefallen wäre, nicht in die Öffentlichkeit gelangte, sondern dass sie nur in den vertrautesten Kreisen mündlich zirkulierte. Jedoch das späte Auftauchen des angeblichen Ausspruches, und gerade der Umstand, dass durch den Satz für die innerste Überzeugung Galilei's, die zu verschweigen die Vorsicht gebot, eine so prägnante Formel gegeben wird, lassen an dem legendenhaften Ursprunge kaum einen Zweifel aufkommen. Wir sind demnach nicht berechtigt, den Satz als einen Ausspruch Galilei's zu zitieren. Nichts steht aber im Wege, das „Eppur si muove“ als einen der innersten Überzeugung Galilei's adäquaten Satz auch ferner zu verwenden, wenn es gilt, im Namen der Wissenschaft Protest zu erheben gegen jegliche klerikale Anmassung, komme diese nun von katholischer oder von protestantischer Seite.

* Die neunte und letzte Ausgabe von Chaudons Dictionnaire historique erschien Paris 1810. — Fellers Dictionnaire historique wurde viermal aufgelegt. 1781, 1789, 1797 und 1818. Gegenüber der Diatribe von E. Heis verdient hervorgehoben zu werden, dass nicht etwa von Seiten der Freidenker, sondern durch katholische Priester der Ausspruch zuerst verbreitet, und die legendenhafte Ausschmückung erfunden ist.

# Rezensionen.

**Taschenbuch für Mathematik, Geodäsie und Astronomie** von Dr. R. Wolf, Professor. Sechste, durch dessen Nachfolger, Professor A. Wolfer, Direktor der eidgenössischen Sternwarte in Zürich, vollendete Auflage. Zürich 1895. Druck und Verlag von Friedrich Schulthess. XXIV, 388 S.

Wir haben im 22. Bande dieser Zeitschrift, Historisch-litterarische Abteilung S. 185—186 die fünfte Auflage von 1877 unseren Lesern anzeigen, beziehungsweise empfehlen dürfen. Die nach Verlauf von achtzehn Jahren nötig gewordene neue Auflage hat Herr Wolfer besorgt, der ja auch in anderen Veröffentlichungen das Erbe seines verstorbenen Amtsvorgängers angetreten hat. R. Wolf hatte übrigens schon umfassende Vorbereitungen zu dem Neudrucke getroffen, so dass es nur galt, in seinem Sinne fortzuarbeiten und zusammen zu drängen, denn dahin lässt Wolfs Programm für die neue Auflage sich aussprechen. Die leisen Bemerkungen unseres Berichtes im 22. Bande sind nicht berücksichtigt worden. Cantor.

**Das Dualitätsgesetz** von Theodor Schmid. Sonderabdruck aus dem Jahresberichte der kaiserl. königl. Staats-Oberrealschule in Steyr für das Schuljahr 1894—1895. 25 S.

Wenn Gergonne bei Gelegenheit seines bekannten Streites mit Poncelet über die Erfindung des Dualitätsgesetzes ein besonderes Gewicht darauf legte, er habe gezeigt, dass jenes Gesetz schon bei den ersten Schritten des Studiums der Geometrie hervorgehoben werden könne, so hat er damit den Lehrwert dualistischer Auffassung deutlicher als sein Gegner, dem es auf Erfindung von Sätzen in erster Linie ankam, erkannt. Herr Schmid hat nun in einer eigenen Programmabhandlung duale Sätze aus Gebieten der Elementargeometrie zusammengestellt, welche zu verschiedenen Zeiten aufgetreten sind, und hat gezeigt, wie sie im Unterrichte verwertet werden können. Da überall die Quellen angegeben sind, so hat die Abhandlung auch Wert in geschichtlicher Beziehung. Am verhältnismässig ausführlichsten sind die dualen Sätze der sphärischen Trigonometrie behandelt. Cantor.

**Die Grundgebilde der ebenen Geometrie.** Von V. Eberhard. Erster Band. Mit fünf Figurentafeln. Leipzig 1895. B. G. Teubner. XLVIII und 302 S. 14 Mark.

Dieses Werk, dessen erster Teil uns vorliegt, giebt die Grundlage einer rein aus der Anschauung entwickelten Geometrie und in dieser Hinsicht beschäftigt sich auch der erste Teil der ausführlichen Vorrede (III—XXIX): „Über die Grundlagen und Ziele der Raumlehre", der auch als Separatabdruck erschienen ist und von jedem Lehrer der Mathematik gelesen zu werden verdient, mit der Frage, inwieweit die Anschauung im stande ist, die Natur der Raumgebilde zu erkennen.

Es wird zunächst dargelegt, wie die Grundgebilde: Fläche, Linie, Punkt aus der Erfahrung sich ergeben, wie sie durch Abstraktionsvorgänge entstehen, die sich auf die Kritik der Sinne gründen, und in dieser Bedeutung ist auch der erste Satz der Vorrede zu verstehen, in dem es heisst: „Unsere Erkenntnis unterscheidet vier Anschauungsformen: Den Raum, die Fläche, die Linie, den Punkt", ein Satz, der sonst wohl Widerspruch finden dürfte, da ja Flächen, Linien und Punkte uns nicht durch die Anschauung gegeben sind, vielmehr erst aus ihr abstrahiert werden müssen. Eingehend wird behandelt, wie die Abstraktionen der Ebene und der Geraden aus den Erscheinungen der Natur in uns entstehen und welche Bedeutung ihnen zukommt. Sehr beachtenswert sind die Ausführungen über die Beschreibung der Gestaltsverhältnisse einer ganz beliebigen (endlichen) Fläche. Während die Anschauung im stande ist, die unmittelbar oder mittelbar hervortretenden Diskontinuitäten eines Gebildes zu erkennen, zeigen die durchweg stetigen Elementarteile eines solchen keinen näher angebbaren Charakter. — Nachdem kurz der Anteil festgestellt worden ist, welchen einerseits die Anschauung, anderseits die Rechnung an der Entwickelung der Raumlehre in unserem Jahrhunderte genommen hat und die Wechselwirkung beider festgestellt ist, wird die Frage, ob die Anschauung allgemeine Kriterien besitzt, um einen einförmigen Flächen- oder Kurventeil als einen gesetzmässigen zu erkennen, dahin beantwortet: Eine Fläche oder eine Linie ist allemal dann und nur dann als ein einziges gesetzmässiges Punktkontinuum aufzufassen, wenn zwischen irgend einem festen Systeme einer endlichen, wenn auch noch so grossen Zahl diskreter Elemente der Mannigfaltigkeit und einem frei in letzterer beweglichen Punkte eine konstante anschauungsgemässe Abhängigkeit statthat. Freilich sind dadurch nur algebraische Gebilde bestimmt und der Referent muss gestehen, durch die dahin gehenden Erörterungen (S. XXIX) nicht überzeugt zu sein, dass bei Aufrechterhaltung des vorher genannten Satzes unsere Raumanschauung durch die Vorstellungen der transzendenten Flächen und Kurven bereichert werden kann.

Da an Stelle der Flächen und Linien (vorläufig wenigstens der algebraischen) das System der bestimmenden Punkte gesetzt werden kann, so stellt sich die urprüngliche Frage in der Fassung dar: Unter welchen Bedingungen erkennt die Anschauung ein beliebiges im Raume gegebenes Punktsystem als ein unabhängiges oder als ein abhängiges an? Eine un-

mittelbare Antwort lässt sich für das einfachste räumliche Punktsystem, vier Punkte in tetraedraler Lage, geben. Es besteht das durchgängig unterscheidende Charakteristikum für die allgemeine und die besondere Lage von Grundelementen darin, dass die erstere bei ganz beliebigen, die letztere aber nur bei ganz bestimmten stetigen Bewegungen jedes einzelnen Elementes erhalten bleibt. — Von dem Tetraedralsysteme werden dann noch einige Eigenschaften und zugleich der Begriff von abgeleiteten Punktsystemen entwickelt.

Der zweite Teil der Vorrede enthält eine genetische Schilderung des Gedankenganges und eine übersichtliche Zusammenstellung der hauptsächlichsten Resultate des Bandes, so dass es natürlich ist, wenn sich der Referent in seiner Darstellung des Inhaltes mit dieser mannigfach begegnet.

Nach den vorigen Ausführungen lassen sich „alle gesetzmässigen Raumgebilde auf sie bestimmende elementar abhängige Punktsysteme zurückführen, und es muss sich daher die Natur jener aus der Eigenart dieser entwickeln lassen. Die Frage nach dem Zusammenhange und den Singularitäten einer, nach dem Durchschnittssysteme respektive der Berührung zweier und mehrerer gegebenen Flächen oder Kurven wird an letzter Stelle durch den differenzierten Charakter der das einzelne oder das zusammengesetzte Gebilde ersetzenden Punktgruppe entschieden. Es wird daher die Theorie der räumlichen Punkt- und Ebenensysteme und ihrer planaren Netze für die Lehre der doppelt gekrümmten Flächen und Kurven, die Theorie der ebenen Punkt- und Geradensysteme und ihrer linealen Netze für die Lehre von den ebenen Kurven die natürliche Grundlage bilden.“ Und der Herr Verfasser sagt an anderer Stelle mit Recht: Falls eine Theorie der algebraischen Flächen rein auf dem Boden der Anschauung möglich ist, wird sie ihren Ausgang von den räumlichen Punktsystemen nehmen.

Das uns vorliegende Werk beschäftigt sich mit der Natur der ebenen Punktsysteme.

Um den Charakter eines ebenen Punktsystemes festzustellen, werden zunächst die Eigenschaften eines Punktetripels zusammengestellt und zwar sowohl die inneren oder absoluten, die, welche lediglich auf der gegenseitigen Lage der Punkte des Tripels beruhen, wie auch die äusseren oder relativen, nämlich die, welche die räumliche Stellung des Tripels zu dem Beobachter kennzeichnen. Die ersteren erstrecken sich auf die Teilung der Ebene in Punkt- beziehentlich Strahlenkontinua und deren Beziehungen zu einander, die zweiten auf die positive und negative Richtung in einer Geraden und den positiven und negativen (links- und rechtsseitigen) Drehungssinn eines Strahles in einem Büschel. Umschreitet man das Dreieck $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$ in der Reihenfolge seiner Ecken und liegt dabei die Dreiecksfläche links, so bezeichnet man dieses durch die symbolische Gleichung

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3) = +1,$$

im entgegengesetzten Falle durch

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3) = -1,$$

während man für den Fall, dass die drei Punkte in gerader Linie liegen:

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3) = 0$$

setzt und nennt diese Zahl $+1$, $-1$ oder $0$ die Charakteristik des Punktetripels. Haben zwei Punktetripel gleiche Charakteristiken, so werden sie isothetische Systeme genannt. Für dieselben gilt der Satz: Zwei isothetische allgemeine Punktetripel können unter Erhaltung ihres beiderseitigen Charakters stets stetig ineinander übergeführt werden. Der Herr Verfasser fasst nun „in Bezug auf irgend ein vorgelegtes ebenes Punktsystem

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_4 \ldots$$

die Gesamtheit der Charakteristiken

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l) = +1,\quad -1,\quad 0$$

aller seiner Punktetripel

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$$

als das Fundament oder die erste Stufe in dem Charakter des Punktsystemes auf." Es ergeben sich da die fundamentalen Aufgaben:

1. alle diejenigen Systeme von Punktetripeln zu ermitteln, welche die für die Gesamtheit der Tripel notwendigen und hinreichenden Bestimmungen enthalten,
2. aus einem solchen Fundamentalsysteme von Punktetripeln die Charakteristiken der übrigen abzuleiten.

Vorher wird jedoch in § 2 erörtert, wie vielen einfachen Singularitäten die in einem gegebenen Punktsysteme vorhandenen Singularitäten gleichwertig sind, wenn eine einfache Singularität oder einfache Bedingung diejenige ist, bei welcher drei Punkte $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$, $\mathfrak{p}_l$ in gerader Linie liegen, also $\mathfrak{c}(\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l) = 0$ ist.

Da bei einer grösseren Zahl von Punkten die Charakterisierung eines ebenen Punktsystemes durch die Charakteristiken seiner $\binom{n}{3}$ Tripel wegen der grossen Zahl der Bedingungen sehr wenig übersichtlich wird und dadurch dem Studium grosse Schwierigkeiten in den Weg gelegt werden, so wird das Indexsystem oder Ortszeichensystem eingeführt. Denken wir uns einen Punkt $\mathfrak{p}_i$ des Systemes als Mittelpunkt eines Strahlenbüschels, gehen von einem Strahle aus, auf dem etwa der Punkt $\mathfrak{p}_1^{(i)}$ liegt und lassen von hier aus einen Strahl das Strahlenbüschel links (oder rechts) herum durchlaufen, so werden die einzelnen Punkte des Systemes in einer gewissen Reihenfolge getroffen, die nur für diejenigen Punkte unbestimmt ist, welche auf einem und demselben Strahle liegen. Diese Punktefolge wird der Index des $\mathfrak{p}_i$ genannt und bei linksseitigem oder positivem Drehungssinn gesetzt:

$${}'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1^{(i)}\mathfrak{p}_2^{(i)} \ldots (\mathfrak{p}_a^{(i)} \ldots \mathfrak{p}_b^{(i)}) \ldots \mathfrak{p}_{n-1}^{(i)},$$

bei rechtsseitigem oder negativem Drehungssinne:

$$J'(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1^{(i)}\mathfrak{p}_{n-1}^{(i)} \ldots (\mathfrak{p}_b^{(i)} \ldots \mathfrak{p}_a^{(i)}) \ldots \mathfrak{p}_2^{(i)},$$

wo jede eingeklammerte Reihe eine Punktreihe bezeichnet, die auf einer durch $\mathfrak{p}_i$ gehenden Geraden liegen. Ist der Drehungssinn ein unbestimmter, so wird der Index $J(\mathfrak{p}_i)$ geschrieben. Einem gegebenen Punktsysteme entspricht ein unzweideutig bestimmtes Indexsystem:

$$'J(\mathfrak{p}_1),\ 'J(\mathfrak{p}_2)\ldots 'J(\mathfrak{p}_n)$$

und dieses wird als die erste Charakteristik des gegebenen Punktsystemes bezeichnet. Es stehen nun in einem ebenen Punktsysteme

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ldots \mathfrak{p}_n$$

das Charakteristikensystem der $\binom{n}{3}$ Punktetripel

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3;\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_4;\ldots \mathfrak{p}_{n-2},\ \mathfrak{p}_{n-1},\ \mathfrak{p}_n$$

und das System der $n$ Indices

$$'J(\mathfrak{p}_1),\ 'J(\mathfrak{p}_2)\ldots 'J(\mathfrak{p}_n)$$

in eindeutig umkehrbarer Abhängigkeit. Mittelst des Begriffes der Indices wird dann die Aufgabe gelöst: „Die durch ein beliebig gegebenes Punktsystem bedingte Einteilung des ebenen Strahlenfeldes in ein System einander ausschliessender Strahlenbereiche vollständig zu beschreiben.“ Der Begriff des primären Strahlenbereiches ist dadurch definiert, dass „zwei ausserhalb der $n$-Punkte des Systems beliebig in der Ebene gewählte Gerade den nämlichen oder verschiedenen Strahlenbereichen angehören, je nachdem sie entweder ohne oder nur mittelst eines Durchganges durch einen Punkt $\mathfrak{p}_i$ stetig ineinander überführbar sind.“ Die Punktgruppe, die einen solchen Strahlenbereich abgrenzt, heisst primäre Punktgruppe. Dabei findet sich zum Schluss des § 4, dass in allen ebenen Punktsystemen mit der gleichen Singularität $A$ (Zahl der entsprechenden einfachen Singularitäten) der Ausdruck:

$$x_3 - x_5 - 2x_6 - 3x_7 - \cdots,$$

wo $x_m$ die Zahl der primären $m$-Ecke bezeichnet, einen von der Anzahl und der gegenseitigen Lage der Punkte des Systemes völlig unabhängigen invarianten Wert $4 + 2A$ hat.

Die Methode zur Bestimmung aller Primärvielecke einer gegebenen Punktgruppe $\mathfrak{P}_n$ ergiebt die wichtige Eigenschaft, dass sämtliche Primärpolygone von $\mathfrak{P}_n$ bereits aus $n-1$ beliebigen Indices abgeleitet werden können. Es wird dieses an einem bestimmten Beispiele erläutert, das zugleich Anlass zu einer anderen allgemeinen Untersuchung giebt, deren Ergebnis ist, dass in einem allgemeinen Punktsysteme $\mathfrak{P}_n$ höchstens $n$-Primärflächen in ihren Indices übereinstimmen können. Zugleich werden weitere Abhängigkeiten zwischen den Indices der Elemente eines Punktsystemes abgeleitet und im § 6 die Grundgesetze des Indexsystemes entwickelt, ausgehend von der durch die Anschauung gegebenen Beziehung

$$\mathfrak{p}_i\,|\,\mathfrak{p}_l,\mathfrak{p}_k\,| + \mathfrak{p}_k\,|\,\mathfrak{p}_i,\mathfrak{p}_l\,| = \mathfrak{p}_l\,|\,\mathfrak{p}_i,\mathfrak{p}_k\,| + 2\Delta(\mathfrak{p}_i,\mathfrak{p}_k,\mathfrak{p}_l),$$

wo $\mathfrak{p}_x\,|\,\mathfrak{p}_z,\mathfrak{p}_y\,|$ die Fläche ist, welche von einem von $\mathfrak{p}_x$ ausgehenden Strahle bei positiver Drehung von $\mathfrak{p}_y$ nach $\mathfrak{p}_z$ beschrieben wird. Als allgemeines wichtiges Beispiel dient die Ableitung des $n^{\text{ten}}$ aus gegebenen $n-1$ Indices eines Punktsystemes $\mathfrak{P}_n$.

Unter allen primären Punktgruppen sind die Fundamentaltripel für das Punktsystem von grundlegender Bedeutung und sie werden daher im § 7 besonders eingehend behandelt. Ihre Zahl beträgt im Punktsysteme $\mathfrak{P}_n$

mindestens $n$. Besonders wichtig ist der Satz, dass ein ebenes Punktsystem $\mathfrak{P}_n$ bei einer stetigen Bewegung seiner Elemente so lange einen invarianten Charakter bewahrt, wie das System seiner primären Punktetripel bestehen bleibt. „Die ausgezeichnete Stellung der primären Punktetripel legt es nahe, in ihnen die notwendigen und hinreichenden Bestimmungsstücke für die Charakterisierung aller Punktetripel zu vermuten und unter Angabe ihrer Charakteristiken und Hauptpunkte die vollständige Beschreibung des Punktsystemes zu versuchen.“ Diese Untersuchungen werden zunächst an den verschiedenen Punktsystemen $\mathfrak{P}_4$, $\mathfrak{P}_5$ und $\mathfrak{P}_6$ ausgeführt, und dann wird in den §§ 11—13 allgemein bewiesen, dass ein Indexsystem durch die Gruppe seiner vollständig definierten Fundamentaltripel unzweideutig bestimmt ist, wobei sich eine grosse Zahl von Sätzen über Indexsysteme ergiebt, in betreff deren wir jedoch bei der Eigenartigkeit und Neuheit der Untersuchungen auf das Buch selbst verweisen müssen.

Im § 14 wird als Beispiel aus der Gesamtheit der Fundamentaltripel eines Systems $\mathfrak{P}_8$ das Indexsystem desselben bestimmt.

Im Anhange behandelt der Herr Verfasser zunächst das endliche ebene Geradensystem:

$$G_n \equiv g_1, g_2 \ldots g_n,$$

das sich dem endlichen Punktsysteme

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_n$$

koordiniert gegenüberstellt. Es tritt dabei freilich die Schwierigkeit ein, dass sich die Fortschreitungsrichtung in einem Strahle bei einer Drehung um $180^0$ umkehrt, und es fehlt darnach zunächst ein Mittel, die Fortschreitungsrichtungen auf der einzelnen Geraden unterscheiden zu können. Da diese Schwierigkeit auch nicht dadurch gehoben wird, die linksseitige Rotation ein für allemal als Übergangsweise zu wählen, so führt der Herr Verfasser einen Punkt $\mathfrak{p}_0$, der ausserhalb der $n$ Geraden des Systems gelegen ist, als Grenzpol ein. Ein in positivem Sinne um $\mathfrak{p}_0$ sich drehender Strahl bestimmt auf einer Geraden $g$ eine Folge von Punkten und diese Fortschreitungsrichtung heisst die positive. Dadurch ist der Index einer Geraden $g$ als Aufeinanderfolge der Geraden bestimmt, welchen ein die Gerade $g$ in positiver Richtung durchlaufender Punkt begegnet und auch die Definition der Charakteristik eines Geradentripels ist damit genau gegeben. Es lassen sich darnach die Gesetze eines endlichen Punktsystemes ohne weiteres auf ein endliches Geradensystem übertragen. — Der letzte Paragraph ist einer Besprechung der gemischten Grundgebilde, der aus Punkten und Geraden zusammengesetzten gewidmet.

Hoffen wir, dass wir recht bald eine Fortsetzung des trefflichen und klar geschriebenen Werkes begrüssen können, das uns in ganz neue Untersuchungen einführt, die unsere Anschauungen wesentlich bereichern, und möge uns der Herr Verfasser später auch mit einer Anwendung auf die Theorie der ebenen Kurven erfreuen, die dadurch von einem ganz neuen Gesichtspunkte aus würden dargestellt werden.

H. Willgrod.

**La Géometrie reglée et ses Applications.** Von G. Koenig. Paris 1895. Gauthier-Villars et Fils. $4^0$. 148 p.

Dieses Buch ist eine teilweise Reproduktion einer Vorlesung, welche der Herr Verfasser 1887/88 im Collège de France gehalten hat und beabsichtigt, den Leser in die analytische Geometrie der geraden Linie und ihrer Systeme einzuführen. Es werden zwar auch, wo sich die Gelegenheit bietet, Sätze auf synthetischem Wege abgeleitet, doch werden dieselben dann allemal noch analytisch bewiesen. Infolge seiner klaren und leicht verständlichen Darstellung, dem durchsichtigen Aufbau der Lehre von den linearen Komplexen ist das Buch recht geeignet, in die analytische Geometrie der geraden Linien einzuführen und eine Vorstufe für das Studium der neueren Arbeiten auf diesem Gebiete, besonders der Herren Klein und Lie, zu bilden.

Um ein Bild von der Methode des Buches zu geben, muss sich der Referent erlauben, auch auf die einleitenden allgemein bekannten Kapitel etwas genauer einzugehen.

I. Die Koordinaten der geraden Linie. Allgemeines. S. 3—15. Nach einer kurzen Einleitung über die Bedeutung der Geraden in der Geometrie werden die Koordinaten der Geraden abgeleitet, indem dieselbe sowohl als Ort von Punkten wie auch als Durchschnitt zweier Ebenen betrachtet wird. Beide Formen erweisen sich als identisch. Da die quadratische Fundamentalform:

$$\omega(x) \equiv 2(x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6)$$

und die Polarform:

$$\omega(x, x') = \frac{1}{2}\sum \frac{d\omega(x)}{dx_i} x'_i$$

bei einer linearen Transformation erhalten bleiben, so kann man jetzt vom Punktraume ganz absehen und als Grunderklärung, aus welcher sich alles Weitere ergiebt, den Satz aufstellen: Jedem Systeme von sechs Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_6$, die durch eine quadratische Relation $\omega(x) = 0$ verbunden sind, deren Diskriminante nicht Null ist, kann man eine bestimmte Gerade des Raumes entsprechen lassen, wobei die Gleichung $w(x, x') = 0$ ausdrückt, dass sich die Geraden $x, x'$ schneiden. Daraus ergiebt sich dann sogleich, dass $x_i = \lambda a_i + \mu b_i$ die Gleichung eines Büschels ist, wenn $\omega(a, b) = 0$ und dass, wenn $a$, $b$ und $c$ sich schneiden, $x_i = \lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i$ die Gleichung eines Strahlenbündels oder eines Strahlenfeldes ist. Für beide wählt der Herr Verfasser, da sie analytisch durch dieselbe Gleichung dargestellt werden, den glücklichen Namen „hyperfaisceau“, dem wir nach dem Wissen des Referenten einen deutschen nicht gegenüberzustellen haben. Allgemein hängt eine Gerade von vier Parametern ab und je nach der Zahl der Bedingungsgleichungen erhalten wir einen Komplex, eine Kongruenz, eine Regelschar und eine endliche Zahl von Geraden. Als Grad eines Komplexes wird die Zahl der Geraden bezeichnet, welche ein beliebiges Strahlenbüschel mit demselben gemein hat.

II. Die linearen Komplexe von Geraden. S. 16—24. Die linearen Komplexe (Strahlengewinde)* sind diejenigen, die mit einem beliebigen Büschel nur eine Gerade gemein haben, bei denen infolgedessen die Bedingungsgleichung linear ist. Die Geraden, die von einem Punkte eines solchen Komplexes ausgehen, bilden einen Büschel und die Ebene dieses Büschels nennt man die Polare des Punktes (Nullpunkt, Nullebene). Die Polaren der Punkte einer Geraden schneiden sich in einer Geraden, wobei das Doppelverhältnis der Punkte gleich dem der entsprechenden Ebenen ist, und die beiden Geraden heissen konjugiert (Polare). Die synthetisch gefundenen Sätze werden auch analytisch abgeleitet und dabei der aus der Kleinschen Invariante sich ergebende Begriff des speziellen linearen Komplexes (Strahlengebüsch) entwickelt, bei welchem alle Gerade eine bestimmte, die Leitgerade, schneiden.

III. Die Systeme von linearen Komplexen. S. 25—56. Nach einleitenden allgemeinen Bemerkungen über Beziehungen zwischen den Punkten einer Geraden und den durch dieselbe hindurchgelegten Ebenen, das Chaslessche Korrespondenzprinzip, die anharmonischen und involutorischen Beziehungen, werden zwei lineare Komplexe $(A, B)$ betrachtet. Die beiden konjugierten Geraden, welche dieselben gemeinsam haben, gehören zugleich allen Komplexen des Systemes $\lambda A + \mu B$ an. Dieselben gehen in den beiden Spezialkomplexen des Systemes in die Leitgeraden über. Die Geraden, welche diese beiden konjugierten Geraden schneiden, bilden die gemeinsame lineare Kongruenz des Systemes, deren Invariante aufgestellt wird. Ist dieselbe gleich Null, so ist die Kongruenz singulär. Ausser diesen gemeinsamen Eigenschaften des ganzen Systemes werden noch diejenigen abgeleitet, welche den einzelnen Komplexen zukommen. Die Pole einer durch eine Gerade der gemeinsamen Kongruenz des Systemes $A + kB = 0$ gehenden Ebene in den Komplexen, welche den Werten $k = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ entsprechen, bilden ein Doppelverhältnis, gleich dem Doppelverhältnisse der Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Nimmt man nun als zwei der Komplexe die beiden Spezialkomplexe des Systemes, so ist der Wert des Doppelverhältnisses für zwei gegebene Systeme konstant, und es ergiebt sich aus ihm der Winkel der beiden Komplexe, wobei allerdings der Begriff Axe nicht definiert wird. Ist der Winkel ein rechter, so sind die beiden Komplexe in Involution. — Nach Untersuchung der Systeme $\lambda A + \mu B = 0$ werden die drei-, vier- und fünfgliedrigen Gruppen von Komplexen behandelt und ihre Eigenschaften hergeleitet.

IV. Grundlehren der Geometrie des Unendlich-Kleinen in Geradenkoordinaten. S. 57—91. Es wird von der linearen singulären Kongruenz der Tangenten einer windschiefen Fläche längs einer Erzeugenden ausgegangen. Zwei benachbarte dieser Kongruenzen haben die eine Regel-

* Die Bezeichnungen in Klammern sind die bei uns gebräuchlichen nach R. Sturm: „Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung.“



schar des oskulierenden Hyperboloids der Fläche gemeinsam. Die andere Schar desselben gehört den Komplexen an, welche eine Berührung zweiter Ordnung mit der Fläche haben, und zwar bilden dieselben ein dreigliedriges System. Auch die Systeme von linearen Komplexen, welche eine drei- und vierfache Berührung mit der Fläche haben, werden untersucht, sowie das oskulierende Ebenenbüschel. Eine oskulierende Ebene und der Berührungspunkt bilden ein Liesches Berührungselement. Nach einer kurzen Besprechung von Ebenenbüscheln, die von mehreren Parametern abhängen, werden die einen linearen Komplex berührenden linearen Komplexe behandelt. Ist die dabei auftretende Kleinsche Invariante gleich Null, so ist die betreffende Gerade eine singuläre Gerade und die Ebenenbüschel, die zu allen singulären Geraden gehören, umhüllen die Singularitätenfläche, von welcher jede Regelfläche des Komplexes in einer gewissen Anzahl von Punkten berührt wird. Es werden dann die schon länger bekannten differentiellen Eigenschaften der linearen Kongruenzen abgeleitet, auf die wir der mannigfachen Einzelheiten wegen hier nicht eingehen.

V. Kleinsche Koordinaten. Anallagmatische Geometrie. S. 92—146. Die Gleichungen $\omega(x) = 0$, $x_i = 0$ ($i$ eine der Zahlen 1 bis 6) stellen bei Plückerschen Koordinaten singuläre Komplexe dar, deren Leitgerade die Kanten eines Tetraeders sind. Aus diesen Plückerschen Koordinaten ergeben sich die Kleinschen durch Umformung. Setzt man:

$$\begin{aligned} 4\omega(r) &= 4r_{41}r_{23} + r_{42}r_{31} + r_{43}r_{12} \\ &= (r_{41} + r_{12})^2 + (r_{42} + r_{31})^2 + (r_{43} + r_{12})^2 \\ &+ [\sqrt{-1}\,(r_{41} - r_{23})]^2 + [\sqrt{-1}\,(r_{42} - r_{31})]^2 + [\sqrt{-1}\,(r_{43} - r_{12})]^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_6^2, \end{aligned}$$

so erhält man aus diesen Grössen $x_i$ durch allgemeine orthogonale Substitution die Kleinschen Koordinaten $y_i$. Von diesem eigentümlichen sechsfach orthogonalen oder involutorischen Koordinatensysteme, welches fünfzehn Parameter enthält, werden die Haupteigenschaften abgeleitet, die zehn Fundamentalflächen zweiten Grades, sowie die fünfzehn Fundamentaltetraeder, die sich dabei ergeben, genauer untersucht. Der bei der Transformation dieser Koordinaten zuletzt abgeleitete Satz: „Wenn die Gleichungen der linearen Transformation:

$$x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{i6}x_6 \quad (i = 1, 2 \ldots 6)$$

$\omega(x) = \omega(x')$ ergeben, so stellen sie zwischen den Geraden $x$ und $x'$ eine homographische oder eine dualistische Beziehung her", ist für Herrn Klein der Ausgangspunkt gewesen für eine sonderbare Beziehung zwischen der Geometrie der Geraden im Raume und derjenigen der metrischen Eigenschaften in einem Raume von vier Dimensionen. Es giebt derselbe auch dem Herrn Verfasser Gelegenheit auf Räume von $n$ Dimensionen einzugehen und dabei besonders die anallagmatischen Transformationen zu berücksichtigen.

H. WILLGROD.

**Sur la génération des courbes par roulement.** Von René de Saussure. Genève 1895. Aubert · Schuchardt. gr. 8⁰. 94 p. 2 Tafeln Figuren.

Eine jede ebene Kurve kann man sich durch die Bewegung eines Punktes in der Weise erzeugt denken, dass eine mit ihm fest verbundene Gerade auf einer Kurve rollt oder umgekehrt eine fest mit ihm verbundene Kurve auf einer Geraden. Beide Erzeugungsarten sind auf einfach unendlich verschiedene Weisen möglich. Die erste Art wird eine bestimmte, wenn die Gerade gezwungen ist, zur entstehenden Kurve stets senkrecht zu sein, es muss dann der Punkt auf der Geraden liegen und die erzeugte Kurve ist eine Evolvente der festen Kurve, letztere die Evolute der ersteren. Bei der zweiten Art ist die Erzeugung nur in begrenzter Zahl möglich, wenn die Gerade eine Basis der erzeugten Kurve sein, das heisst sie in sämtlichen Schnittpunkten senkrecht treffen soll. Die erzeugte Kurve heisst Rollkurve, und während man gewöhnlich die Gleichung der Rollkurve sucht, ist hier ausserdem das inverse Problem gelöst, aus der Gleichung der Rollkurve die der Erzeugenden zu bestimmen. Diese Aufgabe wird für die Kegelschnitte eingehend behandelt, nachdem dem Rollen zweier Kurven aufeinander und insbesondere den cykloidischen Linien die nötige Aufmerksamkeit gewidmet ist. Es stellt sich dabei heraus, dass beim Rollen eines Kreises vom Radius $r$ auf einem solchen vom Radius $R$ auch für imaginäre Werte von $r$ eine reelle Kurve entstehen kann, nämlich wenn $r = \frac{R}{2} + \varrho i$, wo $\varrho$ einen beliebigen Wert hat. Die in diesem Falle entstehenden Kurven nennt der Herr Verfasser Paracykloiden.

Im zweiten Teile geht der Herr Verfasser auf den Raum über, wobei definiert wird, dass eine Raumkurve auf einer Ebene rollt, wenn ihre Tangentenfläche auf der Ebene rollt, sodass an Stelle der Kurve die abwickelbare Fläche treten kann, deren Rückkehrkante die Kurve ist. Zur Vorbereitung des allgemeinen Falles lässt Herr Saussure eine ebene Kurve auf einer festen ebenen Kurve so rollen, dass ihre beiden Ebenen einen Winkel einschliessen, der sich nach einem bestimmten Gesetze ändert. Es werden dann nacheinander behandelt das Rollen eines Cylinders auf einer Ebene, das eines Kegels auf einer Ebene und umgekehrt und einer allgemeinen abwickelbaren Fläche auf einer Ebene und umgekehrt. Beim Rollen zweier abwickelbaren Flächen aufeinander kommen je zwei geradlinige Erzeugende nur dann zur Deckung, wenn die Rückkehrkanten beider in entsprechenden Punkten gleiche erste Krümmung haben, sonst findet die Berührung nur in einem Punkte statt. In Bezug auf den letzteren Fall wird auf das Rollen eines Kegels auf einem Cylinder eingegangen.

H. Willgrod.

---

**Leçons sur la résolution algèbrique des équations.** Par H. Vogt. Avec une préface de Jules Tannery. Paris 1895 .201 p.

Herr H. Vogt, welcher bereits in seinen früheren selbständigen Arbeiten mehr den analytischen, als den geometrischen Untersuchungen zuneigte,

ist mit seinem hier vorliegenden Buche offenbar auf das richtige Feld seiner Beanlagung gelangt. Der Herr Verfasser bietet zwar in seinen „Vorlesungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen“ nichts Neues; aber die wirklich in die Tiefen des behandelten Gegenstandes eindringende Darstellung, die reife Disposition im grossen wie im einzelnen, sowie vor allem eine fast überall klare und präzise Ausdrucksweise machen die Lektüre des Buches zu einer wahrhaft genussreichen. Dass auch einmal Ausnahmen vorkommen, zeige etwa der vorletzte, mit den Worten „Toute équation dont les coefficients ...“ beginnende Absatz S. 62. Der Sinn des ersten Satzes in diesem Absatze ist überhaupt unverständlich: Die Koeffizienten einer Gleichung bilden denselben Rationalitätsbereich, wie die symmetrischen Funktionen der Wurzeln; dieserhalb ist die im gedachten Satze gegebene Definition der „équations particulières“ nicht verständlich. Die weiterhin an die Gleichungen mit rationalen Koeffizienten geknüpften Betrachtungen sind gleichfalls nicht recht glücklich gewählt. Weit lieber möchte man hier den gegenteiligen Satz finden, dass wenigstens für jeden Primzahlgrad unendlich viele „affektlose“ Gleichungen mit rationalen Koeffizienten existieren; auch im weiteren Verlaufe des Buches habe ich diesen Satz nicht gefunden. Doch dürften derartige Stellen, in denen eine Präzisierung des Gedankenganges wünschenswert erscheint, im vorliegenden Buche sehr selten sein; und sie kommen gegenüber den schon genannten Vorzügen des letzteren kaum in Betracht.

Der vom Verfasser behandelte Stoff deckt sich fast vollständig mit dem Inhalte des bekannten und geschätzten Werkes von Herrn Netto über Substitutionentheorie; letzteres Werk ist sogar mehrfach direkt vorbildlich gewesen. Daneben macht sich eine etwas grössere Einwirkung Kroneckers geltend, als sie bei Netto vorliegt, so z. B. in der Theorie der Reduzibilität der Gleichungen. Dieser Umstand ist natürlich durch die verschiedene Entstehungszeit beider Werke begründet.

Betreffs der Anordnung des Stoffes möchte Unterzeichneter auf einen Punkt hinweisen. Einer der Hauptsätze der Galoisschen Theorie, nämlich derjenige über Auflösung der Gleichung durch Lösung einer Kette von Resolventen (den Faktoren der Zusammensetzung der zugehörigen Gruppe entsprechend), ist vom Verfasser erst auf der vorletzten Seite des Buches aufgestellt. Die allgemeine Theorie der algebraisch auflösbaren Gleichungen auf Grundlage Abelscher Sätze wird weit früher behandelt. Die letzteren Entwickelungen müssen natürlich in dieser Form durchaus bestehen bleiben und sind überdies vom Verfasser vorzüglich dargestellt. Dagegen ist wohl kein Zweifel, dass ein Leser, der sich bereits im Besitze des vorgenannten Satzes der Galoisschen Theorie befindet, weit leichter den Überblick über die vielfältigen algebraischen Deduktionen des Abelschen Beweises gewinnt. Diese Bemerkung ist um so schwererwiegend, als der fragliche Satz der Galoisschen Theorie ein fast unmittelbares Ergebnis aus den vorentwickelten Begriffen von Gruppe und Rationalitätsbereich einer Gleichung ist.

Folgende kurze Inhaltsangabe möge die Besprechung abschliessen. Die fünf ersten Kapitel sind den substitutionentheoretischen Grundlagen gewidmet.

Der Begriff der Permutationsgruppen wird vorangestellt, die Untergruppen und ihre Artunterscheidungen werden eingeführt, die Zerlegung einer Gruppe in eine Kette jeweils ausgezeichneter Untergruppen wird besprochen, und endlich die Einfachheit der alternierenden Gruppe für $n > 4$ bewiesen. Weiter werden die zu den einzelnen Gruppen gehörenden rationalen und ganzen Funktionen betrachtet. Für diese ist dann das Theorem von Lagrange über Darstellung aller Funktionen einer Gruppe durch eine unter ihnen fundamental; speziell kommt der Fall einer Galoisschen Funktion zur Behandlung. Das fünfte Kapitel ist den cyklischen und metacyklischen Gruppen und Funktionen gewidmet. Nun wird weiter von den Begriffen des Rationalitätsbereiches und der Reduzibilität gehandelt.

Im folgenden Teil des Werkes, welcher aus den Kapiteln VII bis XIII besteht, ist die Anwendung der vorhergehenden Entwickelungen auf die Theorie der Gleichungen gegeben. Zuvörderst wird der Begriff der Resolventen und der Gruppe einer Gleichung behandelt. Im Anschlusse an die Besprechung der Gleichungen zweiten bis vierten Grades finden die Untersuchungen von Lagrange ihren Platz. Es folgt sodann das Kapitel über die algebraisch lösbaren Gleichungen, welches wir bereits oben erwähnten; und ihm schliessen sich drei Kapitel mit speziellen Untersuchungen, nämlich über Abelsche Gleichungen, über Kreisteilungsgleichungen und über Galoissche Gleichungen an. Das letzte Kapitel ist wieder allgemeineren Auffassungen der Galoisschen Theorie gewidmet.

Robert Fricke.

---

**Theorie der doppeltperiodischen Funktionen einer veränderlichen Grösse.** Von Dr. Martin Krause, Professor an der technischen Hochschule in Dresden. Leipzig, B. G. Teubner 1895. Erster Band, VIII und 328 S.

Die Besprechung des vorliegenden neuesten Buches über doppeltperiodische Funktionen ist deshalb ein wenig erschwert, weil nur erst die erste Hälfte des zweibändig geplanten Werkes erschienen ist, das doch als Ganzes beurteilt sein will. Freilich giebt der Verfasser im Vorworte zum vorliegenden ersten Bande die im zweiten zu behandelnden Gegenstände kurz an; derselbe soll nämlich die Anfänge der Transformationstheorie auf neuer Grundlage, sowie trigonometrische Reihen und Differentialgleichungen für die Funktionen zweiter und dritter Art behandeln. Vielleicht darf man hoffen, dass die Grundlagen der Transformationstheorie, welche Herr Krause solcherweise verspricht, neue und interessante Gesichtspunkte in diese Theorie hineintragen. Das vorliegende Werk könnte dann vielleicht, als Ganzes betrachtet, originell erscheinen und würde sich der sehr entwickelten Litteratur über elliptische Funktionen als neues wertvolles Glied anreihen. Diese Hoffnung darf jedoch nicht hindern, den allein erst zugänglichen ersten Band für sich zu acceptieren und die Behandlung der in ihm zur Sprache kommenden Gegenstände gegen den sonstigen hierfür in Betracht kommenden Entwickelungsstand der Theorie zu orientieren.

Auf den ersten Abschnitt (Einleitung in die Funktionentheorie nach Weierstrass) braucht nicht eingegangen zu werden, da es sich hier nur um bekannte und längst festliegende Dinge handelt.

Im zweiten Abschnitte wird die Theorie der doppeltperiodischen Funktionen auf Grundlage der gewöhnlichen $\vartheta$-Funktionen behandelt. Herr Krause wählt hier den Eingang zu seinen eigentlichen Betrachtungen in eleganter Weise von der Theorie der „linear-periodischen Funktionen" aus. Dabei muss allerdings der S. 39 aufgestellte Lehrsatz, die Theorie dieser Funktionen lasse sich auf die Theorie der multiplikativ und die der additiv periodischen Funktionen zurückführen, beanstandet werden. Die linear-periodischen oder automorphen Funktionen umfassen einen viel weiteren Bereich und besitzen eine ungleich reichhaltigere Theorie. Der fragliche Satz bezieht sich vielmehr einzig auf diejenigen elementaren Funktionen, welche nur gegenüber einer einzigen Substitution und ihren Potenzen invariant sind. Im Verfolge des Überganges zu den $\vartheta$-Funktionen macht sich wiederholt der Mangel geometrischer Vorstellungen fühlbar. Insbesondere wäre es wünschenswert gewesen, dass der Übergang von den multiplikativ periodischen Funktionen zu den doppeltperiodischen in seiner geometrischen Bedeutung als Abbildung eines von zwei Kreisen begrenzten Ringes auf ein Parallelogramm erfasst wäre. Ich will bei den nächsten Angaben das gänzliche Fehlen geometrischer Anschauungen nicht immer wieder erwähnen (ist doch vor allem die Vorstellung des Periodenparallelogrammes nirgends explicit entwickelt); dagegen ist ausdrücklich zu betonen, dass es sich hierbei nicht etwa ausschliesslich um eine Frage des Geschmackes handelt. Den geometrischen Vorstellungen wohnt zum mindesten eine weitgehende didaktische Bedeutung inne; und es hätten zumal bei Heranziehung Riemannscher Anschauungsweisen gewisse späterhin noch zu nennende Grundsätze der Transformationstheorie weit klarer und weit weniger unbestimmt ausgesprochen werden können.

Die Entwickelung des Buches nimmt nun zunächst den Fortgang, dass die multiplikativ periodischen „Primfunktionen" in unendliche Produkte entwickelt werden, für welche dann nach Jacobi die Umsetzung in unendliche Reihen dargeboten wird. Letztere werden späterhin unmittelbar zum Ausgange für die Aufstellung der $\vartheta$-Reihen. Demnächst werden die Eigenschaften der doppelt-periodischen Funktionen aus denen der multiplikativ-periodischen abgeleitet; die Unmöglichkeit dreifach periodischer eindeutiger Funktionen (dies ist die passendere Wendung an Stelle der vom Verfasser Seite 53 flg. gewählten Ausdrucksweise) wird nach Jacobi bewiesen; die vier gewöhnlichen $\vartheta$-Funktionen werden durch ihre Produktentwickelungen und ihre Periodeneigenschaften definiert, und mit Hilfe dieser Funktionen werden die doppelt periodischen Funktionen zweiter und dritter Art eingeführt und näher untersucht.

Von besonderer Wichtigkeit sind die nun folgenden Entwickelungen über $\vartheta$-Funktionen $n^{\text{ter}}$ Ordnung und über den zugehörigen Satz Hermites von den $n$ linear-unabhängigen $\vartheta$-Funktionen $n^{\text{ter}}$ Ordnung der einzelnen Charakteristik. Von diesem Satze macht Herr Krause in der Transformationstheorie den aus-

gedehntesten Gebrauch und benennt denselben dieserhalb schon hier als das „Hermitesche Transformationsprinzip“. Es handelt sich hierbei um einen Satz, der als Spezialfall in dem allgemeinen Riemann-Rochschen Satze enthalten ist. Der vom Verfasser gewählte Beweis stützt sich auf die Reihenentwickelungen der $\vartheta$-Funktionen; es ist dies der ursprüngliche Hermitesche Gedankengang.

Es folgen nun ausgedehnte Entwickelungen über die $\vartheta$-Funktionen erster Ordnung, über die zwischen ihnen bestehenden quadratischen Relationen und ihre Additionstheoreme auf Grundlage des Hermiteschen Satzes. Auf der gleichen Grundlage erwachsen auch die Darstellungen der $\vartheta$-Funktionen $n^{\text{ter}}$ Ordnung in denen der ersten Ordnung. Der Rest des zweiten Abschnittes ist im wesentlichen der Einführung der Moduln $k$, $k'$, der Weierstrassschen Funktionen $Al\,(u)$ und der Jacobischen Funktionen $\sin am\, u$, $\cos am\, u$, $\Delta am\, u$ gewidmet, für welche eine Reihe von Fundamentaleigenschaften entwickelt wird.

Der dritte Abschnitt „Die Transformation der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen“ gliedert sich in folgender Weise:

1. Einführung des Transformationsproblemes und Transformation ersten und zweiten Grades (S. 102 bis 122). Das Problem der rationalen Transformation wird in allgemeiner, wenn auch nicht allgemeinster Form entwickelt. Die nächsten Anwendungen beziehen sich auf die lineare und die Landensche Transformation. Überall liegt der Hermitesche Satz der funktionentheoretischen Schlussweise zu Grunde.

2. Anwendungen zur Ausgestaltung der analytischen Theorie der elliptischen Funktionen (S. 122 bis 156). Es werden hier die Ableitungen der doppeltperiodischen Funktionen nach dem Argumente $u$ rational in $\sin am\, u$ etc. dargestellt. Die Potenzreihen für $\sin am\, u$ etc. werden nun explicite behandelt, und nebenher wird auch der Weierstrassschen $\wp$-Funktion gedacht. Es folgen weiter Differentialrelationen für die $\vartheta$-Funktionen, die Funktionen $Al(u)$, den Modul $k$ etc., sowie Formeln für die Berechnung des Moduls und des Periodenverhältnisses.

3. Multiplikation der elliptischen Funktionen (S. 156 bis 173). Für die Lösung des Multiplikationsproblemes, die Funktionen $\sin am\, nu$, $\cos am\, nu, \ldots$ rational in den ursprünglichen darzustellen, werden insgesamt fünf Methoden angegeben. Die erste Methode gründet sich auf den Hermiteschen Satz, während bei der zweiten eine interessante Differentialgleichung von Jacobi zur rekurrenten Berechnung der Koeffizienten in den gewünschten Formeln herangezogen wird. Weiterhin kommen die Teilwerte von $\sin am\, u$ etc. zur Verwendung; auch die bekannte Kiepertsche Determinante findet Erwähnung.

4. Transformation höheren Grades mit Ausführungen für $n = 3$ und $n = 5$ (S. 174 bis 191). Vergleiche die Ausführungen unter Nr. 6.

5. Modulfunktionen, Modular- und Multiplikatorgleichungen (S. 191 bis 246). Um die Theorie der Hermiteschen $\varphi$-Funktion, sowie diejenige der Modular- und Multiplikatorgleichungen durchführen zu können, sendet der Herr Verfasser eine drei Seiten füllende Besprechung des Begriffes der Modulfunktionen voraus. Hierbei hätte doch gesagt werden sollen, dass die-

jenigen Untergruppen $G$, zu welchen im Sinne des Verfassers Funktionen $\psi(\tau)$ gehören, einen verschwindend kleinen Bruchteil aller Untergruppen $G$ bilden. Dem Satze, dass geradezu nur eine endliche Zahl solcher Funktionen $\psi(\tau)$ und Gruppen $G$ in der Transformationstheorie existiert, galten nachhaltige Bemühungen Giersters, der diesen Satz für Primzahltransformation wirklich nachwies. Die allerdings nicht recht deutlich ausgesprochene Meinung des Verfassers, es existiere eine unendliche Fülle solcher Funktionen $\psi(\tau)$ (cf. S. 194, zweiter sowie letzter Absatz) dürfte demnach dem Thatbestande nicht entsprechen und ist jedenfalls nicht bewiesen. Die späterhin zur Geltung kommenden Funktionen, an welche der Verfasser zu denken scheint, sind nur in Ausnahmefällen von der Art der Funktionen $\psi(\tau)$.

6. Allgemeine Ansätze zur Transformationstheorie (S. 247 bis 262). Hier interessieren vor allem die Darlegungen S. 254: Der Herr Verfasser entwickelt dort, was er für den eigentlichen Inhalt der Transformationstheorie ansieht. Zuvörderst liegt das Problem vor, die transformierten doppeltperiodischen Funktionen oder auch $\vartheta$-Funktionen in den ursprünglichen darzustellen. Die Koeffizienten in den gewünschten rationalen Ausdrücken sind zwar von $u$ unabhängig, stellen aber Funktionen des Periodenquotienten $\tau$ vor, nämlich allgemein zu reden Nullwerte transformierter $\vartheta$-Funktionen. Bei der Aufstellung der zuerst erwähnten allgemeinen Transformationsgleichungen (vermöge einer Methode der Reihenentwickelungen) stellen sich nun unendlich viele Relationen zwischen den fraglichen $\vartheta$-Nullwerten ein, und in der Aufstellung dieser Relationen in möglichst grosser Zahl sieht Herr Krause die zweite Hauptaufgabe der Transformationstheorie. In diesem Sinne ist die Transformationstheorie bereits bei denjenigen Entwickelungen gehandhabt, welche vorhin unter Nr. 4 rubriziert wurden. Die Meinung des Herrn Verfassers ist jedoch, dass die an letzter Stelle benutzten Regeln nicht ausreichen, um für allgemeine Transformationsgrade $n$ die formulierten Aufgaben zu lösen, dass indes eine etwas weitere Fassung des Problemes die Lösung anbahnen möchte. Die Erweiterung soll darin bestehen, dass Transformationsgleichungen beliebiger Gestalt und zwar nicht nur für einen, sondern für mehrere neben einander vorkommende Repräsentanten aufgestellt werden sollen. Ihnen gehen dann auch wieder entsprechende Relationen zwischen den $\vartheta$-Nullwerten parallel. Dieser Ansatz findet für $n = 3$ und $n = 5$ nähere Ausführung.

Weitere Beiträge zur Lösung des Transformationsproblemes im angedeuteten Sinne soll der vierte Abschnitt „Die Theorie der doppeltperiodischen Funktionen auf Grund der $\vartheta$-Funktionen mit gebrochener Charakteristik" liefern. Bis auf Exponentialfaktoren handelt es sich hierbei um die Funktionen $\vartheta_\alpha\left(u + \frac{g\tau + h}{n}\right)$, und damit treten im weiteren nun auch die Teilwerte der $\vartheta$-Funktionen explicit in die Untersuchung ein. Die Beziehung dieser $\vartheta$-Funktionen mit gebrochener Charakteristik zu den früher bereits betrachteten elliptischen Funktionen $n^{\text{ter}}$ Ordnung wird betrachtet und an den Beispielen $n = 3$ und $n = 5$ illustriert. Es werden auf Grund

des Hermiteschen Satzes gewisse lineare Relationen zwischen den $n^{\text{ten}}$ Potenzen jener $\vartheta$-Funktionen mit gebrochener Charakteristik entwickelt, zugehörige Additionstheoreme werden aufgestellt etc. Letzten Endes werden Anwendungen auf die Theorie der doppelt periodischen Funktionen zweiter und dritter Art vollzogen. —

Um nun, wie schon oben in Aussicht genommen, die Darstellung des Herrn Verfassers gegen sonst verbreitete Auffassungen der Theorie der elliptischen Funktionen zu orientieren und mit denselben zu vergleichen, so dürften zunächst die grosse Menge und Eleganz der analytischen Entwickelungen die Stärke des vorliegenden Buches ausmachen. Natürlich sind diese Entwickelungen grösstenteils nicht neu, doch stellen namentlich die der Transformationstheorie in oben skizzierter Weise entspringenden $\vartheta$-Relationen das eigene Gebiet des Herrn Verfassers dar, auf welches sich zahlreiche Publikationen desselben und seiner Schüler beziehen.

Gegenüber analytischen Rechnungen treten funktionentheoretische Überlegungen der Entwickelung überall stark in den Hintergrund. So ist denn auch die funktionentheoretische Bedeutung der Reihendarstellungen vielfach nur zu kurz angedeutet. Man vergleiche in dieser Hinsicht als ein charakteristisches Beispiel die Art, wie S. 99 die Reihenentwickelungen für $\sin am\, u$ eingeführt werden. Es bleibt hier dem Leser überlassen, die Berechtigung der gemachten Ansätze, die Konvergenzbezirke der entspringenden Reihen und dergleichen aus eigener Kraft zu ergänzen.

Im übrigen ist der funktionentheoretische Standpunkt des Herrn Verfassers in Ansehung der engeren Theorie der elliptischen Funktionen derselbe, wie er sich zum Beispiel in dem seinerzeit so ausgezeichneten Werke von Königsberger ausspricht. Nur liegt der allerdings sehr weittragende Unterschied vor, dass Herr Königsberger seinen Entwickelungen in ausgedehnter Weise die Vorstellungen Riemanns zu Grunde legt, während diese dem Krauseschen Buche fremd bleiben. Bei dieser Sachlage bleiben denn auch diejenigen drei Momente, welche für die neuere Fortentwickelung der Theorie der elliptischen Funktionen besonders folgenreich wurden (ich meine die Weierstrasssche Theorie, die Gewinnung der Gruppentheorie für die gesamte Lehre von den elliptischen Funktionen und speziell der Theorie der algebraischen Funktionen für die Transformation), ohne wesentlichen Einfluss auf das Krausesche Buch.

Die Vorzüge der Weierstrassschen Theorie namentlich bei der Transformation ersten und höheren Grades brauchen heutzutage nicht mehr verteidigt zu werden. Auf der anderen Seite kann der Herr Verfasser freilich mit Recht hervorheben, dass die Transformationsgleichungen in der Jacobischen Theorie formell einfacher ausfallen. In einem Buche, in dem mehr nur auf die formale Seite der Endresultate in der Transformationstheorie Gewicht gelegt wird, werden demnach die Fortschritte der Weierstrassschen Theorie wirkungslos bleiben.

Etwas weniger zur allgemeinen Kenntnisnahme ist bislang der zweite Gesichtspunkt gelangt, in welcher Weise die Begriffe der Gruppentheorie

sowie der Riemannschen Theorie der algebraischen Funktionen innerhalb der Kleinschen Theorie der Modulfunktionen von fortbildender Wirkung für die elliptischen Funktionen geworden sind. Die Gruppentheorie hat ihre klärende Wirkung in der That auch innerhalb der Theorie der elliptischen Funktionen im vollen Umfange bezeugt; und es ist nicht zweifelhaft, dass jemand, der den wunderbaren Organismus des gruppentheoretischen Aufbaues dieser ganzen Theorie deutlich erfasst hat, hiermit den besten Überblick gewonnen hat, sowohl über den Gesamtumfang der Theorie, sowie auch über das gegenseitige Verhältnis der einzelnen Teile, z. B. dasjenige der Weierstrassschen zu den Jacobischen Schöpfungen. Den Einwand, die Gruppentheorie betreffe stets nur Formalien und könne nie die Sache selbst erschöpfen, will ich hier gleich nennen; den Vergleich mit der durch die weiter folgenden Bemerkungen berührten Sachlage wird der Leser selber vollziehen.

In der That bleibt nun noch ein, und zwar besonders wichtiger Gesichtspunkt zu besprechen. Es handelt sich um die Krausesche Auffassung der Transformationstheorie; und ich gehe dabei gleich zu dem Hauptgegenstande, nämlich zu den oben wiederholt genannten Relationen zwischen den Nullwerten der $\vartheta$-Funktionen, welche bei Transformation und Teilung höheren Grades $n$ auftreten. Der Herr Verfasser stellt für die Anfangswerte $n$ Relationen dieser Art von eleganten formalen Gesetzen in grosser Zahl auf und betont oft wiederholt, es gäbe bei jedem einzelnen Grade eine unendliche Menge weiterer ähnlicher Relationen. Zugleich kennzeichnet er als sein eigentliches Ziel, für beliebig grosse $n$ allgemein Transformationsgleichungen und im besonderen $\vartheta$-Relationen dieser Art zu erkennen.

Es hat nun unter anderen auch diese $\vartheta$-Relation betreffend die Kleinsche Theorie der Modulfunktionen ausserordentlich aufklärend gewirkt. Nach derselben stellen alle die unendlich vielen $\vartheta$-Relationen des gleichen Grades $n$ und des gleichen Systems der Theta immer nur wieder in wechselnder Gestalt ein und dasselbe algebraische Gebilde beziehentlich ein und dieselbe algebraische Korrespondenz auf einem solchen Gebilde dar. Die auf die prinzipielle Auffassung ausgehende Untersuchung muss demnach nicht nach den „möglichst allgemeinen“ Relationen des einzelnen Falles suchen (für welche überhaupt eine korrekte Definition schwerlich gegeben werden möchte), sondern vielmehr nach der „einfachsten“ und sieht dann in den übrigen Relationen immer kompliziertere Ausdrucksformen desselben zu Grunde liegenden Gebildes.

Man ist es seit lange gewohnt, einen Hauptcharakter der modernen Mathematik darin zu sehen, dass sie bestrebt ist, wo es angeht, den Gedanken an die Stelle der Rechnung zu setzen; man meint, die Mathematik sei nicht dazu da, um möglichst viel, sondern um möglichst wenig zu rechnen. Darf ich dies als eine berechtigte und anerkannte Tendenz ansehen, so ist weiter nicht fraglich, dass die rein rechnerischen Entwickelungen zahlreicher, dasselbe Gebilde oder dieselbe Korrespondenz darstellender Relationen in der algebraischen Theorie dieses Gebildes beziehentlich dieser Korrespondenz ihren eigentlichen Gedankeninhalt gewinnen. Es ist freilich

ein Anderes mit der Absicht des Verfassers, bei allgemeinen Geraden $n$ zur Kenntnis von Transformationsgleichungen und $\vartheta$-Relationen zu gelangen. Die explicite Kenntnis dieser Relationen ist bisher auf die niedersten Grade eingeschränkt, und es ist dieserhalb nur zu wünschen, dass die Bemühungen des Verfassers in dieser Richtung von Erfolg gekrönt sein möchten. Aber das alleinige Betonen der formalen Seite des Gegenstandes, sei es im allgemeinen Falle, sei es bei niederen Transformationsgraden, ohne Darlegung der inneren funktionentheoretischen Bedeutung kann nur ein Zurückbleiben hinter der heutigen Ausbildung der Theorie genannt werden. Man kann bei dieser Sachlage nicht, wie es wohl gelegentlich gehört wurde, von zwei einander parallel gehenden Methoden der Herren Klein und Krause sprechen; sondern man kann es eben nur bedauern, dass die ausgezeichnete analytische Kraft, welche der Herr Verfasser in seinem Buche dokumentiert, das weite und wichtige Terrain, welches für die fundamentale Auffassung der behandelten Gegenstände von anderer Seite gewonnen wurde, sich nicht zu eigen machte. —

Wie ich hoffe, wird der Kundige mein Bemühen, bei den vorstehenden Erörterungen nur sachliche Rücksichten walten zu lassen, nicht verkennen. Aber ich sehe mich leider genötigt, hier am Schlusse noch eine persönliche Bemerkung anzufügen, die meinen Anteil an der Fortbildung der Theorie der Modulfunktionen betrifft. Das im B. G. Teubnerschen Verlage erschienene zweibändige Werk über die Modulfunktionen ist zum guten Teile auf Grund meiner eigenen mehr als fünfjährigen Arbeit entstanden, und was in dieser Beziehung namentlich in der Vorrede zum ersten Bande des genannten Werkes gesagt ist, erfreute sich damals wie noch heute des vollen Einverständnisses meines hochverehrten Lehrers und Freundes F. Klein. Herr Krause zitiert das fragliche Werk an verschiedenen Stellen und übergeht meinen Namen dabei vollständig. Zu meinem Bedauern sehe ich mich genötigt, dieses Verfahren als eine durch nichts begründete Missachtung meiner Rechte zu charakterisieren.

Robert Fricke.

---

**Handbuch der Vermessungskunde.** Von W. Jordan. Erster Band: Ausgleichungs-Rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 4. Auflage. Stuttgart 1895.

Ich habe mich in letzter Zeit wiederholt und nachdrücklich dafür ausgesprochen, dass die Mathematiker alle Ursache haben, sich um die Anwendungen ihrer Wissenschaft in höherem Masse zu kümmern, als in den letzten Jahrzehnten durchschnittlich der Fall gewesen ist; insbesondere habe ich betont, dass beim akademischen Unterricht eine Mitberücksichtigung der hauptsächlichen Anwendungsgebiete, wie namentlich auch der Methoden der mathematischen Exekutive — des Zahlenrechnens und des Zeichnens — eine unabweisbare Forderung der Zeit ist.* Von diesem Standpunkte aus

* Vergl. verschiedene Aufsätze und Vorträge, die man am bequemsten in den Jahrgängen 1895 1896 der Hoffmannschen Zeitschrift für mathematischen etc Unterricht beisammen findet.

mochte ich nicht ablehnen, als ich aufgefordert wurde, dem in neuer Auflage erscheinenden ersten Bande des Jordanschen Werkes einige Zeilen der Besprechung zu widmen. Selbstverständlich kann es sich dabei in keiner Weise darum handeln, dass ich die Bedeutung des Jordanschen Handbuches für die eigentlichen geodätischen Kreise darlege: Ich würde dazu durchaus inkompetent sein; es wäre dies aber auch vollkommen überflüssig, insofern das Jordansche Werk innerhalb der Fachlitteratur längst seine anerkannte Stellung besitzt. Mein Ziel kann einzig dieses sein, dass ich meine engeren mathematischen Kollegen auf den Inhalt und die allgemeine methodologische Bedeutung der Jordanschen Darlegungen aufmerksam mache.

Es handelt sich bei dem vorliegenden Bande um ein in sich abgeschlossenes Lehrbuch der Ausgleichungsrechnung, bei welchem die Interessen der Geodäsie in erster Linie berücksichtigt sind. Aber mit dieser unseren Inhaltsangabe ist die Eigenart des Werkes und seine besondere Bedeutung noch in keiner Weise bezeichnet. Dieselbe liegt darin, dass die Theorie von Anfang an im genauen Anschlusse an die Praxis entwickelt wird, deren genaue Details der Verfasser als ein Meister beherrscht. Es ist durchweg der Grundsatz bestätigt: exempla plus prosunt, quam praecepta. Beispielsweise wird zu Anfang, wo es sich um die Ausgleichung überzähliger Beobachtungen linearer Funktionen irgend welcher Unbekannten handelt, der Fall zweier Unbekannter vorweg genommen und an ihm sofort die Rechnung mit allen numerischen Einzelheiten durchgeführt, und zwar in der Art, dass die herangezogenen Beispiele nicht willkürlich gebildet, sondern wirklichen Beobachtungsreihen entnommen sind. Die prinzipiellen Auseinandersetzungen über die Berechtigung der Methode der kleinsten Quadrate treten im ersten Kapitel überhaupt zurück, es handelt sich durchaus darum, den Leser zunächst zur vollen Beherrschung der in Praxi vorkommenden Zahlenaufgaben zu befähigen. Die so im allgemeinen gegebene Anleitung wird dann im zweiten und dritten Kapitel noch erst nach geodätischer Seite spezialisiert, indem jetzt unter Heranziehung voller Beobachtungsserien die Abgleichung der Dreiecksnetze in ausführlichster Weise zur Darstellung kommt. Nun erst, im vierten Kapitel, nimmt die Betrachtung mit einer ziemlich kurz gehaltenen Theorie der Fehlerwahrscheinlichkeit eine abstraktere Wendung. Aber dieselbe wird nicht lange festgehalten, vielmehr folgt im fünften (Schluss-)Kapitel noch ein historischer Bericht über wichtigere, insbesondere in Deutschland ausgeführte geodätische Vermessungen und die bei ihnen erreichte Genauigkeit.

Es braucht kaum gesagt zu werden, dass eine solche Darstellung neben der sonst üblichen abstrakten auch dem reinen Mathematiker eine Fülle der Anregungen bietet. Ich will dabei nicht einmal so sehr betonen, dass der Leser nebenbei in das wichtige Gebiet der Geodäsie einen Einblick erhält, als vielmehr, dass keine Disziplin geeigneter sein dürfte, in die eigentliche Bedeutung der Ausgleichungsrechnung direkter und tiefer einzuführen, als eben die Geodäsie. Denn in ihr hat diese Rechnung ihre

feinste und weitestgehende Ausbildung erfahren. Wenn dann weiter der Herr Verfasser davon redet, wie sehr im Gebiete der Geodäsie durch die systematische Ausgleichungsrechnung die wissenschaftliche Moral gewonnen hat, die Ehrlichkeit den eigenen Beobachtungen gegenüber, die Treue in der Darstellung des Erlangten und des Grades seiner Zuverlässigkeit, so muss dies jedem Leser einen bleibenden Eindruck hinterlassen. Ein Weiteres aber ist, dass der Studierende in nachdrücklichster Weise angeleitet wird, neben dem Wissen das Können nicht zu vernachlässigen. In dieser Hinsicht lässt der an den Hochschulen übliche mathematische Unterricht ja vielfach einen bedauernswerten Mangel erkennen.

Indem ich in solcher Weise die Vorzüge der Jordanschen Darstellung anerkenne, darf ich nicht verschweigen, dass ich allerdings eine freiere und tiefer eindringende Behandlung der allgemeinen mathematischen Prinzipien gewünscht haben würde. Beispielsweise dürften sich manche Entwickelungen klarer und präziser geben lassen, als bei Jordan geschieht, wenn man in allgemeiner Form über die Lehre von den Determinanten und ihrer Bedeutung für die Auflösung linearer Gleichungen verfügt. Der Herr Verfasser wolle dies nicht als einen persönlichen Vorwurf empfinden. Jedes einzelne Gebiet der Mathematik hat heutzutage einen solchen Umfang angenommen, dass eine allseitige Beherrschung desselben wohl nur durch die Kooperation Mehrerer gelingt. Herr Jordan bezieht sich in seiner Darstellung mit Recht immer wieder auf das Vorbild der Gaussschen Arbeiten. Wir Theoretiker möchten bei unseren Bemühungen das Gleiche thun. Das eben ist die grosse historische Stellung von Gauss, dass in ihm noch verbunden war, was sich jetzt auf verschiedene Forschungsrichtungen verteilt.

Um aus den vielen neuen Entwickelungen, die Herr Jordan giebt, doch eine Einzelheit anzuführen, sei auf die im vierten Kapitel enthaltene Theorie des Maximalfehlers verwiesen (welche im Anhange noch weiter ausgeführt wird). Die Gausssche Funktion:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \varepsilon^2},$$

die die Wahrscheinlichkeit der Fehlerverteilung ergiebt, wird hier durch die andere ersetzt: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 5 \ldots (2n+3)}{2 \cdot 4 \ldots (2n+2)} \cdot \frac{1}{M}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)^{n+1}$ für $\varepsilon = -M$ bis $+M$, und Null ausserhalb dieses Intervalles. Für grosse Werte von $n$ stimmt diese Funktion beliebig genau mit $\frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \varepsilon^2}$ überein. Für eine gegebene Fehlerverteilung werden die beiden Konstanten $M$ und $n$ aus dem mittleren Fehler und aus dem Mittelwerte der vierten Potenzen des Fehlers bestimmt.

Die vierte Auflage des vorliegenden Bandes ist ziemlich viel umfangreicher geworden als die dritte. Sie enthält 38 Bogen gegen 24 Bogen der dritten. Es ist dies namentlich durch die eingehenden Beispiele veranlasst, die der Herr Verfasser der von ihm vor einigen Jahren ausgeführten

Hannoverschen Stadttriangulation entnimmt. Leider ist infolge der hierdurch gegebenen Vermehrung des Umfanges ein Kapitel weggeblieben, welches in der dritten Auflage den Band schliesst und unter geometrischen Gesichtspunkten besonders interessant scheint; ich meine die „Theorie der Genauigkeit der geodätischen Punktbestimmung.“ Gerade weil das Kapitel in der neuen Auflage fehlt, sei hier ausdrücklich auf die hübschen in ihm enthaltenen Figuren hingewiesen, durch welche beispielsweise entschieden wird, ob es vorteilhafter ist, einen vierten Punkt relativ zu drei gegebenen Punkten durch Pothenotsche Bestimmung oder durch Vorwärtseinschneiden mit drei Strahlen festzulegen.

KLEIN.

---

**Lehrbuch der elementaren Planimetrie.** Von B. FÉAUX. Achte Auflage, besorgt durch FR. BUSCH. Paderborn 1894. Schöningh; VI und 216 S. 2,50 Mk.

Das vorliegende Lehrbuch, welches vielfach an Gymnasien Eingang gefunden hat, verlegt den Schwerpunkt des geometrischen Unterrichtes in das Beweisen von Lehrsätzen; die Konstruktionsaufgaben treten in den Hintergrund. So fehlen auch die in anderen Lehrbüchern den einzelnen Paragraphen beigefügten Konstruktionsaufgaben als Anwendung der vorhergehenden Lehrsätze.

Im Gegensatz zu der ersten Auflage zeigt die achte eine schärfere Fassung der Lehrsätze, eine klarere Darstellung der Beweise und auch sonst eine grössere Korrektheit im Ausdruck. Zu dem Anhange der ersten Auflage, welcher auf zehn Seiten einiges aus der neueren Geometrie bringt, ist ein zweiter Anhang getreten, behufs Einführung in den Koordinatenbegriff und in die Grundlehren von den Kegelschnitten. Hier fiel dem Referenten die folgende Fassung auf: „Wie bekannt, nennt man eine unbestimmte Gleichung auch Funktion.“

E. JAHNKE.

---

**Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik.** Von G. HOLZMÜLLER. Erster Teil, nach Jahrgängen geordnet und bis zur Abschlussprüfung der Vollanstalten reichend. Zweite Doppelauflage. Leipzig 1895. B. G. Teubner. VIII und 229 S. 2,40 Mk.

In der zweiten Auflage ist die Ausdrucksweise verbessert, Druckfehler sind beseitigt und einige Einschaltungen gemacht worden, doch so, dass die laufenden Nummern der Abschnitte und Figuren ungeändert geblieben sind.

E. JAHNKE.

---

**Leitfaden der elementaren Mathematik.** Von A. SICKENBERGER. Dritter Teil: Stereometrie. — Trigonometrie. München 1895. Zweite Auflage. Th. Ackermann. 103 S. 1,20 Mk.

Es ist eine knappe und geschickte Darstellung des trigonometrischen und stereometrischen Pensums für Gymnasien und Realschulen. Auch die Hauptsätze des sphärischen Dreiecks sind hergeleitet (S. 97—103). Leider

fehlen die Hauptsätze der Perspektive. Auch lassen die Figuren, deren übrigens recht wenige vorhanden sind, an Anschaulichkeit zu wünschen übrig. Die auf S. 70 befindliche Formulierung: „Die trigonometrischen Funktionen lassen sich als Strecken darstellen“ dürfte dem Verständnis des Schülers nicht gerade förderlich sein. — Das Buch ist besonders des stereometrischen Teiles wegen der Beachtung zu empfehlen. Die zweite Auflage ist mit einer genügenden Anzahl von Übungsbeispielen ausgestattet.

E. Jahnke.

---

**Leitfaden der Arithmetik nebst Übungsbeispielen.** Von A. Sickenberger. Sechste unveränderte Auflage. München 1895. Th. Ackermann. 196 S.

Was den Rechenunterricht in der Sexta, Quinta, Quarta angeht, so dürfte es sich kaum empfehlen, den Schülern einen Leitfaden in die Hand zu geben; eine Aufgabensammlung wird vielmehr durchaus genügen, und als solche wird auch der vorliegende Leitfaden ein brauchbares Hilfsmittel abgeben.

E. Jahnke.

---

**Über unbestimmte Gleichungen.** Von G. Speckmann. Leipz. 1895 A. Koch. 11 S.

Der Verfasser will „einige einfache Lösungsformeln für die Pellsche Gleichung und für die allgemeinere Gleichung $T^2 - DU^2 = m^2$ ableiten und bekannt geben.“

E. Jahnke.

---

**Leitfaden der elementaren Mathematik.** Von A. Sickenberger. Erster Teil: Algebra. Dritte Auflage. München 1894. Th. Ackermann. 75 S. 1,20 Mk.

**Übungsbuch zur Algebra.** Von A. Sickenberger. Erste Abteilung. Zweite Auflage. München 1894. Th. Ackermann. 106 S. 1,20 Mk.

Die neuen Auflagen von Leitfaden und Übungsbuch, über welche schon bei Gelegenheit des ersten Erscheinens referiert worden ist, unterscheiden sich nicht wesentlich von der ersten Auflage.

E. Jahnke.

---

**Trigonometrie.** Von W. Winter. Lehrbuch und Aufgabensammlung für Schulen. Zweite Auflage. München 1895. Th. Ackermann. 78 S. 1 Mk.

Das vorliegende Lehrbuch bringt das Wichtigste aus der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Das Additionstheorem wird allein aus der Definition der trigonometrischen Funktionen heraus bewiesen. Den einzelnen Paragraphen sind eine Menge geschickt ausgewählter Aufgaben, unter anderen auch solche aus dem Gebiete der mathematischen Geographie und Astronomie beigefügt. Vornehmlich der letzteren wegen sei das Buch der Beachtung empfohlen. — Die zweite Auflage ist unverändert.

E. Jahnke.

---

**Stereometrie.** Von W. Winter. Lehrbuch und Aufgabensammlung für Schulen. Zweite Auflage. München 1895. Th. Ackermann. 115 S. 1,60 Mk.

Die Bearbeitung des stereometrischen Pensums für Schulen ist auch heute noch eine lohnende Aufgabe; und jeder Versuch, die stereometrischen

Entwickelungen weiter zu vereinfachen, darf sicher sein, dankbarer Anerkennung zu begegnen.

An der vorliegenden Darstellung, welche die neuesten Lehrbücher auf dem genannten Gebiete berücksichtigt, ist der Beweis des Cavalerischen Prinzips für das Rautenprisma (der Herr Verfasser bedient sich noch des Ausdrucks: Parallelepipedon), das allgemeine Prisma und die Pyramide hervorzuheben, sowie die Fülle von passenden, den einzelnen Kapiteln beigefügten Übungsaufgaben. Dagegen vermisst Referent ungern die Hauptregeln der Perspektive. Vielleicht entschliesst sich der Herr Verfasser, ihnen in einer nächsten Auflage eine Stelle einzuräumen. Auch die Figuren lassen, was Anschaulichkeit anbetrifft, noch zu wünschen übrig.

E. Jahnke.

---

**Sammlung planimetrischer Aufgaben nebst Anleitung zu deren Auflösung.** Von A. Hoffmann. Fünfte verbesserte Auflage von J. Plassmann. Mit sechs lithographierten Figurentafeln. Paderborn 1895. F. Schöningh. X und 211 S.

Verschiedentlich ist, meist innerhalb des Rahmens eines Lehrbuches der Planimetrie, eine Anleitung zur Auflösung geometrischer Aufgaben versucht worden. Die vorliegende Sammlung ist ein schätzenswerter Beitrag zur Überwindung der Schwierigkeiten, welche der Unterricht in der Lösung geometrischer Aufgaben auf geometrischem Wege darbietet. Die Anleitungen sind zum grössten Teile allgemeiner Natur, so dass die Hilfe des Lehrers durchaus nicht überflüssig erscheint. Die Anzahl der Aufgaben ist eine recht beträchtliche, darunter eine grosse Zahl völlig neuer. Zu manchen bereits bekannten Aufgaben finden sich neue Lösungen vor. Besonderes Gewicht hat der Verfasser auf die Determination gelegt und eine reiche Menge von Aufgaben beigebracht, deren Determination Gelegenheit bietet, Sätze der Algebra und Trigonometrie auf die Geometrie anzuwenden. Was die Weite des planimetrischen Pensums anlangt, das der Sammlung zu Grunde gelegt wird, so setzt der Verfasser die Kenntnis der Eigenschaften von Pol und Polare nicht voraus.

Die Sammlung zerfällt in drei Teile. Der erste Teil umfasst alle Aufgaben, welche die Elemente zur Auflösung sämtlicher Aufgaben überhaupt liefern, der zweite solche Aufgaben, welche die Anwendung der Proportionenlehre erfordern; und im dritten sind die Viereckssaufgaben zusammengestellt.

E. Jahnke.

---

**Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie.** Von F. Reidt. Erster Teil: Trigonometrie. Vierte Auflage. Herausgegeben von A. Much. Leipzig 1894. B. G. Teubner. 250 S. 4 Mk.

Noch vor etwa einem Jahrzehnt bot das vorliegende Buch die erste und einzige einigermassen umfassende grössere Sammlung trigonometrischer Aufgaben; und auch jetzt noch nimmt es, was Reichhaltigkeit und Vollständigkeit anbetrifft, die erste Stelle ein.

Die Aufgaben sind verschiedenen Gebieten, der Geometrie und Feldmesskunst, der Astronomie und Geographie, der Physik und im besonderen der Mechanik entnommen und so geordnet, dass sie den Unterricht von Anfang an gleichsam von Stunde zu Stunde begleiten. Der Lehrer ist daher nicht genötigt, den zur Anwendung und Einübung der einzelnen Sätze passenden Übungsstoff erst zusammenzusuchen. So sind die trigonometrischen Gleichungen nicht als solche in einem einzigen Abschnitt zusammengestellt, sondern nach den einzelnen trigonometrischen Lehrsätzen, die bei ihnen zur Anwendung kommen, geordnet. Der unmittelbare Gebrauch der Sammlung im Unterrichte wird noch durch die Beigabe der vollständig ausgeführten numerischen Beispiele zu den Fundamentalaufgaben erhöht.

Das Buch soll auch ein Hilfsmittel zur Einführung in die rechnerische Praxis bieten, daher wird der Gebrauch der Tafeln eingehender als in anderen Sammlungen erörtert. Weiter liefert es durch die an einzelnen Stellen vorausgeschickten Anleitungen und Erläuterungen eine Ergänzung und Erweiterung der gebräuchlichen Lehrbücher. So fiel dem Referenten besonders die geschickte Anleitung zur Auflösung trigonometrischer Gleichungen auf S. 13 auf. Den verschiedenen Abschnitten sind noch unter der Rubrik „Vermischte Aufgaben" Anhänge beigefügt, wo die zur Lösung führenden Wege nicht schon durch den Paragraphen, in welchem sich die Aufgaben befinden, angedeutet sind.

Die Sammlung zerfällt in drei Abschnitte: A) Goniometrie; B) Ebene Trigonometrie; C) Sphärische Trigonometrie. Ein Anhang zu A) behandelt ausführlich den Gebrauch der Hilfswinkel für logarithmische Rechnungen, ein solcher zu B) giebt Aufgaben über Maxima und Minima. In Abschnitt B) sind noch Aufgaben und Lehrsätze aus der Tetragonometrie und Polygonometrie zusammengestellt. Abschnitt C) stellt die Verbindung mit der als zweiter Band des Gesamtwerkes erschienenen Sammlung stereometrischer Aufgaben her. — Die vierte Auflage ist fast unverändert. Die Resultate zu sämtlichen Aufgaben sind wieder in einem besonderen Hefte zusammengestellt.

E. Jahnke.

---

**Essai sur la théorie des nombres.** Von J. Stieltjes. Premiers éléments. Paris 1895. Gauthier-Villars. 103 p.

Die vorliegende Abhandlung, ein Auszug aus den Annalen der Toulouser Akademie, ist eine der letzten Arbeiten des für die Wissenschaft zu früh dahingeschiedenen französischen Mathematikers. Behandelt sie auch nur die ersten Elemente der Zahlentheorie, so lässt sie doch überall eine eigenartige Auffassung des genialen Verfassers klar hervortreten.

Folgendes ist kurz der Inhalt.

Auf ein einleitendes Kapitel über die Teilbarkeit der Zahlen folgt ein Kapitel über die Theorie der Kongruenzen. Mit dieser ist die Theorie der unbestimmten Gleichungen eng verknüpft. So giebt der Verfasser am Schlusse des zweiten Kapitels eine Diskussion der unbestimmten Gleichung:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{n+1} x_{n+1} = u,$$

wo $a_1, a_2, \ldots a_{n+1}$, $u$ gegebene Zahlen und $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ Unbekannte bezeichnen, welche ganzzahlige Werte annehmen sollen. Es wird ein Verfahren hergeleitet, um alle Lösungen dieser Gleichung und jede Lösung nur einmal zu erhalten. Hieraus ergeben sich wichtige Hermitesche Sätze in ausserordentlich einfacher Weise. Im besonderen wird obige Gleichung noch für den Fall $u = 0$ betrachtet, und nach dem Vorgange von S. Smith der Begriff eines Fundamentalsystems von Lösungen eingeführt. Das einfachste Verfahren, um ein Fundamentalsystem von Lösungen zu gewinnen, findet sich in einer nachgelassenen Schrift Eulers vor, worauf Jacobi in einer ebenfalls nachgelassenen Arbeit aufmerksam gemacht hat.

Das dritte Kapitel liefert eine Darstellung der Theorie der Systeme unbestimmter linearer Gleichungen und der Systeme linearer Kongruenzen, wie sie zuerst von S. Smith gegeben worden ist. Diese Theorie bezieht sich auf den Fall, wo die Analogie zwischen der Theorie der Kongruenzen und der Theorie der Gleichungen aufhört, auf den Fall nämlich, dass die Determinante des Systems:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{i,\,m+n} x_{m+n} \equiv u_i \pmod{M}, \quad i = 1, 2, \ldots m$$

zu $M$ nicht mehr prim ist. Hierbei spielt der von Sylvester eingeführte Begriff der Matrize eine grundlegende Rolle.

Zunächst werden die linearen unbestimmten Gleichungen und zwar der Fall $u_i = 0$ $(i = 1, \ldots m)$ betrachtet. Es werden Theoreme entwickelt, vermittelst deren sich alle Lösungen und jede Lösung nur einmal ergeben. Ein System solcher Lösungen wird auch hier Fundamentalsystem genannt.

Hiernach bestimmt der Verfasser die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Lösungen des obigen Gleichungssystems, in dem Falle $u_i \neq 0$. Eine Anwendung dieser Betrachtungen auf den Fall, dass

$$a_{ik} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots m),$$

wird benutzt, um anzudeuten, wie S. Smith aus diesen Entwickelungen einen arithmetischen Beweis der Transformationsformel für die vielfachen Integrale herleiten konnte.

Nachdem die Operation der Multiplikation zweier Matrizen definiert worden ist, werden noch einige Probleme über Matrizen gelöst, unter anderen das Problem, alle Matrizen von bestimmtem Typus zu finden, deren Determinanten gegebene Werte haben.

Einer analogen Untersuchung werden die Systeme linearer Kongruenzen unterworfen. Dem gegebenen Kongruenzensystem entspricht hier die bilineare Form:

$$F = \sum_i \sum_k a_{ik} x_i y_k.$$

Der Verfasser beschränkt sich darauf, für den Fall $u_i = 0$ das folgende, von S. Smith herrührende Theorem über die Äquivalenzbedingungen zweier Formen herzuleiten:

Damit eine bilineare Form $G$ in der Form $F$ enthalten sei, ist notwendig und hinreichend, dass der Rang von $G$ den von $F$ nicht übersteige und dass die Invarianten von $G$ teilbar seien durch die entsprechenden Invarianten von $F$.

Im Falle $u_i \neq 0$ wird auch hier die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Lösungen entwickelt.

Auf die zahlreichen interessanten Anwendungen, welche Frobenius auf die algebraische Theorie der bilinearen Formen gemacht hat, geht der Verfasser nicht ein.

Der Verfasser giebt noch auf S. 47, 48, 103 eine Zusammenstellung der einschlägigen Litteratur. E. Jahnke.

---

**Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik.** Von G. Holzmüller. Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitungen auf die Hochschul-Mathematik. Leipzig 1895. B. G. Teubner. XIII und 224 S. Mark 2,80.

Der vorliegende dritte Teil bildet den Abschluss des methodischen Lehrbuches des Verfassers. Es soll ein Ergänzungsband sein, der „ohne jede Systematik eine freie Auswahl methodisch bearbeiteter Gegenstände aus den verschiedenen Gebieten bringt, die auf der Prima der Realgymnasien, Ober-Realschulen und höheren Fachschulen zur Sprache kommen können.“ Unter den drei Bänden, aus welchen des Verfassers Lehrbuch besteht, ist es zweifellos der bedeutendste, weshalb eine längere Inhaltsübersicht folgen soll.

Die erste Abteilung handelt von der Geometrie. Die aus den Sätzen von Pascal und Brianchon fliessenden Konstruktionen, welche nur das Lineal erfordern, werden ausführlich besprochen und auf Zentralperspektive und Schliessungsprobleme für Tangenten-Sehnenvierecke angewandt. Hieran reiht sich das Schliessungsproblem der Tangenten-Sehnendreiecke, wo der für die reine Geometrie der Lage grundlegende Satz über perspektivische Dreiecke zur Anwendung kommt. Der Beweis des Verfassers zeichnet sich durch Einfachheit und Eleganz aus und wird durch Auffassen der Figur als Zeichnung einer dreiseitigen Pyramide geführt. Die Konstruktionen nach Pascal und Brianchon werden im weiteren als projektivische Operationen gedeutet, welche zu der rein projektivischen Definition der Kegelschnitte hinleiten. Dass auch umgekehrt jede nach Pascal und Brianchon konstruierte Kurve ein Kegelschnitt ist, wird im Anschluss an eine Beweismethode von Herrn Schur (im Anhange des Buches) bewiesen. Um das Kapitel über die Geometrie der Lage zu einem befriedigenden Abschluss zu bringen, zeigt der Verfasser noch, dass die kinetische Parabeldefinition in Verbindung mit dem Satze von den gleichen Peripheriewinkeln im Kreise durch einfache Projektion die ganze Theorie in einfacher und schulgemässer Weise liefert. Ein weiteres Kapitel behandelt das Doppelverhältnis. Den Beschluss der ersten Abteilung bilden Übungen

aus der analytischen Geometrie, welche nur den Zweck haben, auf den Begriff des Krümmungskreises und Krümmungsradius vorzubereiten. Im übrigen tritt die analytische Geometrie in den Hintergrund.

Die zweite Abteilung ist stereometrischen Inhalts und beginnt mit einer Reihe schwierigerer Aufgaben, die mit dem Begriffe des Trägheitsmomentes ebener Flächen zusammenhängen. So werden Schwerpunktsbestimmungen für abgeschrägte Prismen und Cylinder und für Drehungskörper ausgeführt. Darauf werden die Kegelschnittsflächen und die zugehörigen Körper behandelt. Die Bestimmung der Segmente, welcher die Methode der konstanten Verkürzung bezw. Verlängerung zu Grunde gelegt wird, gestaltet sich besonders einfach. Hieran schliessen sich einige Anwendungen des Cavalerischen Prinzips und, im Interesse der Fachschulen, die wichtigsten Gewölbeformen. Weiter wird der von Gauss herrührende Fundamentalsatz der orthographischen Axonometrie auf einigen Zeilen in elementarer Weise bewiesen und hierdurch die Einführung namentlich in die Krystallographie und in die sphärische Trigonometrie erleichtert. Endlich folgt noch eine einfache, zentralperspektivische Darstellung der Kugel (vergl. des Verfassers „Einführung in das stereometrische Zeichnen").

Die dritte Abteilung hat die sphärische Trigonometrie zum Gegenstand. Die hier gegebene Darstellung weicht hinsichtlich der Berechnungen von der üblichen nicht ab, wohl aber, wie der Verfasser betont, in der geometrischen Darstellung, insofern auf die Zeichnung der Figuren besondere Sorgfalt verwendet wird. In einem besonderen Kapitel werden noch die Möglichkeit der Konstruktions- und Berechnungsaufgaben und die auftretenden Mehrdeutigkeiten rein geometrisch untersucht. Ein weiteres Kapitel giebt interessante Andeutungen über die sphärische Reziprozität. Am Schluss sind noch die wesentlichen Formeln zusammengestellt.

In der vierten Abteilung behandelt der Verfasser die algebraische Analysis. Auf ein einleitendes Kapitel über die ganzen rationalen Funktionen, wo u. a. eine einfache Herleitung der Interpolationsformel von Lagrange sowie Anwendungen auf Geometrie und Mechanik gegeben werden, folgt die Quadratur der gleichseitigen Hyperbel und im Anschluss hieran die Berechnung der Expansions- und Kompressionsarbeit von Gasen unter Zugrundelegung des Mariotteschen Gesetzes. Ein besonderes Kapitel bringt allgemeines über die unendlichen Reihen. An dem Beispiel bedingt konvergenter Reihen wird erläutert, dass man von den für endliche Gliederanzahl gültigen Gesetzen nicht ohne weiteres auf unendliche Reihen Anwendung machen darf. Die Ausdehnung des binomischen Lehrsatzes wird sodann für negative und gebrochene Exponenten gegeben. Als Beispiele werden u. a. brauchbare Reihen für $\arcsin y$ und $\frac{\pi}{4}$ hergeleitet. Jetzt folgt die Flächenermittelung für die Kurven $y = x^p$ bei beliebigem reellen $p$ mit Anwendung auf die Diagrammberechnung für das Gravitationsgesetz ($p = -2$) und für die adiabatische Arbeit bei Druckluft-, Dampf- und Kompressionsmaschinen ($p = 1,41$ bezw. $1,125$). Endlich kommen auch die

wichtigsten Reihenentwickelungen für transcendente Funktionen, so für den Logarithmus, für $\pi$ und cyklometrische Funktionen zur Behandlung. Auch hier bildet eine Zusammenstellung der wichtigsten Resultate den Schluss des Abschnittes.

Die letzte Abteilung bringt die Gleichungen dritten und vierten Grades nebst Andeutungen über Gleichungen $n^{\text{ten}}$ Grades. Bezüglich der Übungsaufgaben sei auf die Aufgabensammlung von Herrn Lampe (Müller, Berlin) hingewiesen.

Ein Anhang enthält eine Einführung in das Gebiet der Involution, den schon oben erwähnten Nachtrag zum Pascalsatz und eine sehr hübsche elementare Rektifikation der Parabel, welche vom Verfasser herrührt.

Diese Übersicht wird den Reichtum an Material sowohl als auch dessen geschickte Verarbeitung erkennen lassen, wodurch es dem Verfasser in hohem Masse gelingt, seine Absicht zu erreichen, einmal hinreichenden Stoff zur freien Auswahl für die Prima darzubieten und zweitens auf das Studium der Hochschule in elementarer Weise vorzubereiten, den Schüler überall auf die Unzulänglichkeit der Elementarmathematik hinzuweisen und ihn zu überzeugen, dass er nicht am Abschluss der Wissenschaft, sondern am Eingange zu einer neuen Welt steht.

E. Jahnke.

---

**Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie.** Von Leonhard Euler. (1753 und 1779.) Aus dem Französischen und Lateinischen übersetzt von E. Hammer. Mit sechs Figuren im Texte. Leipzig 1896. Wilhelm Engelmann. 65 S. [Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 73.]

Unter den fast zahllosen Abhandlungen Eulers zwei als besonders lesenswert zu bezeichnen, wäre ein kühnes Unterfangen, und wir sind überzeugt, dass, wie der grössere Teil von Eulers Abhandlung über Variationsrechnung in Nr. 46 von Ostwalds Klassiker exakter Wissenschaften übersetzt ist, auch noch andere Abhandlungen aus seiner Feder Aufnahme finden werden und müssen. Die heute uns vorliegenden von Herrn Hammer bearbeiteten Abhandlungen über sphärische Trigonometrie sind diejenigen, auf welche die ganze spätere sphärische Trigonometrie sich aufgebaut hat, und deren Bezeichnungsweise sich so allgemein eingebürgert hat, dass die wenigsten mehr wissen, dass man früher anders schrieb, anders schreiben konnte. Wir erachten es deshalb als einen grundsätzlichen Fehler, dass im Drucke das Eulersche $\sin A^2$ durch $\sin^2 A$ ersetzt wurde, wenn auch der Herausgeber in seinem Nachworte die Änderung hervorhebt und zu entschuldigen sucht. Auch die anderen weniger wichtigen Bezeichnungswechsel hätten unserer Meinung nach unterbleiben sollen. Der Aufsatz von 1753 ist dadurch merkwürdig, das in ihm, um uns eines vielleicht etwas derben Ausdruckes zu bedienen, mit Kanonen nach Spatzen geschossen ist. Euler leitet nämlich die ganze sphärische Trigonometrie aus dem Gedanken ab, dass drei auf der Kugelfläche gegebene Punkte untereinander durch kürzeste

Linien verbunden werden, oder anders ausgesprochen, die Trigonometrie ist ihm ein Beispiel zur Anwendung der Variationsrechnung. Der zweite Aufsatz von 1779 dagegen gründet die sphärische Trigonometrie auf durchaus einfache stereometrische Betrachtungen, wie sie in unseren Mittelschulen heimisch geworden sind.

CANTOR.

---

**Untersuchungen über die Reihe $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \cdots$ (1826).** Von N. H. ABEL. Herausgegeben von A. WANGERIN. Leipzig 1895. Wilhelm Engelmann. 46 S. [Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 71.]

Die grosse Bedeutung des im ersten Bande von Crelles Journal erschienenen Aufsatzes besteht bekanntlich darin, dass Abel in ihm ein unübertroffenes erstes Muster der strengen analytischen Behandlung von Reihen aufstellte, deren Variable wie deren in allgemeine Buchstaben gekleidete Konstanten komplex sind. Abels Abhandlung lässt sich in dieser Beziehung den Gaussschen *Disquisitiones circa seriem etc.* an die Seite stellen, welche gleich bahnbrechend auf dem Gebiete reeller Zahlen war. Eine fernere Ähnlichkeit beider Arbeiten besteht darin, dass Gauss wie nach ihm Abel von der Reihe ausging, nicht nach vorher allgemeiner Übung von einer in Reihengestalt zu verwandelnden geschlossenen Funktion. Trotzdem Abels Werke in zwei Auflagen vorhanden sind, ist deren Verbreitung vermöge des hohen Preises eine verhältnismässig geringe. Der Binominalaufsatz wenigstens sollte in der Bibliothek eines jeden Mathematikers sich befinden, und deshalb begrüssen wir seine Aufnahme in Ostwalds Sammlung.

CANTOR.

---

**Eine Theorie der Konvergenz unendlicher Reihen.** Von Dr. ERNST SCHIMPF. Beilage zum Jahresberichte für 1894—1895 des städtischen Gymnasiums zu Bochum. 56 S. [1895. Programm Nr. 353.]

Anknüpfend an die Arbeiten von Kummer, von Du Bois-Reymond, von Dini, von Pringsheim, in denen die Konvergenz von Reihen mit anschliesslich positiven Gliedern dadurch geprüft wurde, dass man eine Vergleichsreihe von wesentlich einfacher Summe herzustellen sich angelegen sein liess, hat Herr Schimpf den gleichen Gedanken auch bei Reihen mit komplexen Gliedern zur Anwendung zu bringen gesucht. Er hat, wenn $a_k$ das allgemeine Glied seiner Reihe bezeichnet, die etwas einschränkende Bedingung eintreten lassen, dass ein endlicher oder unendlicher Grenzwert des Gliederquotienten $\frac{a_k}{a_{k-1}}$ vorhanden sei. Dann ist

$$\sum_0^n A_k = \psi(n)$$

die Vergleichsreihe, und deren einzelne Glieder bilden sich mittels

$$A_k = \psi(k) - \psi(k-1).$$

Die Funktion $\psi(n)$ wird so gewählt, dass sie mit wachsendem $n$ der Null zustrebt, sofern sie überhaupt einen endlichen Grenzwert besitzt; als Mittel der Vergleichung dient $\frac{a_k}{A_k}$. Der Herr Verfasser hat bei seiner Untersuchung einige neue Begriffe und Bezeichnungen eingeführt, welche, wie uns scheint, zur allgemeinen Annahme empfohlen zu werden verdienen. Unter $(\sigma)_n$ versteht er irgend eine Funktion von $n$, welche $\sigma$ zum Grenzwert hat, wenn $n = \infty$ wird, man könnte vielleicht sagen irgend einen *Anfangsausdruck von* $\sigma$. Ist $C$ eine von 0 verschiedene Konstante, ist ferner $a$ die Funktion, welcher $\Sigma a_k$, sofern die Reihe konvergiert, als Grenze sich nähert, und ist $C \cdot F(n)$ ein Anfangsausdruck der Differenz $\sum_0^n a_k - a$, so heisst:

$$\lim_{n=\infty} \left[ \left\{ \sum_0^n a_k - a \right\} : F(n) \right] = c$$

die *Grenzgleichung* der Reihe der $a_k$. Endlich ist der *Quotient einer Reihe* benutzt, das heisst der Ausdruck:

$$Q_{n+1}^{n+\nu} = \frac{|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+\nu}|}{|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+\nu}|} > 1.$$

Wir können, ohne allzu ausführlich zu werden, nicht berichten, wie der Herr Verfasser sich seines Reihenquotienten bedient. Das möge der sehr lesenswerten Abhandlung selbst entnommen werden.

Cantor.

---

**Das 2000jährige Problem der Trisektion des Winkels.** Von Ingenieur Sigismund Wellisch (Sonderabdruck aus der Zeitschrift des Österr. Ingenieur- und Architektenvereins, Nr. 3, 1896). Wien 1896. Spielhagen und Schurich. 19 S.

Wir fürchten, der Herr Verfasser hat sich bei Mathematikern durch den Titel seiner Abhandlung geschadet. Wir beeilen uns deshalb zu berichten, dass Herr Wellisch von der Unausführbarkeit der Winkeldreiteilung mittels des Zirkels und des Lineals vollkommen Kenntnis hat, und dass er nur einige Methoden mitteilt, welche unter Anwendung anderer Hilfsmittel als der genannten, richtige Ergebnisse liefern. Unter den benutzten Kurven ist namentlich die Kardioide zu nennen, für deren Erzeugung eine Vorrichtung beschrieben ist.

Cantor.

# Bibliographie

vom 31. Oktober bis 26. November 1896.

### Periodische Schriften.

Jahrbuch d. Erfindungen u. Fortschritte auf d. Gebieten d. Physik, Chemie und chem. Technol., d. Astronomie u. Meteorol. Leipzig, Quandt & Händel. 6 Mk.

Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorolog. Institutes. Ergebnisse an den Stationen II. und III. Ordnung im Jahre 1896, zugleich deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1896. Beobachtungssystem des Königreichs Preussen und benachbarter Staaten. 1. Heft. Berlin, Asher & Co. 3 Mk.

Berichte, math. u. naturw., aus Ungarn. 13. Band (Januar 1895 bis Dez. 1895). 1. Hälfte. Budapest, Verlagsbur. d. ungar. Akad. d. Wissenschaften. 4 Mk.

### Geschichte der Mathematik und Physik.

Hagen, Joa. G., Index operum Leonardi Euleri. Berlin, Dames. 2 Mk.

Mach, E., Die Prinzipien der Wärmelehre. Historisch-kritisch entwickelt. Leipzig, Barth. 10 Mk.

Landesvermessung, die schweizerische, 1832—1864 (Geschichte der Dufourkarte). Herausgegeben vom eidgenössischen topographischen Bureau. Bern, Schmid, Francke & Co. 3 Mk. 35 Pf.

Ernst, Adf., James Watt und die Grundlagen d. modernen Dampfmaschinenbaues. Berlin, Springer. 2 Mk.

Bernhardt, Philipp Melanchthon als Mathematiker und Physiker. Neue Ausgabe. Wittenberg (1865), Wünschmann. 1 Mk.

### Reine Mathematik.

Bendt, Frz., Katechismus der Differential- und Integralrechnung. Leipzig, Weber. geb. 3 Mk.

Küpper, C., Nachtrag zu den „$k$-gonal-Kurven“. Prag, Řivnáč 20 Pf.

Rogel, Frz., Theorie der Eulerschen Funktionen. Prag. Ebendas. 72 Pf.

Studnička, F. J., Über Potenzdeterminanten und deren wichtigste Eigenschaften. Prag. Ebendaselbst. 16 Pf.

Schubert, Herm., Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra (Sammlung Göschen). Leipzig, Göschen. 80 Pf.

Sporer, Bened., Niedere Analysis (Samml. Göschen). Leipzig, Göschen. 80 Pf.

Wälsch, E., Über die Laméschen Polynome zweiter Ordnung einer Form fünfter Ordnung. Wien, Gerolds Sohn. 20 Pf.

Bolte, F., Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie zum Gebrauche an Navigationsschulen. Hamburg, Penser. 1 Mk. 20 Pf.

### Angewandte Mathematik.

Weisbach, Jul., Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. Fünfte Auflage von Herrmann, Gust. 1. Teil: Lehrbuch der theoretischen Mechanik. 2. Abdr. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 26 Mk.

Barth, A. F., Uns. Weltsyst. E. Beitr z. Theor. d. Weltgeschehens. Leipz., Fock. 1 Mk.

Hartmann, Johs., Die Beobachtung der Mondfinsternisse. Leipzig, Hirzel. 5 Mk.

Mach, L., Weitere Versuche über Projektile. Wien, Gerolds Sohn. 1 Mk. 90 Pf.

Unterweger, Johs., Über zwei trigonometrische Reihen für Sonnenflecken, Kometen und Klimaschwankungen. Wien, Gerolds Sohn. 90 Pf.

Vermessungswesen, Das, der königl. Haupt- und Residenzstadt Dresden. Die Triangulationen erster, zweiter, dritter Ordnung. Im Auftrage des Rats zu Dresden bearb. v. Stadtvermessungsamt. 1. Bd. Dresden, Baensch. 8 Mk.

Handwörterbuch der Astronomie, herausgegeben von W. Valentiner. 1. Band. Breslau, Trewendt. 24 Mk.

Bestimmungen, grundsätzliche, für die Durchführung hydrometrischer Erhebungen; herausgeg. vom kaiserl. königl. hydrogr. Zentralbureau. Wien, Braumüller. 1 Mk. 60 Pf.

Regulativ für die hydrometrische Prüfungsanstalt des kaiserl. königl. hydrometrischen Zentralbureau in Wien. Wien, Braumüller. 20 Pf.

Vorschrift über die Verfassung, Sammlung und Evidenzhaltung von Situations-, Längenprofils- und Querprofilsplänen der Binnengewässer; herausgeg. vom kaiserl. königl. hydrographischen Zentralbureau. Wien, Braumüller. 2 Mk.

Krell sen., O., Hydrostatische Messinstrumente. Berlin, Springer. 3 Mk.

Kröhnke, G. H. A., Handbuch zum Abstecken von Kurven auf Eisenbahn- und Wegelinien. 13. Auflage. Leipzig, B. G. Teubner. geb. 1 Mk. 80 Pf.

Freiberger, H., Perspektive nebst einem Anhange über Schattenkonstruktion und Parallelperspektive (Sammlung Göschen). Leipzig, Göschen. 80 Pf.

Becker, H., Geometr. Zeichnen (Samml. Göschen). Leipzig, Göschen. 80 Pf.

Sinram, A., Kritik der Formel der Newtonschen Gravitationstheorie. Hamburg, Gräfe & Sillem. 1 Mk.

Spitaler, R., Bahnbest. d. Kometen 1890 VII. Wien, Gerolds Sohn. 1 Mk. 40 Pf.

## Physik und Meteorologie.

Wiedemann, E., Das neue phys. Inst. d. Univers. Erlangen. Leipzig, Barth. 6 Mk.

Benndorf, H., Weiterführung der Annäherungsrechnung in der Maxwellschen Gastheorie. Wien, Gerolds Sohn. 50 Pf.

Boltzmann, L., Über die Berechung der Abweichungen der Gase vom Boyle-Charlesschen Gesetz u. d. Dissociation derselb. Wien, Gerolds Sohn. 30 Pf.

Deetz, Alfr., Die höchste u. niedrig. Temperatur. Berlin, Friedrichshagen. 10 Pf.

Klemenčič, Ign., Üb. perm. Magnete a. steir. Wolframstahl. Wien, Gerolds S. 30 Pf.

Koláček, Frz., Üb. Berechn. d. Induktionskoeffiz. lang. Spulen. Prag, Řivnáč. 72 Pf.

Mützel, K., Über Röntgen-Strahlen. Breslau, Preuss & Jünger. 60 Pf.

Wulf, Thdr., Über Rückstandsbildung und Oscillationen bei verschiedenen Kondensatoren. Wien, Gerolds Sohn. 80 Pf.

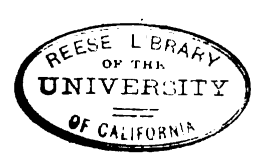
Busch, Fr., 100 einfache Versuche zur Ableitung elektrischer Grundgesetze. Münster, Aschendorff. 75. Pf.

Trabert, W., Meteorologie (Sammlung Göschen). Leipzig, Göschen. 80 Pf.

Hauke, Alfr., Über d. Refractionsäquiv. d. Elemente. Wien, Gerolds S. 80 Pf.

Schweiger-Lerchenfeld, A. v., Das Buch der Experimente. Physikalische Apparate und Versuche. Wien, Hartleben. geb. 6 Mk.

Fig. 12.



# Historisch-litterarische Abteilung.

## Rezensionen.

**Ein altbabylonischer Felderplan** nach Mitteilungen von F. V. Scheil herausgegeben und bearbeitet von Dr. August Eisenlohr, Professor an der Universität Heidelberg. Leipzig 1896. J. C. Hinrichssche Buchhandlung. 16 S.

Wir erfüllen eine angenehme Pflicht, indem wir unsere Leser auf einen hochbedeutsamen Fund aufmerksam machen, der für die Geschichte der babylonischen Feldmessung grundlegend zu werden verspricht. Es handelt sich um einen Felderplan mit beigeschriebenen Maßzahlen, der spätestens um 2400 v. Chr. angefertigt wurde. Herr August Eisenlohr, der seiner Zeit durch die vortreffliche Übersetzung des Rechenbuches des Ahmes den Zugang zur altägyptischen Mathematik eröffnete, hat jetzt mit Erfolg sich bemüht, einen entsprechenden Einblick in die babylonischen Methoden zu gewinnen, welche mindestens 700 Jahre vor Ahmes in Übung waren. Das letzte Wort scheint uns, scheint auch unserem gelehrten Freunde Herrn Eisenlohr noch nicht gesprochen zu sein, aber folgende drei Thatsachen dürften heute schon als gewiss betrachtet werden können:

1. Die Babylonier waren bessere Rechner als Zeichner, denn der Plan stimmt nur nach wesentlichen Veränderungen mit den beigeschriebenen, unmittelbarer Messung entnommenen Zahlen.
2. Mit der Aufnahme waren zwei Feldmesser betraut, deren Namen genannt sind; der eine begann die Messung oben und maß nach unten, der andere begann unten und maß nach oben, sodass den Einzelfiguren, in welche der Plan zerfällt, zweierlei voneinander abweichende Flächenangaben entsprechen, zwischen denen ein dritter Beamter, eine Art von Oberbehörde, einen Mittelwert nach Art des arithmetischen Mittels als endgiltige Flächenangabe bestimmte.
3. Wie die beiden Feldmesser im engeren Sinne zu ihren Zahlen kamen, steht noch nicht ganz fest. Höchst wahrscheinlich betrachteten sie die Vierecke als Rechtecke, deren Höhe nach verglichenen Maßen der rechts und links von Feldmesser teils unmittelbar, teils mittelbar gewonnenen Längen angenommen wurde.

Cantor.

**Das Volk der Siebener-Zähler.** Rückschluss aus der Form der „arabischen Ziffern" auf ihre Herkunft von HERRMAN VON JACOBS. Berlin 1896. Verlag der v. Jacobsschen Buchhandlung. 45 S.

Die Vermutung, welche der Verfasser in den Titelworten andeutet, besteht darin, es hätten die Sumero-Accad, jenes turanische Volk, das mit einem besiegten semitischen Stamme sich mischend die Euphratländer bewohnte, ein Zahlensystem besessen, dessen Grundzahl die Sieben gewesen sei. Gestützt wird diese Vermutung darauf, dass die heilige Zahl 7 in den mannigfachsten Redewendungen vorkommt, welche nach Babylon zurückzudeuten scheinen, ferner auf das Vorkommen der Zahl 7 in der indischen Sage, wo Bhodisatva im Zahlenwettkampfe je ein grösseres Längenmaß aus 7 kleineren bestehen lässt, auf die Thatsache, dass ein Bündel von 7 runden Stäben sich tadellos zusammenbinden lässt, wenn 6 äussere Stäbe einen ihnen gleichen umgeben, auf die Möglichkeit Zeichen, welche den sechs ersten Gobarziffern ähneln, aus 1 bis 6 Strichen zusammenzusetzen. Dass die Sumero-Accad im Soss die höhere Einheit eines Sexagesimalsystems besassen, stört Herrn v. Jacobs nicht. Diese Zusammenfassung habe man neben dem Siebenersystem erfunden, weil 60 vielfach teilbar, 7 dagegen teilerlos war. Von seiner grundlegenden Vermutung aus sucht alsdann der Verfasser sowohl die Namen als die Zeichen der Zahlen über 7 als Zusammensetzungen zu erklären und noch mancherlei auf Maße und Gewichte bezügliche Dinge zu erörtern. Herr v. Jacobs ist weit entfernt davon, seine Meinung für bewiesen zu halten. Er bietet sie wesentlich den Altertumsforschern zur Prüfung mittels schon bekannter und künftig noch bekannt werdender Fundergebnisse an, und insoweit darf man die kleine Schrift interessant nennen. Ob freilich die Prüfung der hier vertretenen Meinung günstig ausfallen wird? Referent kann nicht recht daran glauben. Vor allem ist ihm ein Sexagesimalsystem, welches neben einem Siebenersystem aus Gründen zweckmässiger Teilung urplötzlich auftaucht, ganz undenkbar.

CANTOR.

---

**Das Quadrivium aus Severus Bar Šakkû's Buch der Dialoge.** Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der philosophischen Fakultät der Universität Heidelberg, vorgelegt von JULIUS RUSKA aus Bühl. Leipzig 1896. Druck von W. Drugulin. 79 S.

Severus Bar Šakkû, ein im Jahre 1241 verstorbener Syrer, verfasste ein encyklopädisches Werk unter dem Titel des Buches der Dialoge, welcher über die gewählte Gesprächsform Auskunft giebt. Herr Ruska hat vorläufig einen Teil dieses Werkes in syrischer Sprache zum Abdruck gebracht und hat eine von zahlreichen Anmerkungen begleitete deutsche Übersetzung beigefügt. Er tritt damit in die Reihe der sehr wenig zahlreichen Gelehrten, welche mathematisches Wissen mit der Kenntnis morgenländischer Sprachen vereinigen, und welche dadurch das Recht, wenn nicht die Pflicht erworben haben, orientalische Handschriften zu durchstöbern und einem weiteren

Leserkreise bekannt zu geben, was dort an wertvollem Stoffe sich vorfindet. Nicht als ob wir durch diese Äusserung den Severus als einen besonders schätzbaren Schriftsteller bezeichnen wollten. Er war gewiss ein sehr fleissiger Mann, er hat den Nikomachus und ähnliche Neupythagoräer, wenn auch wahrscheinlich nicht in griechischer Sprache, doch in syrischen oder arabischen Auszügen genau gelesen und aus dem Auszuge einen neuen Auszug gefertigt, der von besserem Verständnisse zeugt, als was etwa 300 Jahre früher die lauteren Brüder aus ähnlichen Quellen zusammenschrieben; aber eigene Gedanken von irgend welcher Tragweite muss man bei Severus nicht suchen. Dagegen ist gerade die Art seiner Schriftstellerei ein kennzeichnendes Beispiel für eine ganze Schule, und von diesem Gesichtspunkte aus wird Herrn Ruskas Arbeit gewiss als eine des Dankes werte erachtet werden müssen, welche auch verdient fortgesetzt zu werden.

CANTOR.

---

**Apollonius of Perga Treatise on conic sections** edited in modern notation with introductions including an essay on the earlier history of the subject by T. L. HEATH, M. A. sometime fellow of Trinity College, Cambridge. Cambridge: at the university press 1896. CLXX, 254 p.

Derselbe Verfasser hat 1885 ein Werk über Diophant herausgegeben, welches wir damals in der Berliner Philologischen Wochenschrift vom 26. September 1885 (V. Jahrgang Nr. 39 S. 1223—1225) einer Besprechung unterzogen. Bei allem Lobe, welches wir der gründlichen, mehrfach neue Gesichtspunkte eröffnenden Arbeit zu spenden hatten, mussten wir in Bezug auf die erörterten Methoden die Frage stellen: Liest Herr Heath diese Methoden wirklich heraus oder hinein? Wir mussten hinzufügen: Wir fürchten, man wird das letztere in mancher Beziehung behaupten müssen. Herr Heath hat bei Bearbeitung des Apollonius eine Anforderung selbst ausgesprochen, welche, wenn erfüllt, einen ähnlichen Vorwurf wie 1885 unmöglich macht. Die Bearbeitung, sagt er, soll Apollonius und nur Apollonius zum Gegenstand haben; nichts soll verändert werden, weder Inhalt noch Reihenfolge der Gedanken; nichts von irgend welcher Bedeutung soll weggelassen werden; Überschriften zu einzelnen Gruppen von Sätzen sollen den schriftstellerischen Plan des Apollonius deutlich hervortreten lassen. Im allgemeinen ist Herr Heath seinem Vorhaben treu geblieben. Allerdings kommen auch Stellen vor, z. B. S. 122—125, von welchen keine Silbe bei Apollonius oder bei seinem alten Kommentatoren zu finden ist. Herr Heath durfte streng genommen diese Seiten nicht zum Abdrucke bringen lassen, wenn er die Leser nicht irreführen wollte. An eine absichtliche Täuschung ist natürlich nicht zu denken, aber ein Widerspruch gegen die in der Vorrede gegebene Zusage ist trotz der Klammern, welche die lange Einschaltung einschliessen, vorhanden. Der Bearbeitung der Kegelschnitte des Apollonius geht eine längere geschichtliche Einleitung vorher, in welcher Herr Heath sich als überzeugten Schüler des bekannten Zeuthenschen Werkes über

Kegelschnitte erklärt. Wir haben allzuoft unsere entgegengesetzte Überzeugung ausgesprochen, als dass wir nötig hätten, es abermals zu thun. Die Heathsche Darstellung scheint uns einigermassen durchsichtiger als dessen Musterwerk, und uns wenigstens traten hier deutlicher als je zuvor die fast zahllosen unbewiesenen Behauptungen entgegen, auf welche der ganze Aufbau sich stützt. In diesem Sinne können wir Leser, welche noch keine feste Meinung sich gebildet haben, auf die Heathsche Einleitung hinweisen.

Cantor.

---

**Sereni Antinoensis Opuscula** edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg, Dr. phil., Prof. Hauniensis. Leipzig 1896. B. G. Teubner. XIX, 303 p.

*Σερήνου Ἀντινσέως φιλοσόφου περὶ κυλίνδρου τομῆς.* Diese Bezeichnung gehört der ältesten und besten Handschrift des Serenus, einem Vatikankodex aus dem XII.—XIII. Jahrhundert an. Der Heimatname ist offenbar unrichtig überliefert. Halley verbesserte ihn in *Ἀντισσέως*, und seitdem kennt die Geschichte der Mathematik einen Serenus von Antissa. Aber Herr Heiberg hat (Biblioth. math. 1894 p. 97) darauf aufmerksam gemacht, dass das Ethnicon von Antissa gar nicht *Ἀντισσεύς*, sondern *Ἀντισσαῖος* lautete, dass also Halleys Vermutung keinen Nutzen gewährt. Er selbst schlug daher *Ἀντινοέως* vor, Serenus von Antinoeia, das heisst aus jener ägyptischen Stadt, welche Kaiser Hadrian im Jahre 122 zu Ehren des jungverstorbenen Antinous gründete. Herr Heiberg hat in der neuen Ausgabe des Serenus, welche uns heute vorliegt, jene Namensform beibehalten, an welche man sich hinfort wird gewöhnen müssen. Für das Zeitalter des Serenus ist damit so viel gewonnen, dass er frühestens Zeitgenosse des Klaudius Ptolemaeus gewesen sein kann. Seine Sprache scheint aber noch etwa zwei Jahrhunderte tiefer herabzuweisen, und deshalb nimmt Herr Heiberg keinen Anstand der schon von Chasles gehegten Meinung sich anzuschliessen, Serenus habe im IV. Jahrhundert zwischen Pappus und Theon von Alexandria geblüht. Die neue Ausgabe gehört der Bibliotheca Teubneriana an und ist von Herrn Heiberg besorgt. Jeder Fachmann weiss, was er diesen beiden Angaben zu entnehmen hat: Einen sorgsamen Druck bei kritisch hergestelltem Texte.

Cantor.

---

**Sur l'origine du monde.** Théories cosmogoniques des anciens et des modernes, par H. Faye, de l'Institut. Paris 1896. Gauthier-Villars et fils. 313 p.

Das Werk „über die Entstehung der Welt“ besitzt einen doppelten Charakter, einen geschichtlichen und einen dogmatischen. Herr Faye erzählt, wie man zu den verschiedensten Zeiten die Entstehung der Welt sich dachte. Er krönt diese Erzählung durch die Darstellung seiner eigenen Lehre von diesem Entstehen. Wir fühlen uns nicht berufen, über den zweiten Teil des Buches ein Urteil abzugeben. Dazu bedürfte es der vielseitigsten Kenntnisse in Astronomie, kosmischer Physik, Thermochemie etc.,

über welche wir nicht verfügen, und selbst mit diesen Kenntnissen ist und bleibt vermutlich immer Hypothese, was man äussert. Erweitertes Wissen hat bisher häufig genug ältere Vermutungen als unmöglich beseitigt, ohne beweisen zu können, welche Vorgänge vor Millionen von Jahren vielleicht wirklich stattfanden. Der geschichtlichen Darstellung des Verfassers folgten wir mit dem grössten Interesse. Herr Faye hat dabei den Weg eingeschlagen, der zuverlässig der allein richtige ist. Er lässt die Schriftsteller selbst zu Wort kommen. In französischen Übersetzungen führt er die Schöpfungsgeschichte der Genesis vor, die wichtigsten Stellen aus Platos Timaeus, aus dem Himmel des Aristoteles, aus dem Traume Scipios von Cicero, aus Lucretius, aus Vergil, aus Ovid. Er springt dann über zu Descartes, zu Newton, zu Kant, zu Laplace, mit welchem seine Ausführungen abschliessen. Herr Faye knüpft an alle Äusserungen seine kritischen Bemerkungen, wie es das Recht des Geschichtsschreibers ist, aber nirgend lässt er verkennen, was Bericht, was bestätigende oder widerlegende eigene Meinung ist. Ein Gedanke wird schon bei Gelegenheit der biblischen Erzählung ausgesprochen, der uns lebhaft fesselte: Der Gedanke, dass die Schöpfungsgeschichte jedes Religionsbuches stets als Spiegelbild der physikalischen und astronomischen Glaubensbekenntnisse der Zeit, in welcher das Buch entstand, aufzufassen ist. Der Religionslehrer knüpfte nur seine Glaubensvorschriften an schon bestehende Volksmeinungen. Herr Faye geht in seinen kritischen Zusätzen uns mehrfach zu weit. Wenn er an der Überlieferung, dass nach Meinung der Pythagoräer in der Mitte das Feuer sei, um welches Erde und Gegenerde sich bewegen, die Änderung vornimmt, das Feuer könne nur die Sonne, die Gegenerde nur der Mond sein, so scheint uns das Bestreben, den Pythagoräern ausschliesslich vernünftige Meinungen zuschreiben zu wollen, mehr freundlich als richtig. Wenn Newtons Nichte mitteilt, ihr Onkel habe Descartes Schriften misswertig bei Seite geworfen, um nicht auf jedes Blatt die Randbemerkung „unrichtig" schreiben zu müssen, so dürften Herrn Fayes Zweifel ungerechtfertigt sein, selbst zugegeben, dass Newton zu Anfang mehr Cartesianer war, als er später Wort haben wollte, als er seiner schönen Nichte erzählte, was sie nur von ihm haben konnte. Auch an dem Laplaceschen „Ich habe die Gotteshypothese nicht nötig gehabt" übt Herr Faye seine Kritik, in diesem Falle auf den Bericht Aragos über eine Äusserung von Laplace selbst sich stützend. Laplace habe nur gegen Newton polemisiert, welcher ein Eingreifen Gottes für notwendig erachtete, so oft an der grossen Weltmaschine, wenn wir so sagen dürfen, Etwas haperte, während Laplaces weiter vorgeschrittene Analyse ein solches Eingreifen nicht mehr brauchte, nachdem die Anfangsbewegung vorhanden war, welche er gleichfalls voraussetzte. Besonders rühmend dürfen wir die an manchen Stellen dichterisch schöne Sprache des Verfassers hervorheben. Möchten doch die Schriftsteller der sogenannten schönen Litteratur innerhalb und ausserhalb seiner Heimat an seinem Muster sich bilden.

Cantor.

**Über einige ältere Bearbeitungen des Buchhaltungs-Traktates von Luca Pacioli.** Ein Beitrag zur Geschichte der Buchhaltung von Carl Peter Kheil. Prag 1896. Boursik & Kohout, VI, 128 S.

Wir haben in unseren Vorlesungen der Geschichte der Mathematik II, 300 bis 301, Luca Paciuolo als denjenigen Schriftsteller bezeichnet, welcher zwar ohne allen Zweifel die doppelte Buchhaltung nicht erfand, aber zuerst ihre Lehre und Verbreitung sich angelegen sein liess. Wir freuen uns, dass Herr Kheil, ein Spezialist in der Buchhaltung, von der wir nur sehr nebensächliche Kenntnis besitzen, ebenfalls in Pacioli (über die Rechtschreibung wollen wir nicht streiten) den ersten Schriftsteller des Faches anerkennt und in überaus eingehender, durch seine an Seltenheiten reiche Bibliothek unterstützter Nachforschung zu ermitteln gewusst hat, wie die weitere Verbreitung stattfand. Jan Ympyn und Wolffgang Schweicker sen. sind vielleicht am lebhaftesten dabei beteiligt gewesen. Der erstere gab in Antwerpen 1543 eine vlämische und eine französische Anleitung zur Buchführung heraus, welche weiter ins Englische übersetzt wurde. Die Quelle war italienisch, und wenn auch nicht Paciuolos Werk, jedenfalls eine eng an dieses sich anlehnende Schrift eines unbekannten Verfassers, der vielleicht Juan Paulo di Bianchi aus Perugia hiess. Schweickers „Zwifach Buchhalten“ ist 1549 in Nürnberg gedruckt und ist unter nachweislicher Benutzung des „Quaderno doppio“ von 1534 bearbeitet, welches selbst von Domenico Manzoni, einem Nachahmer Paciuolos, herrührt. Unter den vielen beiläufigen Bemerkungen, durch welche Herr Kheil sein umfangreiches Wissen bewährt hat, nennen wir den Nachweis, dass der Kaufmann in Venedig, in dessen Hause Paciuolo längere Zeit lebte, nicht Ropiansi hiess, wie man seither druckte, sondern Rompiasi.

Cantor.

---

**Henricus Grammateus und sein Algorismus de integris** von Oberlehrer Christian Friedrich Müller. Beilage zum Jahresberichte des Gymnasiums zu Zwickau. Ostern 1896. 33 S. [1896. Programm Nr. 558].

Nachdem die Geschichte der Mathematik seit wenigen Jahrzehnten angefangen hat, Namen und Leistungen des Heinrich Schreiber aus Erfurt unverdienter Vergessenheit zu entreissen, hat Herr Müller noch weiteres Material über den tüchtigen Gelehrten beizuschaffen gewusst. Wir kennen durch Herrn Müllers Bemühungen jetzt das Todesjahr 1525 des Grammateus; wir wissen nun von einer lateinischen Schrift *Algorithmus proportionum* (Krakau 1514); wir erfahren, dass das deutsche Rechenbuch schon 1521 und zwar in Nürnberg gedruckt ist; wir lernen einen lateinischen 1523 in Erfurt geschriebenen *Algorismus de integris* in neuem Abdruck vollständig kennen. Herr Müller hat eine dankenswerte und erfolgreiche Arbeit angewandt, deren gesicherte Ergebnisse der Geschichte angehören. Der Algorismus de integris lehrt ungemein klar das Rechnen mit Einschluss der Regeldetri an ganzen Zahlen. Man findet in ihm auch (S. 33) unter dem

Namen *Regula generalis pro solutione quorundam exemplorum* die indische Umkehrungsrechnung, welche Leonardo von Pisa *Regula versa* [Cantor, Vorlesungen der Geschichte der Mathematik, II, 21] genannt hat.

CANTOR.

---

**Jakob Ziegler,** ein bayerischer Geograph und Mathematiker. Von SIEGMUND GÜNTHER [Sonderabdruck aus den „Forschungen zur Kultur- und Litteraturgeschichte Bayerns." Herausgegeben von Karl von Reinhardstöttner. Buch IV (1896)]. Ansbach und Leipzig 1896. Max Eichinger. 63 S.

Jakob Ziegler starb 1548 in Passau nahezu 80 Jahre alt. So berichtet eine handschriftliche Randbemerkung in dem der Münchner Bibliothek angehörenden Exemplare von Zieglers Beschreibung des Heiligen Landes. Ziegler war ein für seine Zeit sehr tüchtiger Kartenzeichner und wusste besonders im Norden Europas, auf der skandinavischen Halbinsel gut Bescheid. Soweit dabei astronomisches und mathematisches Wissen erforderlich war, mag man ihn auch einen Mathematiker nennen, eigene mathematische Leistungen sind nicht auf ihn zurückzuführen.

CANTOR.

---

**Bibliografia Galileiana** (1568—1895) raccolta ed illustrata da A. CARLI ed A. FAVARO. Roma 1896. Pubblicazione del Ministero della Pubblica Istruzione. VIII, 402 p.

Der von allen Freunden der Geschichte der mathematischen Wissenschaften stets betrauerte Fürst Boucompagni hatte Herrn Carli veranlasst, verschiedene Untersuchungen und Nachforschungen in der Florentiner Nationalbibliothek anzustellen. Dort entstand bei Herrn Carli der Gedanke, einen Katalog der auf Galilei bezüglichen Handschriften, einen anderen für die auf Galilei bezüglichen Druckschriften anzufertigen. Inzwischen begann unter Herrn Favaros Leitung der Druck der neuen Galilei-Ausgabe. Was der Gedanke eines Einzelnen gewesen war, wurde zu einem Bestandteile des auf Staatskosten ins Leben tretenden Unternehmens. Heute liegt die Bibliographie vollendet vor uns, der Handschriftenkatalog soll folgen. Der erste Eindruck, welchen der Band auf uns machte, war der des Schreckens, des Schreckens darüber, dass die Galileilitteratur bereits auf über 2100 Nummern angewachsen ist, des Schreckens über den Fleiss, den beide Herausgeber anwenden mussten, um eine solche Vollständigkeit zu erzielen! Niemand wird es künftig wagen dürfen, an Galilei-Forschungen heranzutreten, ohne vorher die Bibliographie zu Rate gezogen zu haben, wer etwa schon im gleichem Sinne gearbeitet habe. Es schadet nicht, wenn dadurch einer oder der andere zurückgeschreckt, das, was noch zu thun übrig ist, den berufenen Händen überlässt, welche gegenwärtig das fast erschöpfte Feld bebauen.

CANTOR.

**Über die Begründung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz** von Dr. Ernst Tischer, Oberlehrer am Nicolaigymnasium zu Leipzig. Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Nicolaigymnasiums zu Leipzig. 46 S. [1896. Programm Nr. 551.]

Wie kommt es, fragt Herr Tischer, dass hundert Jahre nach der Abhandlung von 1684, in welcher Leibniz die Differentialberechnung bekannt gemacht hat, eine Preisfrage der Berliner Akademie eine einwandfreie Begründung der Infinitesimalrechnung verlangte, dass L'Huilier mit einer Grenzmethode, welche dem Gedanken der Newtonschen ersten und letzten Verhältnisse nahe kommt, den Preis davontrug, dass wieder 13 Jahre später Lagrange das Unendlichkleine, die Grenzwerte und die Fluxionen ausdrücklich verwarf, und dass unsere heutige Wissenschaft wieder bald mit dem Unendlichkleinen, bald mit Grenzwerten operiert, wie es vor 200 Jahren der Fall war? Eine eigentliche Antwort auf die interessante Frage finden wir auch bei Herrn Tischer nicht, und wir persönlich wundern uns darüber nicht. So lange der Mensch das Gras nicht wachsen sieht, sondern das Gewachsensein allein erkennt, werden die erwähnten Skrupel stets von Zeit zu Zeit auftauchen, ohne eine Widerlegung finden zu können. Es ist eben, wie wir an einem anderen Orte einmal gesagt haben, die Begründung der Infinitesimalrechnung die alte zähe Speise, an der der Mensch viel tausend Jahre kaut, und noch kauen wird! Die Unerweislichkeit tritt und trat von jeher dadurch hervor, dass an irgend einer Stelle ein Axiom eingeführt wurde. Herr Tischer hat die Aufgabe seiner hochinteressanten Programmabhandlung dahin gestellt, dass er zunächst den infinitesimalen Charakter des antiken Exhaustionsverfahrens, wie es bei Euklid und reicher entwickelt bei Archimed sich benutzt findet, enthüllte, eine geistvolle nachträgliche Zusammenstellung, sofern man sie nur als solche betrachtet. Daran, dass Euklid, dass Archimed von der modernisierten Auffassung eine Ahnung gehabt hätten, ist natürlich nicht zu denken, und Herr Tischer mutet seinen Lesern eine solche Kraftprobe ihres Glaubens auch nicht zu. Dann überspringt er zwei Jahrtausende und gelangt zu Newtons Fluxionsrechnung, welche er darauf prüft, ob denn wirklich der strittige Gedanke des Unendlichkleinen in ihr vermieden sei, und eine eingehende Untersuchung der verschiedenen Schriften Newtons lässt erkennen, dass dem keineswegs so ist. Es war nur selbstverständlich, dass Herr Tischer seine Durchmusterung von Newtons Abhandlungen mit derjenigen verglich, welche Referent in dem ersten Abschnitte des III. Bandes seiner Vorlesungen über Geschichte der Mathematik angestellt hatte. Er erkannte dabei einige Unrichtigkeiten, die wir uns zu Schulden kommen liessen, und fand nachträglich, dass Herr Zeuthen in einem der Kopenhagener Akademie am 3. Mai 1895 eingereichten Aufsatze *Sur quelques critiques faites de nos jours à Newton* dieselben Vorwürfe gegen uns gerichtet hatte. Wir waren durch Herrn Zeuthens Darstellung bereits überzeugt, dass ein Vertrauen, welches wir sonst nie üben, Herr Weissenborn werde von ihm als unrichtig gerügte Beispiele buchstäblich aus Newton entnommen haben, uns irre geführt hat. Wir wollen

diese einmal begangene Flüchtigkeit keineswegs entschuldigen und wären in der Vorrede, von welcher der dritte und letzte Abschnitt des Bandes begleitet sein wird, darauf, sowie auf andere Mängel, auf die wir inzwischen teils von selbst, teils durch freundlichen Hinweis von Fachgenossen aufmerksam wurden, jedenfalls zurückgekommen. Da indessen jener dritte Abschnitt, wenn auch fortwährend in Arbeit, noch bei weitem nicht druckfertig ist, so benutzen wir gern die Gelegenheit, welche das Referat über das Tischersche Programm uns liefert, heute schon den Irrtum einzugestehen. Wir lieben es nicht, irgend jemand Unrecht zu thun, und am allerwenigsten einem Newton. Wir täuschten uns, als wir S. 179 unseres III. Bandes angaben, Newton sei im Besitze eines Falles gewesen, in welchem das sogenannte binomische Integral in geschlossener Form gefunden werden könne. Er kannte, wie aus einem anderen Beispiele in demselben Briefe vom 24. Oktober 1676, dem wir unsere Behauptung entnahmen, hervorgeht, auch den zweiten Hauptfall. Wir täuschten uns auch, als wir S. 165 annahmen (wir haben erklärt, auf welche Veranlassung hin), Newton habe den Fehler begangen, von $x^3\dot{x} - 3x^2y\dot{x} + xy^2\dot{y} - y^3\dot{y} = 0$ auf

$$\frac{x^4}{4} - x^3y + \frac{xy^3}{3} - \frac{y^4}{4} = 0$$

zu schliessen; jenes Beispiel gehört Newton gar nicht an. Die Substitution von $b - x$ statt $x$ betreffend, welche Newton Opusc. I, 70 für gestattet erklärt, so geben wir zu, dass an eine Koordinatenverlegung gedacht werden kann, beziehungsweise an Benutzung einer Integrationskonstante. Newton sagt aber nicht, dass alsdann auch $\dot{x}$ in $-\dot{x}$ verwandelt werden müsse, und dadurch erscheint die Stelle I, 70 willkürlicher als die I, 68, von welcher Herr Tischer spricht. Endlich die Gleichungen mit mehr als zwei Veränderlichen (Newton Opusc. I, 83) müssen wohl als totale, nicht als partielle Differentialgleichung aufgefasst werden. Alsdann ist das Verfahren, eine hypothetische Gleichung zwischen $x$ und $y$ anzusetzen, geeignet, zur Integration zu führen; berechtigt aber ist es damit noch keineswegs. Das sind, wie gesagt, Zusätze zu unserem III. Bande, zu deren Veröffentlichung Herrn Tischers Abhandlung uns die Gelegenheit bot. Dass seine Abhandlung selbst eine hochinteressante ist, haben wir oben bereits hervorgehoben, und wir wiederholen es am Schlusse, um dem Programme zahlreiche Leser zu verschaffen.

Cantor.

---

**Le mathématicien Franc-Comtois François Joseph Servois** ancien conservateur du musée d'artillerie d'après des documents inédits 1767—1847. Par Jacques Boyer, professeur de sciences mathématiques et physiques à Paris. Besançon 1895. Imprimerie et lithographie Dodivers. 26 p. [Extrait des Mémoires de la Société d'Emulation du Doubs.]

In kurzen Zügen ist das Leben von Servois geschildert, das Leben eines Offiziers, der an den Feldzügen der Republik teilnahm, das Leben eines Lehrers, dem der mathematische Unterricht an verschiedenen militärischen Anstalten anvertraut war. Herr Boyer hat das Material zu seiner

Darstellung vielfach den Akten des französischen Kriegsministeriums entnommen. Unter den Angaben über die wissenschaftlichen Veröffentlichungen von Servois vermissen wir einen Aufsatz im I. Bande (p. 337) der von Gergonne herausgegebenen Annales de mathématiques. Dort hat Servois das Wort *Pol* in die Geometrie der Kegelschnitte eingeführt, während Gergonne im III. Bande (p. 297) derselben Zeitschrift diesem Worte das andere *Polare* nachbildete.

CANTOR.

**Kepler und Galilei** von SIEGMUND GÜNTHER, Professor an der technischen Hochschule in München. Berlin 1896. Ernst Hofmann & Co. 233 S. [22. Band der Geisteshelden herausgegeben von Anton Bettelheim.]

Die „Geisteshelden" gehören zu den Werken, welche die Wissenschaft in das Volk hinzustragen sollen. Sie sollen deshalb nicht zu schwer geschrieben sein; sie sollen so viel als möglich den Leser fesseln; sie sollen den in der Wissenschaft heimischen Kenner zum Mindesten nicht durch fehlerhafte Angaben entrüsten. Es war für den Herausgeber keineswegs leicht, Schriftsteller zu finden, welche zu solchen Darstellungen das nötige Können mit dem nötigeren Wissen vereinigten. Dass er mit der Wahl S. Günthers einen glücklichen Griff gethan haben werde, davon waren wir überzeugt noch bevor wir das Bändchen aufschnitten, und das Lesen hat unser günstiges Vorurteil bestätigt. Sein umfassendes geschichtliches Wissen, seine insbesondere reiche Quellenkenntnis zum Nachschlagen von Dingen, die allenfalls seinem kaum je ungetreuen Gedächtnisse entschlüpft sein sollten, seine Leichtigkeit in Auffindung des richtigen Wortes zur Äusserung seiner Gedanken eignen ihn vorzugsweise zu solchen Darstellungen wie die der Lebensschicksale von Kepler und von Galilei. Eine wesentliche Klippe, welche vermieden werden musste, war die einer etwas behäbigen Breite, welcher man leicht zu nahe kommt, wenn der Gegenstand einen fortreisst. Die vom Herausgeber geforderte, von Herrn Günther eingehaltene Raumgrenze, innerhalb deren wir doch nichts Wesentliches vermissen, zeugt dafür, wie sehr er sich zu beschränken wusste. Wir zweifeln nicht, dass das Bändchen bald zu den beliebteren der Sammlung gehören wird.

CANTOR.

---

**Franz Neumann** (11. September 1798 bis 23. Mai 1895). Ein Beitrag zur Geschichte deutscher Wissenschaft. Dem Andenken an den Altmeister der mathematischen Physik gewidmete Blätter, unter Benutzung einer Reihe von authentischen Quellen gesammelt und herausgegeben von P. VOLKMANN, ordentlicher Professor an der Universität Königsberg i. Pr. Mit einem Bildnis Franz Neumanns. Leipzig 1896. B. G. Teubner. VII, 68 S.

Herr Volkmann hat zweimal Veranlassung gehabt, Gedächtnisreden auf Franz Neumann zu halten. Er sprach im Sterbehaus bei der am 27. Mai stattfindenden Beerdigung, er sprach bei der einen Monat nach dem Tode

am 23. Juni ausnahmsweise veranstalteten Gedächtnisfeier in der akademischen Aula. Die erste Rede war, wenn wir so unterscheiden dürfen, persönlichen, die zweite sachlichen Inhaltes, die erste für Zuhörer aus dem Laienstande, die zweite für solche Gelehrte, welche in Neumanns wissenschaftlichen Arbeiten so heimisch sind, dass eine blosse Nennung der Stichwörter genügte, den Inhalt ins Gedächtnis zurückzurufen. Beide Reden ergänzen einander, und Herr Volkmann hat gewiss Recht daran gethan, der zweiten, welche Fachgenossen hauptsächlich zu fesseln im stande ist, die erste als Einleitung vorauszuschicken. Zwischen beiden Reden sind persönliche Erinnerungen eingeschaltet, welche von dem ältesten Sohne und von der Tochter des Verstorbenen herrühren. Der zweiten Rede folgen wissenschaftliche Anmerkungen, welchen wir eine etwas grössere Ausdehnung gewünscht hätten. Wenn z. B. in der Rede von Prinzipien gesprochen wird, welche von Franz Neumann herrühren, so durfte dort der Wortlaut jener Sätze fehlen, in den Anmerkungen vermisst man aber ungern die mathematische Formulierung. Das Verzeichnis der von Neumann gehaltenen Vorlesungen mit der jedesmaligen Zuhörerzahl, Angaben über solche Schüler Neumanns, welche durch ihre wissenschaftlichen Leistungen bekannt geworden sind, Bemerkungen über das mathematisch-physikalische Seminar in Königsberg sind ebensoviele dankenswerte Beigaben. CANTOR.

---

**Ludwig Schläfli** (1814—1895). Zum Andenken an die Errichtung des Grabmonumentes Schläflis und an die Beisetzung der sterblichen Reste Jacob Steiners, anlässlich der 100jährigen Feier des Geburtstages des letzteren am 18. März 1896. Von Dr. phil. J. H. GRAF, ordentlicher Professor der Mathematik an der Hochschule Bern. Mit dem Porträt und dem Faksimile Schläflis. Bern 1896. K. J. Wyss. 86 S. [Separatabdruck aus den Mitteilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern.]

Im Herbst 1843 begaben sich Dirichlet, Jacobi und Steiner nach Rom. Keiner war des Italienischen mächtig. Da schlug Steiner vor, einen Dolmetscher mitzunehmen und empfahl dazu einen Bekannten in Bern, für die Welt ein Esel, aber Sprachen lerne er wie ein Kinderspiel. Er meinte Ludwig Schläfli, und seine Ausdrucksweise, wie sie kennzeichnend für Steiner ist, zeigt uns auch das Bild des damals 29jährigen, etwas linkischen, unter dem Drucke äusserer Verhältnisse zurückhaltenden, nach verschiedenen Richtungen hochbegabten Schläfli, dasselbe Bild, welches Herr Graf mit dem Pinsel des Freundes hinzumalen verstanden hat. Der hervorragende Gelehrte, der anregende Lehrer trägt auch hier die Züge der Unbeholfenheit oder mindestens allzugrosser Schüchternheit. Ihr ist es wohl zuzuschreiben, dass, während 70 mathematische Veröffentlichungen namhaft gemacht werden konnten, überdies noch 303 fertige Manuskripte in Schläflis Nachlasse aufgefunden wurden, von welchen nur etwa 20 schon gedruckt worden zu sein scheinen. Unsere Zeit liebt es, Gesamtausgaben von

Werken hervorragender Mathematiker zu veranstalten. Der Umfang des noch ungedruckten Nachlasses mahnt die Erben seiner Manuskripte doppelt daran, auch Schläflis Schriften zu einem Sammelbande zu vereinigen.

CANTOR.

**Notice sur les travaux mathématiques de Eugène-Charles Catalan** par P. MANSION, Professeur à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique. Bruxelles 1896. F. Hayez. 62 p.

Es war im Sommer 1856. Referent befand sich in Paris. Einen Abzug der im I. Bande dieser Zeitschrift abgedruckten Abhandlung über die Einführung unserer gegenwärtigen Ziffern in Europa hatte er dem Altmeister geschichtlicher Forschung, dem trefflichen Michel Chasles überreicht, und war von dem durch Herzensgüte nicht minder als durch Gelehrsamkeit sich auszeichnenden Manne aufs wohlwollendste empfangen worden. Chasles war am sichersten in den Sitzungen der Akademie zu treffen, und das gab uns die Veranlassung, jene Sitzungen regelmässig zu besuchen. Einmal war auf den besonders dünn besetzten Bänken des Zuhörerraums ein Herr unser Nachbar, mit welchem wir in ein Gespräch kamen, und mit welchem zusammen wir die Akademie verliessen, noch lange Strassen hindurch plaudernd und Eindrücke austauschend. Jener Herr war Eugène Catalan. Im Jahre 1880 gereichte es uns zur grossen Freude, dass Catalan, mit dem wir damals einige Briefe wechselten, sich der 24 Jahre früher stattgehabten Begegnung mit einem zu jener Zeit vollständig unbekannten jungen Manne freundlich erinnerte. Das sind die persönlichen Beziehungen, deren Erwähnung man uns zu gut halten mag, weil sie zur Kennzeichnung von Catalans wunderbar treuem Gedächtnisse dienen, welche uns die Notiz, über die wir berichten, noch besonders interessant machten. Aber auch ohne solche Nebengründe wird der Leser sicherlich mit Vergnügen von Herrn Mansions Ausführungen Kenntnis nehmen, welche dazu dienen sollen, Catalan den ihm gebührenden Platz in der Geschichte der Mathematik anzuweisen. Die Lehre von den halbregelmässigen Vielflächnern, die Lehre von den Reihen, von den vielfachen Integralen, von den Kugelfunktionen sind es vorzüglich, welche er mit neuen Thatsachen bereichert hat, während zahlreiche Handbücher von ihm vermutlich noch geraume Zeit in den Händen französischer und belgischer Kandidaten des mathematischen Lehramtes sich nützlich erweisen werden.

CANTOR.

**Annuaire du Bureau des Longitudes** avec des Notices scientifiques. Paris 1896. Gauthier Villars et fils.

Die sechs Abhandlungen des Bandes von 1896 führen folgende Titel: Fernkräfte und Wellenbewegung von A. Cornu. Fresnels optische Arbeiten von A. Cornu. Die Anfertigung neuer magnetischer Karten von De Bernardières. Das Mont Blanc-Observatorium von J. Janssen. Leben und Arbeiten des Contre-Admiral Fleuriais von De Bernardières. Reden beim

Leichenbegängnisse von Emil Brunner von J. Janssen und F. Tisserand. Von allgemeinstem Interesse sind die beiden ersten Abhandlungen, welche innerlich zusammengehören, wie sie auch von dem gleichen Verfasser herrühren. Steht doch Fresnels Name in glänzenden Buchstaben unter den Gelehrten, welche dem Begriffe der Fernwirkung ein Ende zu machen sich bestrebten, und hat doch erst seine Sicherung transversaler Lichtschwingungen die Grundlage einer mathematischen Optik wirklich geschaffen.. Ob deswegen die longitudinalen Lichtschwingungen, an welche Huygens, an welche Euler dachte, ganz aus der Wissenschaft verschwunden sind? Ob die Kathodenstrahlen sie wieder aufleben lassen? Diese Frage ist allzu neu, als dass Herr Cornu sie auch nur aufgeworfen hätte. CANTOR.

---

A. NEPPI MODONA e T. VANNINI, **Questioni e formole di geometria analitica** (ad una e due dimensioni). Palermo 1896. Alberto Reber. II, 319 p.

Die Aufgaben, welche die beiden Herren Verfasser gesammelt haben, entstammen verschiedenen meistens französischen, auch einigen italienischen und englischen Quellenschriften. Die deutsche Litteratur des Faches ist unbenutzt geblieben. Jedem Kapitel sind die wichtigsten Formeln der analytischen Geometrie der Geraden und der ebenen Kurven zweiten Grades, welche in ihm zur Anwendung kommen, vorausgeschickt. Ihre Beweise sollen nach dem Plane der Verfasser aus den Vorlesungen des ersten Universitätsjahres bekannt sein. Die eigentlichen Aufgaben sind aber alsdann bald ausführlicher bald in gedrängter Kürze zur Auflösung gebracht. Man kann keinenfalls sagen, dass die Verfasser es ihren Lesern allzuleicht gemacht und ihnen eigenes Nachdenken erspart hätten. Ein deutscher Student im dritten Semester dürfte wenigstens nicht ohne einige Anstrengung das Buch durchzuarbeiten unternehmen, trotzdem Differentialrechnung nirgend vorausgesetzt ist. Wir meinen damit keinen Tadel gegen das Buch auszusprechen, sondern wollen nur feststellen, worauf der Leser sich gefasst zu machen hat. Fortwährend sind in gemischter Anwendung die verschiedensten Koordinatensysteme in Gebrauch, bald Punktkoordinaten, bald Linienkoordinaten, bald projektive Koordinaten, bald Dreieckskoordinaten etc. Anwendung von Determinanten ist gleichfalls von den ersten Seiten an als selbstverständlich betrachtet. Wer das Buch mit der Feder in der Hand durchzuarbeiten die Zeit hat, wird sicherlich grossen Nutzen daraus ziehen.

CANTOR.

---

**Cours de géometrie analytique** à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales et des candidats aux écoles du Gouvernement par B. NIEVENGLOWSKI. Tome III. **Géométrie dans l'espace** avec une note sur les transformations en géométrie par ÉMILE BOREL, maître de conférences à la faculté des sciences de Lille. Paris 1896. Gauthier-Villars et fils. 572 p.

Die beiden ersten von Herrn Niewenglowski selbst verfassten Bände, die analytische Geometrie der Ebene enthaltend, sind unseren Lesern bereits

Band 41, Hist.-litt. Abtlg. S. 26—28, bestens empfohlen. Der der analytischen Geometrie des Raumes gewidmete III. Band ist von Herrn Borel bearbeitet, und wir können nur erklären, dass die Fortsetzung sich den früheren Bänden würdig anschliesst, dass sie auch deren Schreibweise sich zum Muster genommen und so glücklich nachgeahmt hat, dass ohne die Namensangaben auf dem Titelblatte niemand auf den Gedanken käme, Schriften verschiedener Verfasser vor sich zu haben. Etwas schwieriger als die beiden ersten Bände ist der dritte Band immerhin, das liegt in dem Wesen seines allgemeinsten Gegenstandes, aber dem Standpunkte der Leser, als welche junge Leute gedacht sind, die zur Eintrittsprüfung in die höheren Unterrichtsanstalten wie *École polytechnique* und *École normale* sich vorbereiten, ist doch Rechnung getragen, und man darf weder hoffen noch fürchten, einer Vollständigkeit raumgeometrischer Thatsachen oder Methoden zu begegnen, wie sie beispielsweise von Salmon oder von Darboux angestrebt wurde. Herr Borel hält sich, ohne die Hilfe der Infinitesimalrechnung zu verschmähen, in elementareren Schranken, die ihn auch von Joachimsthal-Natani unterscheiden, den er in einfacheren Dingen bedeutend an Materialfülle übertrifft. Die Ebene und die Oberflächen zweiter Ordnung, letztere sowohl allgemein als in ihren einzelnen Abarten, sind mit besonderer Ausführlichkeit behandelt. Ein Anhang (S. 481—558) führt den Leser in die Lehre von den Transformationsgruppen ein. Herr Borel steht hier, wie er selbst erklärt, wesentlich unter dem Einflusse Lieschers Arbeiten, zu deren Studium er nur vorbereiten und anleiten wolle. Cantor.

---

Gino Loria, **Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche.** Seconda edizione accresciuta ed interamente rifatta. Torino 1896. Carlo Clausen. XX, 346 p.

Im Jahre 1887 erschien die erste Auflage eines anspruchslos auftretenden, aber viele Ansprüche befriedigenden Werkchens, welches wir im 33. Bande dieser Zeitschrift, Hist.-litt. Abtlg. S. 194—195, unseren Lesern warm empfehlen durften. Eine mit Zusätzen des Verfassers selbst bereicherte deutsche Übersetzung folgte 1888 (vergl. Band. 34, Hist.-litt. Abtlg. S. 105). Heute haben wir das Vergnügen, eine zweite durchaus neue Bearbeitung in italienischer Sprache anzuzeigen, welche viel eher ein neues Werk, als eine neue Auflage darstellt. Der Zweck des Buches ist freilich derselbe geblieben. Herr Gino Loria will seine Leser in den Stand setzen, nicht bloss die Fragen kennen zu lernen, welche sich den Geometern im Laufe der Jahrhunderte darboten, welche insbesondere seit etwa einem Jahrhunderte sich in ungeahnter Weise vermehrten, sondern auch die zahlreichen Versuche, jene Fragen zu beantworten. Kein Reisehandbuch nach Art der Führer will das Werk sein (p. 41, Note), eher ein Fahrplan! Aber, wenn wir bei dem Bilde des Verfassers bleiben sollen, wie viele Zwischenstationen sind seit 1887 neu hinzugekommen, teils wirklich neu entstandene, teils solche, auf welche die Aufmerksamkeit in höherem Grade als früher ge-

lenkt wird! Die Brauchbarkeit eines solchen Werkes ist eine doppelte. Der Leser kann einen Überblick über das Entstehen und Wachsen der geometrischen Methoden gewinnen wollen, er kann wünschen für eine einzelne Frage, welche ihm wichtig ist, Litteraturnachweise zu erhalten. Letzterer Zweck erfordert ein genaues Inhaltsverzeichnis, und ein solches vermissen wir noch. Ein Namensverzeichnis, welches wir für vollständig zu halten allen Grund haben, ist vorhanden, auch eine nach Kapiteln und deren Abschnitten geordnete Angabe der allgemeinsten in ihnen behandelten Gegenstände, aber kein alphabetisches Wortverzeichnis. Wir wissen ganz genau, wie schwierig die Herstellung eines solchen ist, aber wir wissen auch, dass Herr Loria nicht der Mann ist, der vor einer Schwierigkeit zurückschreckt oder zurückzuschrecken braucht. Es hat allen Anschein, dass auch die neue Auflage sich nicht als die letzte erweisen werde; möge Herr Loria schon heute Hand anlegen, unseren Wunsch in der nächsten Auflage befriedigen zu können.

CANTOR.

**Vorlesungen über die Algebra der Logik** (exakte Logik). Von E. SCHRÖDER. Dritter Band: Algebra und Logik der Relative. Erste Abteilung. Leipzig 1895. VIII und 649.*

Wenn man eine Reihe von natürlichen Zahlen paarweise zusammenstellt und untersucht, ob in einem Paare $ij$ die Zahl $i$ ein Teiler von $j$ ist, so kann man sich von diesem Verhalten eine Übersicht verschaffen, indem man in einem Quadrat die Zeilen und Reihen mit den Zahlen bezeichnet und in den Schnittpunkt der Zeile $i$ mit der Reihe $j$ eine Eins oder eine Null setzt, je nachdem $j$ durch $i$ teilbar ist oder nicht. So entsteht eine „Matrix", von der ein Teil so aussieht:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Diese Matrix nennt Charles S. Peirce, der Schöpfer der in Schröders Buch dargestellten Theorie, ein Relativ. Allgemein kann man sagen: Wenn ein Denkbereich aus einer endlichen Zahl von Elementen besteht, $i$ und $j$

* Eine Anzeige des ersten Bandes siehe diese Zeitschrift Band 36 Seite 161. Vom zweiten Bande des vorliegenden Werkes ist bis jetzt nur die erste Abteilung erschienen. Wir verschieben daher dessen Anzeige bis er ganz vorliegt.

irgend zwei sind, so vergleicht man sie hinsichtlich einer bestimmten Eigenschaft und bildet dann, nach Analogie des Obigen, eine Matrix, indem man in die Zelle, deren Reihe dem Individuum $j$ und deren Zeile dem $i$ entspricht, Eins oder Null einträgt, je nachdem das Paar $ij$ die betreffende Eigenschaft hat oder nicht. Die so entstehende Matrix ist das zur fraglichen Eigenschaft gehörende Relativ.

Aus einem Relativ $a$ lassen sich andere ableiten. Verfasser bezeichnet mit $\bar{a}$ und nennt das Negat von $a$ das Relativ, welches aus $a$ entsteht, indem man in der Matrix alle Einer durch Nullen und umgekehrt ersetzt; mit $\breve{a}$, dem Konversen von $a$, wird das Relativ bezeichnet, welches aus der Matrix von $a$ durch Transposition, das heisst durch Umstürzen um die Hauptdiagonale hervorgeht.

Zwei Relative $a$ und $b$ werden nach Rechengesetzen kombiniert, von denen zwei $a + b$ und $ab$ vom Verfasser als identische Addition und Multiplikation bezeichnet werden. Die entsprechenden Elemente beider Matrices werden bei jener addiert, bei dieser multipliziert, aber nach den Gesetzen, die für die logische Addition und Multiplikation in dem sogenannten identischen Kalkül gelten, wie er von Schröder im ersten Bande seines Werkes gelehrt worden ist. Bezeichnet man die Elemente der Matrix so, wie es bei Determinanten üblich ist, so ist $a_{ij} + b_{ij}$ bezw. $a_{ij} b_{ij}$ das Element von $a + b$ und $ab$.

Neben diesen Operationen stehen die relativen Operationen, nämlich die relative Addition $a \dagger b$, ausgesprochen „$a$ piu $b$", und die relative Multiplikation $a; b$, gelesen „$a$ von $b$". Diese Knüpfungen werden gebildet, indem man, ähnlich wie bei der Multiplikation der Determinanten, die Zeilen des einen Relativs mit den Reihen des andern kombiniert. Bei $a \dagger b$ ist das Element gegeben durch

$$\prod_h (a_{ih} + b_{hj}) \text{ und bei } a; b \text{ durch } \sum_h a_{ih} b_{hj},$$

wo diese Produkte und Summen nach den Regeln des identischen Kalküls auszuwerten sind.

Vier besondere Relative werden durch einfache Zeichen ausgezeichnet. Hat ein Relativ alle Elemente Null, so wird es mit 0, hat es alle Elemente Eins, mit 1 bezeichnet. Mit $0'$ soll es bezeichnet werden, wenn nur die Diagonale Nullen trägt, alle anderen Elemente aber Eins sind; und $1'$ ist das Zeichen des Relativs, in dem die Diagonalelemente die einzigen sind, die Einer tragen. Diese vier Relative heissen Moduln.

Einige dieser Rechnungsregeln haben grosse Ähnlichkeit mit den Regeln, die Cayley und Frobenius bei ihren Rechnungen mit Matrices anwenden. Das Schrödersche $1'$ ist das Frobeniussche $E$, Schröders $\breve{a}$ ist dort $a'$, $a + b$ hat bei beiden dieselbe Bedeutung, $a; b$ wird von Frobenius mit $ab$ bezeichnet. Die anderen Operationen kommen bei Frobenius nicht vor, bei dem die Matrices natürlich auch andere Zahlen als 0 und 1 tragen, deren Kombinationen auch nicht nach den Regeln des identischen Kalküls erfolgen.

Auch von der Subsumtion $a ⋹ b$ wird gesprochen, die durch die Subsumtionen $a_{ij} ⋹ b_{ij}$ definiert ist.

Die logische Bedeutung von $a;b$ ist die Zusammensetzung. Bezeichnet z. B. $a$ die Relation „$i$ Teiler von $j$“, $b$ die Relation „$i \equiv j \bmod 5$“, so giebt $a;b$ darüber Auskunft, ob $i$ Teiler einer Zahl ist, die $\equiv j \bmod 5$ ist.

Die Bildung eines Relatives braucht nicht auf einen Denkbereich mit einer endlichen Zahl von Individuen beschränkt zu werden. Man kann unendlich viele Individuen zulassen, einerlei ob sie abzählbar sind oder nicht, wenn man nur Mittel hat zu entscheiden, ob ein Paar $ij$ von Individuen die Bedingung erfüllt, welche die Bildung des Relatives beherrscht. Freilich hat man es dann mit Relativen zu thun, die sich nur durch ein Quadrat von unendlich vielen Zeilen oder gar nicht graphisch darstellen lassen. Aber auch mit solchen kann man die angegebenen Rechnungen ausführen. Dies ist von Wichtigkeit, weil, wie Schröder zeigt, der Anzahlbegriff sich auf Operationen mit Relativen gründen lässt, ohne dass man einen Zirkel begeht.

Der ausführlichen Untersuchung der Rechenoperationen ist nun das vorliegende Buch Schröders gewidmet, während die Verwendung in der Logik für die zweite Abteilung vorbehalten ist. Die identische Addition und Multiplikation gehorchen dem Kommutations-, dem Assoziations- und dem Distributionsgesetz, wie die Symbole beim identischen (Klassen-)Kalkül. Die relative Addition und Multiplikation sind zwar assoziativ, aber nicht kommutativ, und folgen den Regeln:

$$a;(b+c) = a;b + a;c, \qquad a \mathbin{ɟ} bc = (a \mathbin{ɟ} b)(a \mathbin{ɟ} c),$$
$$a;(b \mathbin{ɟ} c) ⋹ a;b \mathbin{ɟ} c, \qquad ab;c ⋹ a;b \cdot b:c.$$

Was die Klammern hierbei angeht, so bringt Schröder die Operationen in die Ordnung $+ \mathbin{ɟ} \cdot\, ;$ das heisst identische Addition, relative Addition, identische Multiplikation, relative Multiplikation, und stellt die Regel auf — wie für die gewöhnlichen Rechnungen in seinem Lehrbuche der Arithmetik und Algebra —, dass bei Deutung eines Ausdruckes immer die höhere Operation zuerst auszuführen ist; nur die identische Multiplikation ohne Malzeichen soll der relativen vorausgehen.

Es gelten auch die Beziehungen:

$$\overline{\overline{a}} = a, \qquad \overline{\breve{a}} = \breve{\overline{a}}, \qquad \breve{\breve{a}} = a,$$
$$\breve{(ab)} = \breve{a}\breve{b}, \quad \breve{(a+b)} = \breve{a} + \breve{b}, \quad \breve{(a;b)} = \breve{b};\breve{a}, \quad \breve{(a \mathbin{ɟ} b)} = \breve{b} \mathbin{ɟ} \breve{a},$$
$$\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}, \quad \overline{a+b} = \bar{a}\bar{b}, \quad \overline{a;b} = \bar{a} \mathbin{ɟ} \bar{b}, \quad \overline{a \mathbin{ɟ} b} = \bar{a};\bar{b};$$

und wenn $a ⋹ b$, ist $\breve{a} ⋹ \breve{b}$, $\bar{b} ⋹ \bar{a}$.

Ersetzt man in einer Gleichung oder einer Subsumtion zwischen Relativen alle unbestimmten Relative durch ihre konverse und konvertiert dann beide Seiten, so entsteht eine neue Formel, die zur ersten konjugiert heisst. Indem man ferner, in richtiger Weise, von beiden Formeln die Negationen nimmt, entstehen aus ihnen neue, sodass jede Formel im allgemeinen drei andere liefert.

Speziellerer Formeln giebt es natürlich sehr viele. So ist z. B.:

$$1 = a + \bar{a}, \quad a\bar{a} = 0,$$
$$1' ⋹ a + \breve{\bar{a}}, \quad a\breve{\bar{a}} ⋹ 0',$$
$$1' ⋹ a \dagger \breve{\bar{a}}, \quad a;\breve{\bar{a}} ⋹ 0',$$
$$0 = 0 \cdot a = 0;\ a = a;\ 0,$$
$$1 = 1 + a = 1 \dagger a = a \dagger 1,$$
$$a = a \cdot 1 = a + 0 = a;\ 1' = 1';\ a = a \dagger 0' = 0' \dagger a$$

und andere mehr.

Manche Sätze, wie z. B. $0';0' = 1$, gelten nur für Denkbereiche von mehr als zwei Individuen.

Unter den vielen von Peirce und dem Verfasser eingeführten Bezeichnungen wollen wir nur den Namen ausgezeichnete Relative erwähnen, die Schröder solchen Relativen wie $1;a;1$ oder $0 \dagger a \dagger 0$ gegeben hat, von denen das erste 1 ist für $a \neq 0$ und 0 für $a = 0$, während das zweite 0 ist für $a \neq 1$ und 1 für $a = 1$. Diese Relative, die schon von Peirce entdeckt wurden, können in manchen Problemen wie die diskontinuierlichen Faktoren der Mathematik verwendet werden.

Wie im identischen Kalkul lässt sich jede Subsumtion $a ⋹ b$ in die Form der Gleichung $a\bar{b} = 0$ bringen und jedes System von gleichzeitigen Gleichungen $a = 0,\ b = 0, \ldots$ durch eine Gleichung

$$a + b + c + \cdots = 0$$

ersetzen. Der relative Kalkül gestattet aber nicht nur das System der gleichzeitigen Ungleichungen $a \neq 0,\ b \neq 0 \ldots$ in der Gleichung:

$$1;a;1;b \cdots = 1$$

zu vereinigen, sondern auch die Bedingung, dass eine oder die andere der Gleichungen $a = 0,\ b = 0 \ldots$ oder der Ungleichungen $a \neq 0,\ b \neq 0 \ldots$ gelte, durch die Gleichung:

$$1;a;1;b;\cdots = 0$$

beziehungsweise die

$$1;(a + b + c + \cdots);1 = 1$$

auszudrücken. Es lassen sich somit alle Daten einer Aussage durch eine einzige Gleichung repräsentieren. Enthält eine solche Gleichung $F(x) = 0$ das unbestimmte Relativ $x$ und gilt sie nicht für jedes $x$, so bietet sich das Problem, sie nach $x$ aufzulösen. Dies gelingt in manchen Fällen ohne weiteres, in anderen ist die Möglichkeit der Lösung an eine Resultante $R = 0$ geknüpft, ohne deren Erfülltsein die Lösung nicht möglich ist. Es geht so neben jedem Auflösungsproblem eine Eliminationsaufgabe einher, die sich ganz allgemein lösen lässt, wenigstens in Formeln, deren Ausarbeitung freilich meistens nicht leicht ist. Jedenfalls kann man, wenn eine Wurzel $a$ bekannt ist, jede Wurzel, mit Hilfe der Unbestimmten $u$, durch

$$a\{1;Fu;1\} + u\{0 \dagger \overline{Fu} \dagger 0\}$$

darstellen, wobei für jedes $u = x$, welches der Gleichung genügt, der Ausdruck $= x$ wird. Die Auffindung einer Wurzel ist aber in den meisten

Fällen nicht leicht. Bei einer Subsumtion $x \mathrel{\underline{\in}} \varphi(x)$, die sich auch als Gleichung $y = x\varphi(x)$ schreiben lässt, findet Schröder die Auflösung mit Hilfe von unendlichen Operationen. Setzt man nämlich $x\varphi(x) = f(x)$ und iteriert diese Funktion, so ist der Grenzwert $f^{\infty}(u)$ eine Lösung der gegebenen Gleichung. Mindestens gilt dies für einen Denkbereich von endlich vielen Individuen, während bei einem unbegrenzten Denkbereich eigentümliche, nicht ganz überwundene, Schwierigkeiten auftreten, die an ähnliche in der Mathematik erinnern.

Es bietet sich oft die Aufgabe dar, ein Relativ mit den Moduln zu verknüpfen. Um diese Rechnungen zu erleichtern, teilt der Verfasser die Zeilen in fünf Kategorien ein, je nach der Zahl der Einer oder Nullen, die sie tragen. Man kann aus einem Relativ dann andere ableiten, indem man die Zeilen einer oder mehrerer Kategorien mit lauter Einern oder mit lauter Nullen besetzt, oder die Nullen und Einer in ihnen vertauscht. Durch diese „Zeilenabwandlung" entstehen aus einem Relativ $a$ 255 andere, die der Verfasser durch $a$, $\bar{a}$ und $\breve{a}$ ausdrückt. Durch eine zweckmässige Symbolik lassen sich diese Operationen, die man auch auf Reihen übertragen kann, leicht darstellen.

Im weiteren Verlaufe seines Buches behandelt der Verfasser Gleichungen. Zuerst die Umkehrung der elementaren Operationen; dann Gleichungen, in denen nur zwei Symbole vorkommen, wie z. B. $x = \breve{x}$, oder $x = \breve{\bar{x}}$ (die nicht lösbar ist); endlich Gleichungen mit drei Symbolen, unter welchen die $a\breve{\bar{x}} = x$ besonders schwierig ist. Alle in diesem Rahmen möglichen Aufgaben werden vollständig erledigt.

Eine interessante Anwendung der Theorie macht Schröder auf die Dedekindsche Lehre von den Ketten, indem er die Sätze 22—24 und 36—63 der Schrift Dedekinds: „Was sind und was sollen die Zahlen", etwas verallgemeinert, durch Relativoperationen darstellt und beweist. Ein Relativ $b$ heisst „Kette in Bezug auf $a$" wenn $a; b \mathrel{\underline{\in}} b$ ist.

Mit den Erklärungen:

$$a_{00} = a + a; a + a; a; a + \cdots$$

$$a_0 = 1' + a_{00}$$

die $a_{00}$ als „$a$-Bildkette" und $a_0$ als „$a$-Kette" definieren, aber den Schluss von $n$ auf $n+1$ schon voraussetzen, werden zuerst die genannten Sätze durch Rechnung mit Relativen bewiesen. Um aber den Schluss von $n$ auf $n+1$ zu umgehen, wird dann die $a$-Kette von $b$, $a_0; b$, mit Dedekind definiert als dasjenige umfassendste Relativ, welches allen Wurzeln der Subsumtion $a; u + b \mathrel{\underline{\in}} u$ gemeinsam ist; und von dieser Erklärung aus werden nun jene Theoreme bewiesen, die in dem Satze gipfeln, dass aus $b \mathrel{\underline{\in}} c$ und $a; (a_0; b)c \mathrel{\underline{\in}} c$ die Subsumtion $a_0; b \mathrel{\underline{\in}} c$ folgt, von welchem Satze die vollständige Induktion ein besonderer Fall ist. Schröder vereinfacht dann die Kettentheorie, indem er $a_0$ definiert als das grösste Relativ, welches allen Wurzeln der Gleichung $1' + a; u \mathrel{\underline{\in}} u$ gemeinsam ist.

Die Theorie muss hierbei durch den Satz ergänzt werden, dass aus $a; b \Subset b$ die Subsumtion

$$a; (b \dagger \overline{\breve{b}}) \Subset b \dagger \overline{\breve{b}}$$

folge. Die als das Produkt $a_0; b$ zu definierende $a$-Kette von $b$ genügt dann den Dedekindschen Festsetzungen.

Ein Relativ, dessen Matrix die Zeile mit Einern besetzt hat, welche dem Individuum $i$ entspricht, sonst aber nur Nullen trägt, wird man mit $i$ bezeichnen können. Das Rechnen mit diesen „Einzeilern" und den verwandten Relativen $\breve{i}$, $\bar{i}$, $\overline{\breve{i}}$ ist weiter Gegenstand von Schröders Forschungen. Neben dieses spezielle Relativ tritt das „Einauge", $i:j$, das einen einzigen Einer trägt in der Schnittstelle der Zeile $i$ mit der Reihe $j$. Als Einzeiler ist $x$ durch die Gleichung:

$$1' + \bar{x}; 1 = x,$$

als Einauge durch

$$1' \dagger \bar{x} \dagger 1' = x ; 1 + 1 ; x$$

vollständig charakterisiert. Die Regeln für die Rechnung mit solchen Relativen werden ausführlich erörtert. Dabei zeigt sich, dass, wenn die Individuen $i$ und $j$ in der Beziehung stehen, die durch ein Relativ $a$ gegeben ist, zwischen den Einzeilern $i, j$, dem Einauge $i : j$ und dem $a$ die Subsumtionen gelten:

$$i \Subset a; j, \quad i : j = i\breve{j} \Subset a.$$

Ein „System" ist ein Relativ, in dem stets alle Elemente der nämlichen Zeile gleich sind; für ein solches Relativ ist die Gleichung $a; 1 = a$ bezeichnend. Auch $\bar{a}$ ist dann ein System und die identische Summe, wie das identische Produkt von zwei Systemen ist wieder ein System. Ein System erscheint als die identische Summe von Einzeilern, von denen jeder ein Element des Denkbereichs darstellt. Durch ein solches Relativ wird also aus dem Denkbereich ein „System" von Individuen herausgehoben.

Diesen Untersuchungen folgen Studien über Eliminationsprobleme, worin Schröder teils Arbeiten von Peirce näher erörtert und in seiner Zeichensprache reproduziert, teils auch eigene Methoden angiebt, um die bei Eliminationen nötigen Summen- und Produktbildungen zu erleichtern.

Das letzte, zwölfte, Kapitel des Buches ist der Theorie der Abbildung gewidmet. Wenn man aus einem System $b$ mit Hilfe eines Relativs $a$ ein neues System $a; b$ bildet, so kann dies als $a$-Bild von $b$ bezeichnet werden. Man kann einer Abbildung vier Bedingungen, einzeln oder zusammen, auflegen, nämlich: Dass sie stets einen Sinn habe, nie mehrdeutig sei, dass die durch $\breve{a}$ vermittelte Abbildung nie undeutig oder nie mehrdeutig sei. Diese Bedingungen drücken sich beziehungsweise durch die Subsumtionen:

$$1' \Subset \breve{a}; a, \quad a; \breve{a} \Subset 1', \quad 1' \Subset a; \breve{a}, \quad \breve{a}; a \Subset 1'$$

aus. Durch Kombination dieser vier Bedingungen ergeben sich 15 Typen von Abbildungen, die in neun Haupttypen zerfallen. Zwei Relative $a'$ und $a''$ vom nämlichen Typus liefern in $a'; a''; b$ eine Abbildung von demselben Typus.

Erfüllt ein Relativ $x$ die erste und zweite Bedingung, so heisst es „Funktion von —" oder „Bild von —" (im engsten Sinne des Wortes) und wird durch die Gleichung $1' \dagger \bar{x} = x$ definiert. Das Relativ $x$, das der dritten und vierten Bedingung genügt, heisst „Argument" oder „Objekt von —". Eines, das die Gleichungen

$$x; \breve{x} = 1' = \breve{x}; x$$

erfüllt, genügt aber vier Bedingungen und heisst „Substitution". Man kann, wie Verfasser zeigt, Relative, die die eine oder andere dieser Bedingungen erfüllen, als Funktionen eines unbestimmten Relativs finden. Die Übereinstimmung des hier aufgestellten Begriffs einer Substitution mit dem gewöhnlichen wird eingehend dargelegt.

Zwei Systeme $a$ und $b$ heissen nach Cantor und Dedekind „gleichmächtig" oder „ähnlich" ($a \backsim b$), wenn sie sich gegenseitig eindeutig aufeinander abbilden lassen. Schröder stellt diese Aussage in mehreren Formen dar, deren einfachste ist, dass ein Relativ $z$ existiert, für das

$$b = z; a, \quad a = \breve{z}; b, \quad z \Subset \breve{a} b, \quad z; \breve{z} + \breve{z}; z \Subset 1'$$

ist. Diese Definition gestattet eine Anzahl Dedekindscher Sätze zu beweisen, ohne dass man nötig hat, auf die Individuen zurückzugehen, die die Systeme konstituieren. Die Aufgabe, die sich hieran schliesst, die Bedingung $a \backsim b$ durch Gleichungen auszudrücken, die nur die Symbole $a$ und $b$ enthalten, lässt sich bis jetzt bloss in den einfachsten Fällen lösen, wo die Denkbereiche wenige Individuen enthalten. Sieht man davon ab, dass die Abbildung gegenseitig eindeutig sein soll, so giebt die Untersuchung des Verfassers die Subsumtion $a \Subset 1; b$ als Bedingung, und wenn diese erfüllt ist, ist die Abbildung stets möglich. Auch die Sätze Dedekinds über diese Abbildungsart werden vom Verfasser durch Rechnung bewiesen.

Der unermüdliche Fleiss und der grosse Scharfsinn, mit dem Schröder es verstanden hat, die an sich schwierigen und durch häufigen Wechsel der Bezeichnungen fast unverständlichen Ideen von Peirce aus dessen Abhandlungen herauszuziehen und in einem lesbaren Buche darzustellen, verdient hohe Anerkennung. Er hat auch an sehr vielen Stellen Eigenes zu der Theorie beigetragen, um sie auszugestalten und abzurunden. Wenn man sich die wenigen Rechnungsregeln zu eigen gemacht hat, ist es auch nicht schwierig, die Rechnungen in dem Buche zu verfolgen, da sie meistens sehr ausführlich gegeben sind, so dass auch der wenig Geübte sich von der Richtigkeit überzeugen kann.

Referent ist der Ansicht, dass die Auffindung von Problemen, die nicht ad hoc gemacht sind, sondern sich sozusagen in der Natur vorfinden, und durch logische Rechnung, sei es mit dem identischen oder dem Relativkalkul, leichter gelöst werden können, als auf gewöhnlichem Wege, eine Lebensfrage für diese ganze Disziplin ist. Wenn dies gelänge, so würde ein solcher Erfolg die Theorie nicht nur den Mathematikern und Logikern viel annehmbarer erscheinen lassen, sondern auch wesentlich zu

ihrer Ausgestaltung beitragen. Denn die Behandlung der Aufgaben würde lehren, was in der Theorie als unwesentlich auszuscheiden und was weiter zu entwickeln wäre. Vielleicht bringt die zweite Abteilung des dritten Bandes des Schröderschen Werkes, die hoffentlich bald erscheint, solche Probleme.

J. Lüroth.

---

**Julius Plückers gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen.** Im Auftrage der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegeben von A. Schoenflies und Fr. Pockels. I. Mathematische Abhandlungen. Herausgegeben von A. Schoenflies. Leipzig 1895. B. G. Teubner. XXXV und 620 S.

Die Geometer werden es mit Freude begrüssen, dass sich den Klassikerausgaben von Poncelet, Möbius, Steiner und Grassmann nun auch die von Plücker zugesellt.

Denn die Leistungen Plückers beherrschen nicht nur die moderne Geometrie, sondern auch auf manche Gebiete der Analysis haben seine grundlegenden Ideen fruchtbar eingewirkt, es sei etwa nur an die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erinnert und an die Rolle, welche der „Wechsel des Raumelementes" daselbst spielt.

Der Inhalt des vorliegenden Bandes umfasst die mathematischen Abhandlungen Plückers; voraus geht die bekannte Gedächtnisrede von Clebsch, während den Schluss (zirka 30 Seiten) Anmerkungen des Herausgebers bilden. Die Aufgabe des letzteren war keine leichte, da die Originaldrucke an mannigfachen Druckfehlern und Ungenauigkeiten leiden. Herr Schoenflies hat eine Art Mittelweg eingeschlagen; bei geringfügigen und äusserlichen Fehlern hat er den Text ohne weitere Angabe korrigiert, die bedenklicheren Stellen sind je nachdem unverändert abgedruckt oder verbessert, in beiden Fällen aber in den Anmerkungen einer Erörterung unterzogen worden.

Die Anmerkungen enthalten aber noch mehr, sie bieten eine Fülle ergänzender und aufklärender historischer Hinweise, für die der Leser nicht dankbar genug sein kann. So hat der berühmte Streit zwischen Poncelet und Gergonne über das Prinzip der Dualität eine eingehende Würdigung erfahren, unter Wiedergabe der wichtigsten Originalbelege; vielfach wird darauf hingewiesen, in welchem Verhältnis eine Abhandlung zu den selbstständig erschienenen Schriften Plückers steht; ferner wird gezeigt, wie sich der Gedanke der Dreieckskoordinaten fast gleichzeitig bei Bobillier, Möbius und Plücker entwickelt hat u. s. f.

Plücker war einer der Schriftsteller, denen eine zu grosse Gedankenfülle nicht immer Muße lässt zu einer präzisen und einwandfreien Darstellung, von einzelnen Irrtümern ganz abgesehen. So hat es sich denn der Herausgeber ganz besondere Mühe kosten lassen, alle irgendwie zweifelhaften Stellen zu kommentieren. In einigen Punkten wird vielleicht der Leser, wie nicht anders zu erwarten ist, anderer Meinung sein.

Referent will sich hier auf eine einzige Stelle beschränken, die ihm besonderes Interesse darzubieten scheint.

Es handelt sich um den höheren Kontakt zweier algebraischen Flächen. Plücker betrachtet unter anderen eine vorgelegte Fläche dritter Ordnung $F_3$, und fragt nach den Bedingungen, unter denen eine unbekannte Fläche zweiter Ordnung $F_2$ in einem gegebenen Punkte $P$ der $F_3$ einen Kontakt dritter Ordnung mit der $F_3$ hat. Das (rechtwinklige) Koordinatensystem wird so gelegt, das $P$ der Anfangspunkt und die $xy$-Ebene gemeinsame Tangentialebene ist. Dann ergeben sich schliesslich zwei Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten der $F_3$, die nach Plücker aussagen, dass — bei ihrem Erfülltsein — zwei Gerade durch $P$ hindurchgehen, die ganz auf der $F_3$ liegen. Wenn nun der Herausgeber gegen Plücker einwendet: „Diese beiden Gleichungen sind nicht Bedingungsgleichungen für die Fläche dritter Ordnung, sondern vielmehr Bedingungsgleichungen für die Lage des Koordinatensystemes ...“, so scheint er damit doch Plücker Gewalt anzuthun. Denn $P$ ist ja eben ein festgegeben gedachter Punkt der $F_3$, wie stets in der ganzen Abhandlung bei ähnlichen Aufgaben. Hätte Plücker den weiteren Schritt gethan, und $P$ als gesuchten Punkt der $F_3$ aufgefasst, so würde er, 20 Jahre vor Salmon und Cayley, zur Existenz der 27 Geraden der $F_3$ gelangt sein.

W. Fr. Meyer.

---

**Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt.** Von G. Veronese. Mit Genehmigung des Verfassers und nach einer neuen Bearbeitung des Originals übersetzt von A. Schepp. Leipzig 1894. B. G. Teubner. XLVI und 710 S.

Das vorliegende Werk ist eines der eingehendsten und zugleich merkwürdigsten von den bisher über die Grundlagen der Geometrie erschienenen. Die Vorrede, in der der Verfasser, wie er sagt, einen Rechenschaftsbericht über seine Auffassungsmethode und Ergebnisse erstattet, umfasst 34 Seiten; der Einleitung „über die abstrakten mathematischen Formen“ ist ein gutes Drittel des Buches gewidmet. Der Hauptstoff nimmt fast 400 Seiten ein; er zerlegt sich in zwei Teile, von denen der erste der Reihe nach die Gerade, die Ebene und den Raum von drei Dimensionen, der zweite den Raum von vier und mehr Dimensionen behandelt. Ein Anhang enthält eine wertvolle historisch-kritische Studie über die Prinzipien der Geometrie nebst einigen weiteren Noten. Wichtiger als diese Äusserlichkeiten ist die Thatsache, dass der Verfasser sich bemüht hat, die sämtlichen Begriffe, deren er für den Aufbau seines Systemes benötigt, bis auf die ersten logischen Quellen zurück zu verfolgen.

Der Verfasser tritt von vornherein der weit verbreiteten Anschauung entgegen, als ob die abstrakten oder numerischen Mannigfaltigkeiten von $n$ Dimensionen mit den eigentlich sogenannten geometrischen Räumen vertauscht werden dürften, und als ob man diese Räume nur mittels der

Analysis sicher behandeln könne. Das Buch verfolgt gerade das Ziel, die Geometrie der Räume von mehr als drei Dimensionen als reine Wissenschaft vollkommen analog derjenigen der Ebene und des gewöhnlichen Raumes zu entwickeln, so zwar, dass die Geometrie von mehr als drei Dimensionen von ihren Anwendungen auf den gewöhnlichen Raum unabhängig erscheint.

Um dies deutlicher zu machen, sei gleich betont, wie der Verfasser auf konstruktivem Wege der Reihe nach die Räume von 2, 3, ... Dimensionen aus Punkt und Gerade, die ihm die einzigen unabhängigen Raumelemente sind, aufbaut. Nachdem einmal die Begriffe von Punkt und Gerade festgelegt sind, wird ein weiterer Punkt $P$ ausserhalb der Geraden als existierend angenommen, und nun entsteht die Ebene, kurz gesagt, als das Büschel von Strahlen, die $P$ mit den Punkten der Geraden verbinden, entsprechend der gewöhnliche Raum als Strahlbündel u. s. f.

Auf ähnliche Weise hat man in der That in neuerer Zeit eine rein geometrische Theorie der Kurven und Flächen $n^{\text{ter}}$ Ordnung und ihrer Polargebilde geschaffen.

Sehen wir zunächst von den Einwänden ab, die fragen, ob die auf diese Art konstruierten Räume wirklich die Gesamtheit aller Euklidischen und Nicht-Euklidischen Räume erschöpfen, so lag jedenfalls für den Verfasser die Hauptschwierigkeit darin, geeignete Definitionen für den Punkt und für die Gerade, als einen gewissen Inbegriff von Punkten, aufzustellen.

Beiden Begriffen liegt der der „abstrakten mathematischen Form“ als allgemeines Denkschema zu Grunde: Man hat darunter die geistigen Gegenstände zu verstehen, deren Merkmale das Ganze, die Teile, die Ordnung und die Art der Position sind (S. 18); der eingehendsten Diskussion dieser Formen und ihrer Verknüpfungen ist eben die umfassende Einleitung gewidmet.

Mehrere Dinge der „Ordnung“ nachdenken, heisst das eine nach dem anderen denken (S. 8), die Dinge heissen dann das erste, zweite, dritte u. s. f. Von der Position wird nur gesagt: „Wenn zwei Dinge verschieden sind, so können wir, auch wenn sie identisch sind, von ihnen sagen, sie hätten eine verschiedene „Position“ (S. 5).

Wegen der Unbestimmtheit, die hierin für manchen noch liegen möchte, führen wir ein Beispiel mit den Worten des Verfassers an: „Nachdem die Vorstellung $A$ gesetzt ist, wiederhole ich die Vorstellung $A$ und dann wieder die Vorstellung $A$. Wenn man die während jeder Wiederholung verflossene Zeit in Betracht zieht, so erhält man ein in dem Begriff einfacher Reihenfolge und Ordnung nicht enthaltenes Positionsverhältnis, da die während der ersten Wiederholung verflossene Zeit von der während der zweiten verflossenen verschieden sein kann“ (S. 18).

Unter „Grundelement“ wird allgemein eine beliebige gegebene erste Form, unter „Grundelementen“ alle mit jener identischen Formen verstanden; ihre Verschiedenheit ist dann eben durch die Position gegeben (S. 58). Für die Geometrie ist nun das Grundelement der „Punkt“. Der Begriff des Punktes wird uns durch in Wirklichkeit ausser uns in der äusseren

Umgebung existierende Gegenstände geliefert, z. B. durch das Ende eines Fadens. Abstrahiert man von seinen physischen Eigenschaften, so erweckt das Ende des Fadens in uns die Vorstellung von demjenigen, was wir als Grundelement ansehen, oder von dem Punkt. Alle Punkte sind identisch.

Aus den Grundelementen werden nun „Systeme einer Dimension“ aufgebaut, denen man noch die Beschränkung auferlegen kann, „homogen“ zu sein, das ist im wesentlichen, sich in gleichartige Teile („Segmente“) zerlegen zu lassen (S. 71, 72).

Hierbei ist unter System einer Dimension die durch eine beliebige Reihe von Elementen und die umgekehrte Reihe gegebene Form, deren Ordnung von einem beliebigen ihrer Elemente an gegebenes Merkmal der Form ist; jeder Teil des Systemes, der wenigstens zwei verschiedene Elemente enthält, heisst Segment des Systemes.

Ist überdies ein solches homogenes System einer Dimension, von einem gegebenen Element desselben aus, nach beiderlei Richtung identisch, so wird es ein „in der Lage seiner Teile identisches System“ genannt. Für ein derartiges System wird schliesslich auch der Stetigkeitsbegriff eingeführt, der ziemlich verwickelter Natur ist. Es genüge die Andeutung, dass sich der Verfasser hierin gedanklich der bekannten Dedekindschen Schnittdefinition anschliesst, nur dass ihm eben nicht die Gesamtheit der rationalen Punkte zu Gebote steht und er genötigt ist, durch abstrakte Umschmelzung von Anschauungsmomenten dafür logische Merkmale allgemeiner Art zu substituieren.

Nach diesen Erklärungen sind wir zur Not im stande, das zu erklären, was der Verfasser unter „Gerade“ versteht: „Es giebt ein in der Position seiner Teile identisches Punktesystem einer Dimension, welches durch zwei seiner Punkte, die verschieden sind, bestimmt ist und stetig ist.“ „Dieses System heisst gerade Linie.“

Nunmehr wir bis zu diesem Fundament der Theorie vorgedrungen sind, sei es gestattet, über die bisher aufgeführten Festsetzungen einiges zu bemerken.

Man erkennt bald, dass der wichtigste der angeführten Begriffe der der Position ist. Gehören Ganzes und Teile der reinen Logik an, ist die „Ordnung“ die Grundlage der Arithmetik, so soll die „Position“ das spezifisch-geometrische Element abgeben, ja man könnte geradezu im Sinne des Verfassers die Geometrie (im unendlichen Gebiete) als Lehre von der Position auffassen. Da sollte man erwarten, dass ein so bedeutungsvoller Begriff scharf festgelegt wird, dass sein Umfang genau abgegrenzt wird, dass gezeigt wird, wie die Geometrie je nach der stufenweisen Entwickelung dieses Begriffes verschiedene Stadien durchläuft u. s. f. Der Verfasser begnügt sich aber mit einer rein negativen Definition, wonach die Position als ein gemischtes Etwas erscheint, das bei einem geometrischen Gebilde ausser „Ganzes, Teile und Ordnung“ noch existiert, führt zur Erläuterung nur einige wenige Beispiele an, und gebraucht je nach seinen Zwecken den Begriff in grösserer oder geringerer Ausdehnung. Hätte der Ver-

fasser ausser der Geraden (und dem Kreise) noch andere Kurven betrachtet, so wäre er genötigt gewesen, positive Lagerungsgesetze für die Punkte bestimmter Kurven anzugeben; für die Gerade reicht sein Positionsbegriff eben hin, da auch diese in negativer Weise festgelegt wird, als ein Gebilde, dem der grösste Teil der Eigenschaften irgend einer krummen Linie nicht zukommt.

So hat denn freilich der Verfasser den bekannten Standpunkt Euklids überwunden (wonach die Gerade durch die überhaupt nicht definierte Gleichförmigkeit beziehentlich ihrer Punkte erklärt wird), aber der Leser erhält nicht die Überzeugung der Existenz seiner „Geraden.“ Hier greift auch ein Einwand ein, den W. Killing in einer (unten zitierten) Arbeit macht: der Verfasser betrachte immer nur die Gerade (und entsprechend weiterhin die Ebene u. s. f.) als solche, unabhängig von ihrer Lage im Raume; Beispiele, die v. Helmholtz und er (Killing) gefunden hätten, zeigten aber, wie eine Gerade oder eine Ebene für sich definierbar sei, die doch niemals Grenzgebilde einer nächst höheren Mannigfaltigkeit sein könne.

Da im Unendlichen der Positionsbegriff überhaupt versagt, so setzt der Verfasser hier mit arithmetischen Hilfsmitteln ein. Diese Hilfsmittel sind sozusagen zweischneidiger Natur; neben dem Unbegrenzten, das im wesentlichen von denselben Gesetzen beherrscht wird, wie das Endliche selbst, führt er als toto genere aliud das absolut oder aktual Unendliche ein: umgekehrt, indem er von einer unbegrenzten respektive absolut-unendlichen Einheit ausgeht, gelangt er entsprechend zu zwei Arten von Stetigkeit, der relativen und der absoluten.

Der Erfolg ist freilich zunächst ein weittragender: indem die gemeinten Begriffe dem Parallelismus zu Grunde gelegt werden, wird nicht nur der Inhalt der Geometrie ein reicherer, sondern der Verfasser ist unter anderem nicht genötigt, mit Euklid die Lehre von den parallelen Geraden in der (vorher festgelegten) Ebene zu studieren, vielmehr kann er den umgekehrten Weg einschlagen und so Sätze logisch beweisen, die sonst auf die Anschauung zurückgeführt werden. Noch mehr, der Verfasser ist z. B. im stande, zwei Gebiete verschiedener Dimension punktweise eindeutig und stetig aufeinander zu beziehen, während bisher die Stetigkeit hierbei preisgegeben werden musste.

Es wird aber wohl nur wenige Leser geben, die davon überzeugt wären, warum die Cantorschen transfiniten Zahlen — die doch gerade auf seinem Wege lagen — für den Verfasser unannehmbar gewesen seien, und dass seine aktual unendlichen Zahlen Existenzberechtigung haben. Herr Cantor hat sich denn auch neuerdings (Math. Ann. 46) scharf gegen den Verfasser gewandt und ihm vorgeworfen, dass seine grundlegende Definition der Gleichheit zweier Zahlen (S. 31) einen Zirkel enthalte, insofern sie eben diesen Begriff bereits involviere.

Der Referent begnügt sich, da er sonst Gefahr laufen würde, selbst ein Buch zu schreiben, mit diesen wenigen Hindeutungen, und verweist den Leser auf das Werk selbst, auf die erwähnten Arbeiten von Killing,

Cantor, sowie auf eine vortreffliche Besprechung von Schönflies (Göttinger Anzeiger 1895).

Trotz der Einwände, die schon gemacht sind und noch in Aussicht stehen — die der Verfasser sicher nicht unbeantwortet lassen wird* — sei aber doch betont, dass das vorliegende Werk, ganz abgesehen von der bewunderungswürdigen Systematik des Ganzen, im einzelnen soviel des Eigenartigen und Neuen aufweist, dass die Geometer nicht umhin können werden, sich ernstlich damit abzufinden. Sollte es sich auch als notwendig erweisen, einzelne Teile des kühnen Bauwerks von Herrn Veronese umzugestalten oder auch ganz herauszunehmen, so ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass trotzdem der Charakter des Ganzen, die möglichste Auflösung der Anschauungsmomente in ihre logischen Urelemente erhalten bleibt.

Besondere Anerkennung verdient es noch, dass der Verfasser wohl kaum eine Arbeit eines anderen Forschers, die in seine Materie irgendwie eingreift, unbeachtet gelassen hat, und dass er dieser erdrückenden Mannigfaltigkeit von Richtungen gegenüber stets seine Selbständigkeit wahrt.

Die Übersetzung ist eine treue, vielfach zu treue. W. Fr. Meyer.

---

**Bemerkungen über Veroneses transfinite Zahlen.** Von W. Killing. Programm der Akademie. Münster 1895. Bredt. 11 S.

Siehe das voraufgehende Referat. W. Fr. Meyer.

---

**Geometricals Conics** by F. S. Macaulay, M. A. Assistant Master at St. Paul's School. At the University Press. Cambridge 1895.

Der Inhalt dieses Buches bildet eine Ableitung der Eigenschaften der Kegelschnitte auf elementar-geometrischem Wege. Als Definition derselben dient das konstante Verhältnis des Abstandes eines Punktes von Brennpunkt und Leitlinie. Der Verfasser meint, dass über die beste Anordnung dieses Gebietes die Ansichten verschieden sind. Das ist wohl richtig, aber gegen die hier befolgte Anordnung liesse sich doch sehr viel einwenden. Nachdem er zunächst eine Darstellung der Grundeigenschaften der Kegelschnitte gegeben hat, unterbricht er dieselbe, um eine Zusammenstellung von Definitionen zu geben, die für den Leser zunächst unverständlich sind. Dass sie dort unpassend sind, sieht er selbst ein, da er dem Studierenden empfiehlt, dieselben zunächst auszulassen. Wäre es daher nicht praktischer, diese Zusammenstellung an den Schluss des Buches zu setzen? Hierauf folgt eine Erörterung über Maßeinheiten und über die unendlich ferne Gerade, welche besser der Betrachtung über die Kegelschnitte hätte vorausgeschickt werden können. Ein sich besonders häufig bemerkbar machender Fehler ist es, dass der Verfasser zu wiederholten Malen auf Sätze Bezug nimmt, die erst später bewiesen werden. So benutzt er z. B. Kapitel 1 den erst in Kapitel 9 bewiesenen Satz, dass der Schnitt eines geraden Kreiskegels mit einer Ebene mit dem auf oben angegebene Weise definierten Kegelschnitt übereinstimmt.

* Eine solche Antwort ist inzwischen in den Mathem. Annalen Bd. 47 erschienen, worauf alsbald eine Gegenantwort von Killing (ebenda Bd. 48) erfolgt ist.

Wenig gründlich sind auch die Erörterungen über Stetigkeit in Kapitel 10, in dem sich der Verfasser mit Allgemeinheiten behilft, die bei einer strengen Beweisführung nicht verwendbar sind. So sagt er: „A varying magnitude generally, but not invariably, changes sign from positive to negative, or negative to positive, when it passes through a zero value; and the same happens when it passes through an infinite value“ und bemerkt hierzu: „It is in fact evident, indepedently of any illustration of the law, that a varying magnitude must in general change sign, when it passes through a zero value, viz. from positive to negative if decreasing, and from negative to positive if increasing.“ Der Inhalt des Buches ist sehr reichhaltig; um nicht zu weitläufig zu werden, so sei nur die ziemlich ausführliche Behandlung konfokaler Kegelschnitte erwähnt. Das letzte Kapitel enthält die projektivischen Punktreihen und Strahlenbüschel, sowie die Darstellung der Kegelschnitte mit Hilfe derselben. Eine grosse Anzahl von Aufgaben bietet reichen Stoff zu Übungen dar. MAX MEYER.

---

**Ebene Geometrie** von G. MAHLER, Professor der Mathematik am Gymnasium in Ulm. Mit 115 zweifarbigen Figuren. Stuttgart 1895. G. J. Göschensche Verlagshandlung.

Das vorliegende Werk enthält die wichtigsten Sätze des behandelten Gebietes. Von den meisten anderen Lehrbüchern unterscheidet es sich durch die zum Beweise verwandten Hilfsmittel, Drehung eines Teiles der Figur um eine Axe oder einen Punkt und die damit zusammenhängenden Begriffe der axialen und zentralen Symmetrie. Ob der Schüler sich leicht mit diesen vertraut machen wird, lässt sich nur durch längere Versuche entscheiden. Schon ein Blick auf die Figuren bei den Kongruenzsätzen zeigt, dass hier Schwierigkeiten zu überwinden sind. Allerdings werden dieselben durch die praktische Ausführung der Figuren verringert, da die Hilfslinien rot eingezeichnet sind und sich hierdurch deutlich von den anderen abheben. Auch eine hinreichende Anzahl von Übungsbeispielen ist vorhanden; vielleicht wäre es wünschenswerter, dass manches aus dem Übungsstoff in den eigentlichen Lehrteil herübergenommen wird, wo man es bei den meisten anderen Lehrbüchern zu finden gewohnt ist.

MAX MEYER.

---

**Der logische Algorithmus in seinem Wesen, in seiner Anwendung und in seiner philosophischen Bedeutung.** Von JOSEPH HONTHEIM, S. J. Berlin 1895. Verlag von Felix L. Dames.

Der Zweck dieser kleinen Schrift ist, die Grundzüge desjenigen Gebietes auseinander zu setzen, welches sonst unter dem Namen „Algebra der Logik“ oder „Logischer Kalkül“ bekannt ist. Dieser Zweig der Wissenschaft macht es sich zur Aufgabe, die logischen Operationen auf ein rechnerisches Schema zurückzuführen. Der Verfasser giebt nun keine erschöpfende

Darstellung des ganzen Gebietes, bereichert dasselbe aber durch mancherlei beachtenswerte Vereinfachungen. Die Darstellung ist im allgemeinen übersichtlich, wenn auch manche Beweise etwas kurz ausgefallen sind. Wohlthuend wirkt besonders die Mässigung, mit welcher der Verfasser die Bedeutung des Gegenstandes beurteilt. Mit Recht hebt er hervor, dass der „Logische Algorithmus" nicht die gewöhnliche Logik verdrängen, sondern sich derselben nur als Hilfsmittel nutzbar machen soll. Da die deutsche Litteratur über dieses Gebiet nicht allzu reichlich und es nicht jedermanns Sache ist, ein so umfangreiches Werk wie das von Schröder durchzuarbeiten, so kann man das Erscheinen dieser Abhandlung nur willkommen heissen.

MAX MEYER.

---

**Die Grundlehren der ebenen Trigonometrie.** Ein Leitfaden für den Unterricht mit Übungsaufgaben von JOS. LENGAUER, Professor am königl. alten Gymnasium zu Würzburg. Kempten 1895. Verlag der Jos. Köselschen Buchhandlung.

Dieses Lehrbuch der Trigonometrie ist mit Rücksicht auf die Lehrpläne der bayerischen Gymnasien entstanden. Infolgedessen hat sich der Verfasser nur auf das für diesen Zweck Notwendige beschränkt, wohingegen die Übungsaufgaben eine reichliche Auswahl darbieten. Die Darstellung ist klar und dem Verständnis des Schülers angemessen. Was die Anordnung des Lehrstoffes betrifft, so werden im ersten Abschnitt die trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel erläutert, dem sich im zweiten die Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks anschliesst. Der dritte Abschnitt behandelt die Goniometrie, der vierte die Trigonometrie des schiefwinkligen Dreiecks.

MAX MEYER.

---

**Zur Konstruktion des Schwerpunktes einer ebenen Vielecksfläche.** Beilage zum Jahresberichte des Gymnasiums Schaffhausen für 1894/95. Von Dr. JULIUS GYSEL, Direktor des Gymnasiums. Schaffhausen, Buchdruckerei von Bolli & Böcherer.

Zieht man in einem Dreieck durch die Ecken Parallele zu den gegenüberliegenden Seiten, so entsteht ein dem ursprünglichen ähnliches Dreieck, und die Verbindungslinien der Ecken desselben mit entsprechenden Dreiecksecken schneiden sich im Schwerpunkt. Diese Konstruktion lässt sich ohne Anwendung des Zirkels mit Hilfe des Lineals und Winkeldreieckes ausführen. Herr Edmond Henry hat eine mit denselben Hilfsmitteln ausführbare Konstruktion für das Viereck geliefert, und Verfasser vorliegender Abhandlung stellt sich die Aufgabe, eine derartige Konstruktion für ein beliebiges Vieleck zu finden. Er giebt für dieselbe drei Lösungen, von denen die dritte eine Kombination der ersten und zweiten ist.

MAX MEYER.

**Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique et applications** par P. PAINLEVÉ, Maitre de conférences à la faculté des sciences de Paris. Paris 1895. Librairie scientifique A. Hermann.

Der Verfasser hat sich zur Aufgabe gemacht, die Integrationsmethoden von Lagrange, Poisson, Hamilton, Jacobi etc. in Bezug auf die in der Mechanik gebräuchlichen Gleichungen auseinander zu setzen. Den Mittelpunkt der Entwickelungen bilden die Gleichungen von Lagrange in der Form:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

und besonders werden die Integrationsmethoden von Jacobi behandelt. Gelegentlich werden auch die Untersuchungen neuerer Forscher, wie z. B. eine Arbeit des Herrn Staeckel berücksichtigt und auch auf die Untersuchungen des Herrn Lie wird die Aufmerksamkeit gelenkt. Wie schon aus dieser Inhaltsangabe hervorgeht, ist das Werk kein eigentliches Lehrbuch der Mechanik, sondern es setzt im Gegenteil bei dem Leser eine sichere Kenntnis der mechanischen Grundlagen voraus, denn die kurze Behandlung einiger Sätze der Mechanik in den ersten Lektionen kann nur als Repetition dienen. Wenn der Studierende über die notwendigen Vorkenntnisse verfügt, so wird ihm die Durcharbeitung dieses Werkes gewiss von grossem Nutzen sein, besonders da zu den einzelnen Sätzen zahlreiche und interessante Beispiele gegeben werden. Störend machen sich nur die vielen Druckfehler bemerkbar.

MAX MEYER.

---

# Bibliographie

vom 26. November 1896 bis 28. Januar 1897.

### Periodische Schriften.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Klasse. 63. Band. Wien, Gerolds Sohn. geb. M. 78.

Mitteilungen aus d. mech.-tech. Laborator. d. kgl. techn. Hochsch. München. Gegr. v. J. BAUSCHINGER. N. F. Hsg. v. AUG. FÖPPL. 24. H. Münch., Ackermann. M. 12.

Arbeiten, astronom.-geodätische. Veröffentlichung der königl. bayer. Kommission für die internationale Erdmessung. 1. Heft. München, Franz. M. 7.

Beobachtungen, deutsche überseeische meteorologische. Gesammelt u. herausgeg. von d. deutschen Seewarte. VII. Heft. Hamburg, Friederichsen & Co. M. 7.

Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1895. Dargestellt von der physikal. Gesellsch. zu Berlin. 51. Jahrg., 3. Abt. Braunschw., Vieweg & Sohn. M. 25.

Sitzungsberichte, Münch. Mathem. Klasse. 1896. 2. Hft. München, Franz. M. 1. 20.

Sitzungsberichte, Wiener. Mathem.-naturw. Klasse 1. Abteil. 105. Band 5.—7. Heft. Wien, Gerolds Sohn. M. 5. 50.

Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. 5. série, t. V, Nr. 1—3. Leipzig, Voss' Sort. in Kommission. à M. 2. 50.

Fortschritte der Physik im Jahre 1895. Dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 51. Jahrg., 2. Abt. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 2. Physik des Äthers. Redigiert von RICH. BÖRNSTEIN. M. 30.

JÄGER, G., Wetter- u. Mondkalender für 1897. 3. Jahrg. Stuttgart, Kohlhammer. M. —. 30.

### Geschichte der Mathematik und Physik.

POGGENDORFF's Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. 3. Band, 2.—6. Lieferung. Leipzig, Barth. à M. 3.

### Reine Mathematik.

ZIMMERMANN, LUDW., Rechentafeln. Gr. Ausgabe. Liebenwerda, Reiss. geb. M. 5.

—, Tafeln für die Teilung der Dreiecke, Vierecke und Polygone. 2. Aufl. Liebenwerda, Reiss. geb. M. 4.

—, Die gemeinen oder Briggischen Logarithmen der natürlichen Zahlen 1—10009 auf vier Dezimalstellen, nebst einer Produktentafel, einer Quadrattafel, einer Tafel z. Berechnung d. Kathete u. Hypotenuse u. z. Bestimmung d. Wurzeln aus quadr. Gleichungen. Liebenwerda, Reiss. M.—. 50.

CARDA, KARL, Elementare Bestimmung d. Punkttransformationen d. Raumes, welche alle Flächeninhalte invariant lassen. Wien, Gerolds Sohn. M.—. 10.

KRÖGER, M., Die Planimetrie in ausführlicher Darstellung und mit besond. Berücksichtigung neuerer Theorien. Nebst einem Anhang über Kegelschnitte. Hamburg, Meissner. M. 8.

LÖWENBERG, GEO., Lehrbuch d. Mathematik. Zum Selbststudium und für den Unterricht in Prima der höheren Lehranstalten, vermittelnd den Übergang vom Schulpensum z. Universitätsstudium. Leipzig, Arnd. M. 4. 50.

MÜLLER-BERTOSSA, J. AUG., Anleitung zum Rechnen mit dem logarithm. Rechenschieber. 2. Aufl. Zürich, Raustein. M. 1. 80.

TRAUB, K., Berechnung der Radien der acht Berührungskreise beim Apollonischen Problem. Lahr, Schauenburg. M.—. 50.

STEINER, JAC., Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Herausgeg. von A. J. VON OETTINGEN. Zwei Teile (Ostw. Klass. Nr. 82 u. 83). Leipzig, Engelmann. 1. Teil: M. 2, 2. Teil: 2. 40.

LIEBER, H., und v. LÜHMANN, F., Leitfaden d. Elementar-Mathematik. 1. u 3. T. 1. Planimetrie. Einführ. in d. Trigonometr., Körperberechn. 12. Aufl M. 1. 50. 3. Erweiterung d. Planimetr., eb. Trigonometr., Stereometr., sphär. Trigonometrie, Grundl. v. d. Koordin. u. Kegelschn. 8. Aufl. Berlin, Simion. M. 1. 80.

DAUBLEBSKY v. STERNECK, R., Zur additiven Erzeugung der ganzen Zahlen. Wien, Gerolds Sohn. M. —. 50.

FRICKE, ROB., Hauptsätze d. Differential- u. Integralrechn., als Leitf. z. Gebrauch b. Vorlesungen zusammengestellt. 1. Teil. Braunschw., Vieweg & Sohn. M. 2.

GUNDELFINGER, S., Taf z. Berechn. d. reellen Wurzeln sämtl. trinom. Gleichungen. Hinzugef. sind 4 stell. Additions-, Subtrakt.- u. Briggische Logarithm., sowie eine Interpolationstaf. f. a. Diff. unt. Hundert. Leipzig, B. G. Teubner. M. 1. 40.

MERTENS, F., Üb. die Transcendenz d. Zahlen $e$ u. $\pi$. Wien, Gerolds Sohn. M.—. 40.

SCHLESINGER, LUDW., Handbuch der Theorie d. linearen Differentialgleichungen. 2. Band, 1. Teil. Leipzig, B. G. Teubner. M. 18.

SERRET, J.-A., Lehrbuch d. Different - u. Integralrechn. Deutsch bearb. von AXEL HARNACK. 2. Aufl v. G. BOHLMANN. 1. Bd. Different. Leipz., B. G. Teubner M. 10.

GIRNDT, MART., Raumlehre für Baugewerkschulen und verwandte gewerbliche Lehranstalten. 2. Teil: Körperlehre. Leipzig, B. G. Teubner. Kart. M. 1.

### Angewandte Mathematik.

HESKY, CARL, Einf. Objekte des Bau- u Maschinenfaches, Vorlagen für das angew. geometr. Zeichnen. 3. Aufl. (in 4 Lfg.) 1. Lfg. Wien, Gräser. M. 6. 25.

HILLEBRAND, CARL, Über den Einfluss der Elastizität auf die Schwankungen der Polhöhe. Wien, Gerolds Sohn. M. 1. 60.

MANDL, JUL., Darstellung d. scheinbaren Beleuchtung krummer Flächen (direkte Konstruktion der Isophengen). Wien, Gerolds Sohn. M. 1.

GAUSS, F. G., Die Teilung d. Grundstücke insb. unt. Zugrlg. rechtw. Koord. Nebst 4 stell. logar. u. trigon. Taf. u. e. Quadratt. 3. Aufl. Berlin, v. Decker. geb. M. 6.

GYSIN, J, Peripheriew.-Taf. in a. Teilung (Sexagesimal-Teilg.) z. Abst. v. Eisenb.- u. Strassenkurven f. Bogenlängen von 1—900 m und 1—100 cm von Radius 50 bis Rad. 10,000. 2. (Tit.-) Aufl. Liestal (1885), Gebr. Lüdin. geb M. 2. 30.

——, Tafeln z. Abstecken von Eisenb.- u. Strassenk. in neuer Teilg. (Zentesimal-Teilung). 2. (Tit.-) Aufl. Liestal (1885), Gebr. Lüdin. geb. M. 4. 50.

JENTZEN, Ed., Flächen- u. Körperberechn. nebst vielen Beisp. z. prakt. Gebrauch für Bau- und Maschinentechniker 2. Aufl. Weimar, Vogt. M. 2. 25.

HASENOEHRL, FRITZ, Ein mechanisch. Polycykel als Analogon der Induktionswirkungen beliebig vieler Kreisströme. Wien, Gerolds Sohn. M.—. 40.

Résultats, les, de la triangul. de la Suisse. Publication du bureau topogr. fédéral. 1. livr. Canton de Genève 1896. Bern, Schmid & Francke. M. 2.

ROSENMUND, M., Unters. üb. d. Anwend. des photogrammetr. Verfahrens f. topogr. Aufnahm. Ber. a. d. eidg. topogr. Bureau. Bern, Schmid & Francke. M. 1. 60.

OEHLER, E., Graphische Tafeln zur Querschnittbestimmung von Holz- und Eisenkonstruktionen. Strassburg, Heinrich. geb. M. 3

### Physik und Meteorologie.

LODGE, OLIVER J., Neueste Ansch. üb. Elektrizität. Übers. v. ANNA v. HELMHOLTZ u. ESTELLE DU BOIS-REYMOND. Hrsg. d. R. WACHSMUTH. Leipzig, Barth. M. 10.

KERNTLER, FRZ., Die elektrodynamischen Grundgesetze und das eigentliche Elementargesetz. Budapest II, Selbstverlag. M. 2.

ZIEGLER JUL., u. KÖNIG, WALT., Das Klima von Frankf. a. M. Das. Könitzer. M. 6.

POLIS, P., Über wissensch. Ballonfahrten u. deren Bedeut. f. d. Phys d. Atmosph. Vortr. Hrsg. v d. naturw. Ges. Aachen. Aachen, Meteor. Stat. I. Ord. M. 1. 40.

JÄGER, GUST., Zur Theorie d. Zustandsgl. d. Gase. Wien, Gerolds Sohn. M.—. 50.

HELMHOLTZ, H., Theorie d. Luftschwingungen i. Röhren m. offenen Enden (1859). Hrsg. v. A. WANGERIN (Ostwalds Klassik. Nr. 80). Leipzig, Engelmann. M. 2.

FARADAY, MICH., Experim.-Unters. üb. Elektr. (Aus den Philos. Transact. f. 1832.) Hrsg. v. A. J. OETTINGEN. (Ostw. Klass. Nr. 81.) Leipzig, Engelmann. M 1. 50.

FALB, RUD., Neue Wetterprognosen und Kalender der kritischen Tage für 1897. Januar bis Juni. Berlin, Steinitz. M. 1.

FÖPPL, A., Die Geom. d. Wirbelfelder. In Anlehn. an d. Buch d. Verf. über d. Maxw. Theorie der Elektr. u zu dessen Ergänzung. Leipzig, B. G. Teubner. M. 3. 60.

INDRA, ALOIS, Über d. Bestimmung d. Temperatur einer veränderl. Wärmequelle in einer bestimmt gegebenen Zeit. Wien, Gerolds Sohn. M.—. 40.

KELLER, H., Üb. d Urstoff u. seine Energie. 1. Teil. Leipzig, B. G. Teubner. M 2.

KORN, ARTH., Theorie d. Gravit. u d. elektr. Ersch. auf Grundl. d Hydrod. 2 Aufl. 2. Tl. Theor. d. elektr. Ersch. 1. Abschn. Ponder. Wirk. Berl., Dümmler. M. 2. 50.

MÜLLER, P. A., Über die Temperatur und Verdunstung der Schneeoberfläche und die Feuchtigkeit in ihrer Nähe. Leipzig, Voss. M. 2.

Neudrucke von Schriften und Karten über Meteorol. u. Erdmagnetismus. Hrsg. von G. HELLMANN. Nr. 7—9. Berlin, Asher & Co. à M. 3.

WILD, H., Verbess. Konstrukt. magn. Unifilar-Theodolithe Leipzig, Voss. M. 11.

# Historisch-litterarische Abteilung.

## Internationaler Mathematiker-Kongress in Zürich 1897.

Wie bekannt sein wird, ist die Frage eines internationalen Mathematiker-Kongresses seit längerer Zeit Gegenstand lebhafter Verhandlungen seitens der Fachgenossen. Im Hinblick auf die Erfolge, welche durch internationale Verständigung auf andern Wissensgebieten erzielt worden sind, wurde die Wünschbarkeit einer internationalen Vereinigung auch der Mathematiker von allen, die sich mit der Frage beschäftigen, einmütig betont. Nachdem auf Grund mannigfacher mündlicher und schriftlicher Korrespondenzen das Projekt eine festere Gestalt anzunehmen begonnen hatte und auch die Ortsfrage wiederholt in Erwägung gezogen worden war, wurde es allgemein als zweckmässig bezeichnet, dass der erste Versuch von einem Lande ausgehen möchte, das durch seine Lage, seine Verhältnisse und durch seine Tradition zur Anbahnung internationaler Beziehungen besonders geeignet sei. So richteten sich denn bald die Blicke nach der Schweiz und insbesondere nach Zürich.

Obwohl sich die Züricher Mathematiker keineswegs die Schwierigkeit des Unternehmens verhehlten, glaubten sie doch, im Interesse der Sache die Anregungen, die ihnen von den verschiedensten Seiten her zugegangen waren, nicht von der Hand weisen zu dürfen. Sie erklärten sich daher gerne bereit, die erforderlichen Vorbereitungen zur Einberufung eines internationalen Mathematiker-Kongresses zu übernehmen und, soweit es an ihnen liege, das Unternehmen nach Kräften zu fördern. Mathematiker anderer Nationen schlossen sich ihnen an, und so trat das unterzeichnete internationale Komitee zusammen, mit der Aufgabe, für das Jahr 1897 in Zürich eine Zusammenkunft der Mathematiker aller Länder der Erde zu veranstalten.

Der Kongress, an welchem teilzunehmen alle Mathematiker von dem Komitee ergebenst eingeladen werden, soll in Zürich am 9., 10. und 11. August 1897 in den Räumen des eidgenössischen Polytechnikums

stattfinden. Das Komitee wird nicht verfehlen, rechtzeitig das genauere Arbeitsprogramm vorzulegen und sich alsdann die Zusage zur Beteiligung an dem Kongresse zu erbitten. Immerhin darf schon jetzt darauf hingewiesen werden, dass naturgemäss die wissenschaftlichen und die geschäftlichen Verhandlungen sich vorzugsweise um solche Fragen gruppieren werden, die ein allgemeineres Interesse besitzen und denen eine prinzipielle Bedeutung innewohnt.

Die Bedeutung wissenschaftlicher Kongresse beruht aber nicht minder auch auf der Pflege persönlicher Beziehungen. Das Lokalkomitee wird es sich angelegen sein lassen, auch dieser Seite des zu veranstaltenden Kongresses seine Aufmerksamkeit zuzuwenden und durch Entwerfung eines bescheidenen Festprogrammes Rechnung zu tragen.

Mögen die Erwartungen, welche sich an diese erste internationale Mathematikervereinigung knüpfen, in Erfüllung gehen! Möge eine zahlreiche Beteiligung die wissenschaftlichen und persönlichen Beziehungen der Fachgenossen fördern im Interesse gemeinsamer Arbeit und des Fortschrittes der mathematischen Wissenschaft!

**H. Bleuler,** Präsident des schweiz. Schulrates, Zürich.
**H. Burkhardt,** Prof. an der Universität Zürich. **L. Cremona,** Prof. in Rom. **G. Dumas,** Assistent am eidg. Polytechnikum Zürich. **J. Franel,** Prof. am eidg. Polytechnikum Zürich. **C. F. Geiser,** Prof. am eidg. Polytechnikum Zürich. **A. Co. Greenhill,** Prof. in Woolwich **A. Herzog,** Direktor des eidg. Polytechnikums Zürich. **G. W. Hill,** Prof. in West-Nyack (U.S.A.). **A. Hurwitz,** Prof. am eidg. Polytechnikum Zürich. **F. Klein,** Prof. in Göttingen. **A. Markoff,** Prof. in Petersburg. **F. Mertens,** Prof. in Wien. **H. Minkowski,** Prof. am eidg. Polytechnikum Zürich. **G. Mittag-Leffler,** Prof. in Stockholm. **G. Oltramare,** Prof. in Genf. **H. Poincaré,** Prof. in Paris. **J. Rebstein,** Assistent am eidg. Polytechnikum Zürich. **F. Rudio,** Prof. am eidg. Polytechnikum Zürich. **K. Vondermühll,** Prof. in Basel. **F. H. Weber,** Prof. am eidg. Polytechnikum Zürich.

(Korrespondenzen in Angelegenheiten des Kongresses sind an Prof. Geiser, Küsnacht-Zürich zu richten.)

# Rezensionen.

**Abriss des geometrischen Kalküls.** Nach den Werken Grassmanns bearbeitet von FERD. KRAFT, Privatdozent an der Universität Zürich. Leipzig 1893. B. G. Teubner. XII und 255 S.

Die Einleitung (16 S.) entwickelt im Anschluss an Grassmanns $A_1$ hauptsächlich die wichtigsten Sätze aus der „allgemeinen Formenlehre“, die sich damit befasst, die Gesetze aufzustellen, die allen mathematischen Operationen oder gewissen Klassen derselben gemeinsam sind.

Das erste Kapitel (46 S.) behandelt die geometrische Addition der Vektoren und die Summation der Punktgrössen. Die Auffassung der Zusammensetzung von Vektoren als Addition derselben wird hierbei in bekannter Weise motiviert; nicht so bei den Punktgrössen. Denn ein Satz wie „Weil Gleiches zu Gleichem addiert Gleiches giebt, so wird die Summe der Punktgrössen eines Punktvereins eine gewisse Punktgrösse sein“ (S. 36) kann doch höchstens als argumentum ad hominem gelten, ist übrigens nicht richtig, wenn die Summe der Gewichte der Punktgrössen Null ist (der Verfasser unterscheidet sonst zwischen Punktgrössen und Strecken). Es hätte sich auch hier bei dieser fundamentalen Angelegenheit des § 8 empfohlen, auf die leitenden Gedanken Grassmanns ($A_1$ § 94—96) zurückzugehen, damit dem Leser Einführungen wie $A = A + R - R$ nicht bloss als formale Kunstgriffe erscheinen. Es folgen einige einfache Anwendungen, z. B. die Bestimmung eines Polygons ungerader Seitenanzahl aus den Mittelpunkten der Seiten, der Satz von Desargues über perspektive Dreiecke, harmonische Teilung der Diagonalen eines vollständigen Vierseits.

Das zweite Kapitel (7 S.) behandelt in engem Anschluss an die einfachsten Teile des betreffenden Abschnitts in Schlegels „System der Raumlehre, I.“ die Anwendung der imaginären Einheit als Drehungsfaktor in der Ebene.

Das dritte Kapitel (30 S.) entwickelt die Theorie der äusseren Produkte, sowohl von Strecken als von Punkten nebst einigen Anwendungen (z. B. Gleichungen der Geraden und der Ebene in der einfachsten Form, Beweis des Satzes, dass die Mittelpunkte der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits in einer Geraden liegen).

Im vierten Kapitel (129 S.) wird der Begriff der Ergänzung eingeführt und der des inneren Produktes als des (äusseren) Produktes eines Faktors

in die Ergänzung des zweiten. Alle damit zusammenhängenden Rechnungen werden gesondert für Strecken und Punktgrössen und für die Systeme der verschiedenen Stufen durchgeführt und Anwendungen eingeflochten (Kreisgleichung, Beweis des Satzes von Euler über drei merkwürdige Punkte des Dreiecks in gerader Linie, die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie). Die Theorie der gemischten Produkte wird soweit entwickelt, um damit die projektive Erzeugung der Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse, der Regelflächen zweiter Ordnung und den Satz von Pascal behandeln zu können. Die Reduktion von Linienteilen (Kräften) auf verschiedene einfachste Formen wird durchgeführt. Schliesslich werden die einfachsten Determinantensätze aus der Theorie der Multiplikation der aus $n$ Einheiten gebildeten Zahlen abgeleitet.

Das letzte Kapitel (27 S.) behandelt anhangsweise die Elemente der Quaternionenlehre, anfänglich den Ideen Grassmanns folgend („Der Ort der Hamiltonschen Quaternionen in der Ausdehnungslehre", Math. Ann. XII), später auch mit Benützung der Werke Hamiltons.

Manche Stellen lassen auf flüchtige Stilisierung schliessen, so auf S. 74 der Satz: „Besteht zwischen ihnen (zwei Spatheckflächen) die Gleichung $\alpha\beta = m\gamma\delta$, dann fragt es sich, unter welchen Verhältnissen diese Gleichung richtig ist"; ferner der gesperrt gedruckte Satz auf S. 46. Im § 7, letzter Absatz, wird der Ausdruck „Abweichung eines Punktes $B$ von einem Punkte $A$" gebraucht, ohne vorher definiert worden zu sein.

Es kommen aber auch mehrere wirkliche Fehler vor, von denen wir einige Proben zur Charakterisierung des Buches mitteilen müssen: Auf S. 42 oben wird irrtümlich behauptet, dass von drei Grössen ersten Grades, zwischen denen eine Zahlbeziehung besteht, zwei Strecken sein können, die dritte geltendes Gewicht haben kann. Ein ähnlicher Fehler findet sich am Schluss des folgenden § 10. — Die Ableitung der Gleichung 3) auf S. 129 ist ganz unbefriedigend; der Verfasser hätte nach seiner Methode ebensogut die Gleichung 1) links mit $\varepsilon_1$ statt mit $\varepsilon_2$ multiplizieren können und dann die Forderung $\varepsilon_1 \varepsilon = 0$ bekommen. Für die gemischten Produkte, die hier auftreten, gilt eben nicht mehr das associative Gesetz. — Auf S. 140 wird aus den Gleichungen:

$$(\alpha - \beta) | (\gamma - \delta) = 0,$$
$$(\beta' - \alpha') | (\gamma - \delta) = 0$$

geschlossen, dass die Strecken $\alpha - \beta$ und $\beta' - \alpha'$ parallel sind, was auf die Behauptung hinauskommt, dass zwei Strecken im Raum parallel sind, wenn sie auf derselben dritten senkrecht stehn(!). In der That ist der folgende Satz: „Die Kanten der Pyramide über den Fusspunkten der Höhenstrecken sind parallel zu den gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders" sogar für die in Rede stehenden speziellen Tetraeder falsch, deren Höhen sich in einem Punkte schneiden.

Der Verfasser hat also keinen Grund gehabt, durch den selbstgefälligen Ton der Vorrede, in der manche benützten Quellen zwar nebenher genannt

aber nicht als solche bezeichnet sind, die Erwartungen der Leser höher zu spannen und ihre Kritik herauszufordern. Z. B. sagt er: „An diesen Grundriss sollen sich in Bälde kleinere Lehrbücher für die höhere Geometrie und die theoretische Mechanik fügen, ... denn erst dann kann die Tragweite der Schöpfung Grassmanns in weiteren Kreisen in richtiger Weise erfasst werden." Auch wenn der Verfasser billigen Anforderungen an Korrektheit genügt hätte (um von Forderungen positiver Vorzüge nicht zu reden), so käme er doch als alleiniger Apostel Grassmanns zu spät. Dies zeigt nicht nur das lange Litteratur-Verzeichnis, das Schlegel vor kurzem in dieser Zeitschrift veröffentlicht hat („Die Grassmannsche Ausdehnungslehre"), sondern auch der Umstand, dass die Ausdehnungslehre und verwandte Gebiete nicht nur von den berufsmässigen Vertretern der Mathematik, sondern auch von Physikern gekannt und gewürdigt werden (siehe Föppls Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität) und zwar in weiterem Umfange, als sie durch Krafts Buch geboten werden, das ja die Infinitesimalgeometrie der Ausdehnungslehre nicht mehr behandelt.

KONRAD ZINDLER.

---

**Didaktik und Methodik des Rechnen-, Mathematik- und Physik-Unterrichts*** von Dr. MAX SIMON, Professor am Lyceum in Strassburg und Dr. J. KIESSLING, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Sonderausgabe aus Dr. A. BAUMEISTERS „Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen." München 1895. C. H. Becksche Verlagsbuchhandlung (Oskar Beck).

Das Werk besteht aus zwei voneinander völlig unabhängigen Teilen: der erste umfangreichere Teil (128 S.), bearbeitet von dem zuerst genannten, durch seine Elemente der Arithmetik und Geometrie wohlbekannten Verfasser, handelt vom Unterricht in Rechnen und Mathematik, der zweite Teil (73 S.) ist dem Unterricht in Physik gewidmet. Es liegt in der Natur der behandelten Gegenstände, dass der Leser in manchen Punkten eine von den entwickelten Ansichten bald mehr, bald weniger abweichende, in Einzelheiten auch wohl die gerade entgegengesetzte Ansicht hat, doch wird man im allgemeinen den beiden Herren Verfassern beistimmen. „Die Darstellung beansprucht keineswegs Vorschriften aufzustellen, wie es gemacht werden soll, sondern sucht nur zu zeigen, wie es gemacht werden kann, und in einzelnen Fällen, wie es trotz langjähriger Tradition nicht gemacht werden darf" (II. Teil S. 3). Das ganze aus reicher Erfahrung und gründlichem Studium hervorgegangene Werk bietet in didaktischer und methodischer Hinsicht viele Anregung und Belehrung, dazu eine reiche Fülle von Litteraturangaben, so dass jeder Anfänger in unserem Lehrfache das Buch gründlich studieren sollte, vielleicht würde die Lektüre desselben auch

* So der Titel; die sprachlich richtige Form: „Didaktik und Methodik des Unterrichts in Rechnen, Mathematik und Physik" findet sich auf der letzten Seite des Buches.

manchem älteren Lehrer von Nutzen sein, und einige Kapitel mehr allgemeineren Inhaltes dürften auch für den Nichtmathematiker Interesse haben. Als ich das Buch gelesen hatte, kam mir folgende Stelle aus A. W. Hofmanns trefflicher „Einleitung in die moderne Chemie" in den Sinn: „Es führen der Wege viele in ein unbekanntes Land, und die langgestreckte Grenze kann an zahllosen Punkten überschritten werden. Allein nicht alle Strassen sind gleichgebahnt, nicht alle Übergänge mit derselben Leichtigkeit zu bewerkstelligen. Von dem Führer, der uns begleitet, erwarten wir, dass er uns kurze und sichere Wege zeige, auf denen wir nebenbei des Anziehenden sehen, des Nützlichen lernen." Ja, als ein solcher weges- und landeskundiger Führer wird sich das vortreffliche, inhaltsreiche Buch gewiss erweisen, das wohl verdiente, Kapitel für Kapitel besprochen zu werden, wie es ursprünglich beabsichtigt war, doch dazu wäre ein Vielfaches des hier zur Verfügung stehenden Raumes nötig gewesen. Es muss sich daher diese Besprechung darauf beschränken, nur ganz wenige Punkte herauszugreifen, um daran einige Bemerkungen anzuschliessen.

Im dritten Kapitel, „der Rechenunterricht", sagt der Verfasser (S. 44), dass die Bezeichnung entgegengesetzte Grössen richtiger ist als negative. Die dafür gebrachte Begründung wird nicht jeder Leser anerkennen. Die negativen Zahlen bilden den Gegensatz zu den positiven, aber auch umgekehrt; jede der beiden Klassen von Zahlen ist der andern entgegengesetzt. Daher ist die bis jetzt gebräuchliche Bezeichnung mindestens so zutreffend wie die vom Verfasser bevorzugte.

Im sechsten Kapitel heisst es (S. 72): „Übrigens ist die geometrische Anschauung keineswegs rein räumliche, die Zeit spielt mit hinein, schon um die Figur aufzufassen (zu durchlaufen) brauchen wir Zeit." Wenn wir auch Zeit brauchen, um eine Figur aufzufassen, so hat doch die Zeit mit der fertigen geometrischen Anschauung nichts zu thun. Hiermit sei verglichen, was Herr Simon S. 39 sagt: „Was die Zeit betrifft, so brauchen wir zum Zählen allerdings Zeit, aber sehr richtig sagt Michaelis: (über Kants Zahlbegriff, Charlottenschule, Berlin 1884)" „„Sowenig die Nadel, die das Kleid genäht hat, ein Teil des fertigen Gewandes ist, ebensowenig ist die Zeit, die zum Zählen gehört, ein Element des fertigen Zahlbegriffes.""

So wichtig auch der Grenzbegriff ist, so wird derselbe doch an manchen Stellen zu stark betont, z. B. im Abschnitt über den Winkel, dem wohl nur wenige Leser zustimmen werden. Mag auch der Weg, auf welchem Herr Simon die Schüler in den Winkel einführen will, an sich recht schön erscheinen, so werden doch wohl nur wenige die angegebene Definition aufnehmen: „Der Winkel wird demzufolge definiert als die Grenze des Kreissektors bei fortwährend und über jedes Maß wachsendem Radius" (S. 83). Der Verfasser schreibt selbst seiner Auffassung den Vorzug zu, dass sie die beiden Hauptanschauungen: die Bertrandsche (Flächengrösse) und die Tribantsche (Drehungsgrösse) vereinige (— natürlich —, weil dies schon vorher in den Kreis hineingelegt wurde). Der Kreissektor ist nun aber eine ringsum geschlossene Figur; zu ihm gehört der Kreisbogen genau

so gut wie die beiden Radien, es muss der Bogen ebenso scharf angeschaut und klar aufgefasst werden wie die Radien. Daher lässt sich der Winkel auch nicht durch den Kreissektor definieren.

Bezüglich der Differentialrechnung heisst es S. 108: „Will der Lehrer Differentialrechnung treiben, so hindere man ihn nicht, vorausgesetzt, dass er das Notwendige absolviert hat.“ Wenn mit „dem Notwendigen“ alles das bezeichnet wird, was der Verfasser angegeben hat, und wenn unter „absolvieren“ verstanden wird, dass das Angegebene gründlich durchgearbeitet, also nicht bloss einmal besprochen wird, so wird es wohl zur Differentialrechnung wenig kommen, und das ist auch nicht zu bedauern. Um von der Differentialrechnung ein Stück in solchem Umfang und solcher Tiefe durchzunehmen, dass wirklich die Bezeichnung Differentialrechnung berechtigt ist, bedarf es so vieler Stunden, als wohl nie dafür zur Verfügung stehen. Schon an sich scheint mir das Pensum, wie es Herr Simon skizziert, reichlich bemessen zu sein, und wohl nur bei einem sogenannten guten Jahrgang wird man alles in gehöriger Tiefe verarbeiten können, vorausgesetzt, dass sich der Lehrer mit der ganzen Klasse beschäftigt und nicht bloss mit einigen wenigen, die sich besonders für mathematische Dinge interessieren.

Von den trefflichen Ausführungen des zweiten der Physik gewidmeten Teiles sei besonders hervorgehoben, was der Verfasser über Lehrapparat (Ausarbeitung eines Experimentierbuches), dogmatische Behandlungsweise, Stellung der Hypothese im Unterricht und das Verhältnis des physikalischen zum mathematischen Unterricht sagt. Dagegen dürfte die S. 16 mitgeteilte, auf drei Semester berechnete Stoffauswahl für die Unterstufe nach dem Vorschlage von Börner wohl zum Widerspruch reizen. Dieselbe enthält viel zu viel und steht mehrfach den vom Verfasser selbst aufgestellten oder gebilligten Grundsätzen entgegen. In elf Stunden soll z. B. aus der Wärmelehre durchgenommen werden: „Ausdehnung, Thermometer, unregelmässige Ausdehnung des Wassers, Schmelzen und Erstarren, Auflösen (Krystallbildung), Verdunsten, Verdampfen, Verdichten, Abhängigkeit des Siedepunktes vom Druck. Dampfstrahlpumpe, Dampfmaschine (Gaskraftmaschine). — Wärmeleitung, Wärmestrahlung (Nachweis, dass dunkle Wärmestrahlen dieselben Gesetze befolgen wie die Lichtstrahlen. Abhängigkeit der Absorption von der Oberfläche). — Quellen der Wärme (Reibung, Zusammendrücken von Gasen).“ Selbst, wenn der Lehrer alles genau vorbereitet und jede Minute ausnützt, dürfte es sehr schwer fallen, wenn nicht unmöglich sein, das alles in elf Stunden „in ausreichender Weise zu erledigen“, wie dies S. 17 hingestellt wird.

Das letzte Kapitel enthält „Bemerkungen zu den einzelnen Erscheinungsgebieten.“ Dieselben beziehen sich nach dem Ausspruch des Verfassers auf solche Punkte, deren Erledigung beim Unterricht dem Verständnis Schwierigkeiten mannigfaltigster Art bereitet, oder deren landläufige Behandlungsweise sich als unzweckmässig erwiesen hat. Gerade durch diese Bemerkungen hat sich der Verfasser, der teils eigene, teils fremde, in Zeitschriften zer-

streute Ansichten bringt, ein grosses Verdienst erworben, woran auch dann nichts geändert wird, wenn sich dieser oder jener Leser in wenigen Einzelheiten zum Widerspruch veranlasst sieht.

MÜLLER.

---

AD. MEYER, **Laerebog i Algebra.** Kjøbenhavn 1895. Lehmann & Stages Forlag.

Das vorliegende Buch hat als ein in dänischer Sprache geschriebenes elementares Lehrbuch der Algebra für den deutschen Studierenden kein direktes Interesse; es erscheint demnach hier nur eine kurze Angabe der Stellung und des Umfangs des Buches angezeigt.

Der Herr Verfasser hat sein Buch für den vorbereitenden mathematischen Unterricht an den polytechnischen Lehranstalten bestimmt. Dementsprechend wird ein tieferes Eingehen auf Stetigkeit und Grenzbegriff gemieden, in der Gleichungstheorie bleiben die modernen gruppentheoretischen Entwickelungen natürlich ganz ausserhalb, und auch der arithmetische Abschnitt bringt nur die ersten Elemente. Solche Stellen, an denen der Verfasser dem Bestreben nach tiefer gehender Begründung nachgegeben hat, sind durch kleineren Druck kenntlich gemacht. In letzterer Hinsicht finden wir eine an die Cantorschen Methoden sich anlehnende Theorie der irrationalen Zahlen, eine genauere Theorie der Potenzen mit irrationalen Exponenten; auch zahlreiche Entwickelungen des algebraischen Teils, so die Theoreme von Budan und Sturm, Entwickelungen über Interpolationsrechnung, über Eliminationstheorie u. s. w. sind in der genannten Art als für das erste Studium nicht in Betracht kommend gekennzeichnet.

Der ganze Stoff ist in drei Abschnitte angeordnet. Beim ersten passt indessen die Überschrift (Lehre von den irrationalen Grössen) nicht recht; denn hier werden auch ein paar Grundbegriffe, die Funktionen betreffend, entwickelt, die ersten Grundsätze über Logarithmen werden gegeben, und ein kurzer Abriss über Rentenrechnung wird dargeboten. Die Überschrift des zweiten Abschnitts (Lehre von den Gleichungen) trifft besser. Übrigens ist befremdend, dass gegenüber den reichlichen Ausführungen über binomische Gleichungen, sowie Gleichungen höheren Grades mit mehreren Unbekannten nirgends der direkten Auflösungsmethoden der Gleichungen dritten und vierten Grades gedacht wird. Der dritte Abschnitt hat überhaupt keine gemeinsame Überschrift. Derselbe ist den Elementen der Zahlentheorie gewidmet; vorausgeschickt werden einige Bemerkungen über arithmetische und geometrische Reihen.

Die Darstellung erscheint im einzelnen klar angeordnet, und das Buch ist für das einführende Studium wohl geeignet.

FRICKE.

---

E. PASCAL, **Teoria delle funzioni ellittiche.** Milano 1896. U. Hoepli. Preis 1,50 Lire.

Dieses Buch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, welche der Herr Verfasser an der Universität zu Pavia im Laufe der beiden verflossenen

Jahre gehalten hat. Es handelt sich im wesentlichen um eine Theorie der doppeltperiodischen Funktionen, wobei als Eingang der Weg gewählt wird, welchen Jacobi in seiner „Theorie der elliptischen Funktionen, aus den Eigenschaften der $\vartheta$-Reihen abgeleitet" eröffnet hat. Dementsprechend steht die Behandlung der $\vartheta$-Funktionen und der Jacobischen Funktionen $sn$, $cn$, $dn$ voran. Doch werden im Anschluss hieran die Weierstrassschen Funktionen $\sigma(u)$, $p(u)$, $p'(u)$ mit gleicher Ausführlichkeit behandelt. Herr Pascal ist als Kenner der modernen Funktionentheorie und namentlich ihrer invariantentheoretischen Seite bestens bekannt. Diese Richtung kommt auch im vorliegenden Buche mehrfach zum Ausdruck, namentlich in den letzten Kapiteln, welche von den elliptischen Integralen und von der invariantentheoretischen Darstellung der Funktionen $\sigma, p$, etc. unter Zugrundelegung einer allgemeinen binären biquadratischen Form handeln. Übrigens nehmen sich diese beiden Kapitel im Vergleich zu den vier ersten (über die Funktionen $\vartheta$, $sn, \ldots \sigma, p, \ldots$) mehr nur als ein Anhang aus. Das algebraische Fundament der Theorie tritt überall zurück, Riemannsche Vorstellungen werden nicht entwickelt, was natürlich einen weit grösseren Raum beansprucht haben würde. Sachlich liegen die Entwickelungen lange fest, nur dass vielleicht hier und da infolge der gewählten Disposition eine geringe Abweichung von dem sonst Herkömmlichen geboten schien. So macht der Herr Verfasser beim Übergang von der Funktion $\vartheta_1$ zu $\sigma$ Gebrauch von den Nullwerten auch der zweiten und dritten Ableitungen der $\vartheta$-Funktionen, der durch $D$ symbolisch bezeichnete invariante Prozess wird transcendent definiert (gegenüber der algebraischen Definition Halphens) und dergleichen mehr. Innerhalb der gesteckten Grenzen bringt der Verfasser in knapper präziser Darstellung stets das Wesentlichste des Gegenstandes. Die äussere Form des Buches ist rühmenswert; es ist in Taschenformat klar und übersichtlich gedruckt und hat einen Umfang von 27 Seiten.

FRICKE.

---

C. G. J. JACOBI, **Über die vierfach periodischen Funktionen zweier Variabeln** (1834).

A. GÖPEL, **Entwurf einer Theorie der Abelschen Transcendenten erster Ordnung** (1847).

G. ROSENHAIN, **Abhandlung über die Funktionen zweier Variablen mit vier Perioden** (1851). Herausgegeben unter Nr. 64, 67, 65 in der Ostwaldschen Sammlung der Klassiker der exakten Wissenschaften von H. WEBER, übersetzt aus dem Lateinischen bez. Französischen durch A. WITTING. Leipzig 1895. Engelmann.

Den bisher in die Ostwaldsche Sammlung aufgenommenen mathematischen Untersuchungen reihen sich nun auch die drei berühmten in der Überschrift genannten Abhandlungen an, welche dem klassischen Schatze der Funktionentheorie angehören. Handelt es sich doch hier um drei epochemachende Arbeiten in der Begründung der vor — Riemannschen Theorie

der Abelschen Funktionen. Die Herren Weber und Witting haben in dankenswerter Umsicht die Neuausgaben der fraglichen drei Abhandlungen besorgt, und zumal hat ersterer durch eine Reihe wertvoller Anmerkungen den Text ergänzt und erläutert. So ist der Jacobischen Abhandlung eine längere Note über die neuere Geschichte der Frage nach den mehr- als — doppeltperiodischen Funktionen einer Variabeln angefügt. Riemann hat in dieser Frage besonders aufklärend gewirkt; neben ihm ist es namentlich Casorati, welcher dem Gegenstande mehrere Untersuchungen widmete. Der zweiten Abhandlung sind auch die biographischen Mitteilungen Jacobis und Crelles über die interessante Persönlichkeit Göpels angefügt.

Die Fortführung des Ostwaldschen Unternehmens auch für die Mathematik wird man gewiss allerseits lebhaft begrüssen. Fricke.

---

W. Wirtinger, **Untersuchungen über Thetafunktionen.** Leipzig 1895. B. G. Teubner.

Die vorliegende Arbeit des Herrn Wirtinger, welche von der philosophischen Fakultät der Universität in Göttingen durch Erteilung des Benecke-Preises ausgezeichnet wurde, bedeutet einen wesentlichen Fortschritt in der Theorie der allgemeinen $\vartheta$-Funktionen von $p$ Variabelen. Es handelt sich um zwei getrennte Untersuchungen, von denen die erste dem allgemeinen Falle gilt, während die zweite einer besonderen Klasse von Thetafunktionen gewidmet ist. Im ersten Teile (die allgemeine Untersuchung) steht eine $p$-dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit $M_p$ der Ordnung $2^{p-1}.p!$ im Raume von $(2^p-1)$ Dimensionen im Centrum der Untersuchung. Dieses Gebilde $M_p$ gewinnt man dadurch, dass man $2^p$ linear-unabhängige Thetafunktionen zweiter Ordnung der Charakteristik $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ als homogene Punktkoordinaten eines Raumes von $(2^p-1)$ Dimensionen ansetzt. Das einzelne Wertsystem der $p$ Variabeln $v_1, v_2, \ldots v_p$ der Thetafunktionen liefert dann einen bestimmten Punkt des Raumes, und letzterer Punkt beschreibt bei beliebig variabel gedachten $v_1, \ldots, v_p$ die Mannigfaltigkeit $M_p$. Dem einzelnen Punkte des Gebildes $M_p$ korrespondieren unendlich viele Wertsysteme $v_1, \ldots, v_p$; denn wir können, ohne die Verhältnisse der Theta zu ändern, das System $v_1, \ldots, v_p$ um ein beliebiges System simultaner Perioden ändern, sowie andererseits beliebige Zeichenwechsel der Argumente vornehmen, da es sich um gerade Thetafunktionen handelt. Für $p=2$ ist $M_2$ die Kummersche Fläche im Raume $R_3$, und wir kommen auf die bekannte Borchardtsche Darstellung der Kummerschen Fläche durch Thetafunktionen zweier Variabeln zurück; man kann somit sagen, dass es sich hier um eine Verallgemeinerung des Borchardtschen Ansatzes auf beliebige $p$ handelt. Auf den Fall $p=2$ ist neuestens Humbert mit grosser Ausführlichkeit eingegangen; es werden insbesondere die auf der Kummerschen Fläche gelegenen Kurven und zugehörigen besonderen $\vartheta$-Funktionen näher untersucht. Der von Wirtinger behandelte allgemeine Fall bot natürlich

weit grössere Schwierigkeiten und konnte demnach nicht so weit in die Einzelheiten verfolgt werden. Schon bei der Bestimmung der Ordnung der Mannigfaltigkeit $M_p$ und des Geschlechts der Schnittkurven, welche durch $(p-1)$ Gleichungen gegebener Grade dargestellt werden, sind Hilbertsche Prinzipien über Moduln und deren charakteristische Funktionen heranzuziehen. Auch bei der algebraischen Darstellung der Mannigfaltigkeit $M_p$ werden jene Prinzipien fundamental. Es zeigt sich, dass keine Mannigfaltigkeiten zweiten Grades bei allgemeinen Moduln $\tau_{ik}$ durch $M_p$ gelegt werden können. Mannigfaltigkeiten dritten Grades kommen zwar für $p > 2$ vor. Dagegen sind die Relationen vierten Grades zweckmässiger; durch diese wird das Gebilde $M_p$ in der That rein dargestellt. Durch Untersuchungen dieser Art fördert Herr Wirtinger die Theorie des Gebildes $M_p$ soweit, dass diese Mannigfaltigkeit „in Zukunft als algebraisch bekannt anzusehen und ein Problem als theoretisch gelöst zu betrachten ist, falls es gelingt, dasselbe algebraisch auf der $M_p$ zu formulieren." Als eine erste Anwendung folgt nunmehr eine schöne Theorie der auf der Mannigfaltigkeit $M_p$ gelegenen algebraischen Kurven, welche durch $(p-1)$ Gleichungen der Grade $n_1, \ldots, n_{p-1}$ ausgeschnitten werden. Hierdurch entspringt im Einzelfalle ein algebraisches Gebilde mit einer unabhängigen Variabeln, für welches doch wenigstens das Geschlecht $p'$ hier angegeben werden soll:

$$p' = 1 + p!\, 2^{p-2} . \prod_{i=1}^{p-1} n_i . \sum_{i=1}^{p-1} n_i .$$

Hier bietet sich nun weiter die Aufgabe dar, die Theta der $M_p$ mit den Riemannschen Theta sowie überhaupt der Riemannschen Theorie der fraglichen algebraischen Gebilde ausführlich in Beziehung zu setzen; dieser Aufgabe ist der Schluss des ersten Teiles gewidmet. Die Ergebnisse, betreffend den Übergang von den Riemannschen Theta zu den allgemeinen vermöge Ausübung einer bestimmten Transformation und Abspaltung gewisser Faktoren dürften dabei als die wichtigsten anzusehen sein.

Die Spezialentwickelungen des zweiten Teils haben insbesondere den Zweck, die allgemeinen Ergebnisse über die Beziehung der Riemannschen Theta zu den allgemeinen an aussichtsreichen Einzelfällen weiter zu verfolgen.

Es werden hier Flächen herangezogen, welche durch Übereinanderlagerung und zweckentsprechende Verzweigung aus $n$ kongruenten Riemannschen Flächen aufgebaut sind. Ist $p'$ das Geschlecht der einzelnen dieser Flächen, $\pi$ dasjenige der entspringenden Gesamtfläche und $2k$ die Anzahl der Verzweigungspunkte, so ist:

$$2\pi - 2 = 2k + n(2p' - 2).$$

Hier führt nun (in Übereinstimmung mit den allgemeinen Ergebnissen des ersten Teils) eine Transformation $n^{\text{ten}}$ Grades die Riemannschen Theta der grossen Fläche in Gestalten über, bei welchen sie in die Riemannschen Theta von $p'$ Variabelen der kleinen Fläche, sowie in weitere Theta von $(\pi - p')$ Variabelen zerfallen. Letztere können für $n = 2$, $k \leq 3$ all-

gemeinere als Riemannsche Theta sein. Die Fortführung der Entwickelung bezieht sich auf den Fall $n = 2$, $k = 0$, für welchen der genannte Ansatz eine allseitige Untersuchung findet.

FRICKE.

---

**Manuali Hoepli.** Ottica del professore EUGENIO GELCICH. Con 217 incisioni. ULRICO HOEPLI, editore-libraio della real casa Milano 1895. — 576 Seiten. Preis 6 Lire.

Im grossen und ganzen weicht die Behandlung des Stoffes von der üblichen nicht ab. Von den fünf Abschnitten, in welche das Buch zerfällt, sind die drei ersten und überwiegend grössten der eigentlichen Lehre des Lichts gewidmet, nämlich der erste der Dioptrik, Katoptrik und Dispersion, der zweite den optischen Instrumenten und der dritte der Interferenz und Polarisation. Während der vierte die optischen Phänomene der Atmosphäre zum Gegenstand hat, so sind in dem fünften verschiedene wichtige Notizen über die Optik enthalten, wie z. B. über die Geschwindigkeit des Lichts und dergleichen mehr. Zum Verständnis des Buches werden keine grösseren Anforderungen an Mathematik gestellt, es genügen die Kenntnisse unserer Gymnasien. — Während sich über den Druck nur Gutes sagen lässt, so kann dies bezüglich der Figuren leider nicht geschehen. Die schematischen Figuren sind nicht einheitlich durchgeführt, die meisten bestehen aus schwarzen Strichen auf weissem Grund, während einige wieder weisse Striche auf schwarzem Grund aufweisen, z. B. Fig. 32, 168, 169, 170; die einen umrahmt, die anderen nicht (Fig. 179 und 180); auch die Strichdicke variiert sehr stark, vergleiche Fig. 168 und 204. Dabei sind die Striche vielfach nicht rein. Die perspektivischen Abbildungen sind in den meisten Fällen nicht mustergiltig, vielfach undeutlich und häufig auch zu klein. Diese Mängel dürften bei einer Neuauflage wohl zu berücksichtigen sein. — Am Schluss des Werkes ist ein Verzeichnis von Werken über Optik angeführt, worin Deutschland gut vertreten ist.

B. NEBEL.

---

**Die Projektions-Einrichtung** und besondere Versuchsanordnungen für physikalische, chemische, mikroskopische und physiologische Demonstrationen am Grazer physiologischen Institute; als Leitfaden bei Anlagen und Versuchen beschrieben von OSKAR ZOTH. Mit 25 Abbildungen im Texte und 6 Tafeln. Wien. Pest. Leipzig. A. Hartlebens Verlag. — 88 Seiten.

Das Werkchen giebt in Bild und Wort eingehenden Aufschluss über die Projektionseinrichtungen an dem Grazer physiologischen Institute, so dass sich jeder, der nicht, wie der Elektrotechniker und Physiker, mit derlei Dingen vertraut ist, ergiebigen Rat holen kann, was aus den Spezialwerken für Elektrotechnik und Physik für den Nichtfachmann nur mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist. Die Mitteilung der Kostenüberschläge bewahrt jeden vor empfindlichen Täuschungen.

B. NEBEL.

**Mathematische Theorie des Lichtes.** Vorlesungen gehalten von H. Poincaré. Redigiert von J. Blondin. Autorisierte deutsche Ausgabe von E. Gumlich und W. Jäger. Mit 35 in den Text gedruckten Figuren. Berlin 1894. Verlag von Julius Springer. — 295 Seiten. Preis 10 Mark.

Wir danken es den Herren Übersetzern, dass sie dieses verdienstvolle Werk von Poincaré dem deutschen Publikum zugänglicher gemacht haben. Lange hat der Kampf zwischen den Erfindern und deren Anhänger über die Richtigkeit der von ihnen aufgestellten Theorien des Lichtes gedauert, der indirekt von grossem Nutzen für die Optik selbst war. Noch ist nicht endgiltig die Entscheidung zwischen der Theorie von Fresnel und Neumann gefallen, da die experimentellen Untersuchungen neue Schwierigkeiten und infolgedessen neue Einwände heraufbeschwören. Es ist daher für alle, welche sich für die Fragen interessieren, von grossem Wert, statt die Theorien mühsam aus den Originalwerken erst heraussuchen zu müssen, dieselben in Kürze gegenübergestellt zu besitzen. Poincaré versteht es vorzüglich, sich von dem Bann der optischen Theorien völlig frei zu machen, und dieselben als das zu kennzeichnen, was sie in Wirklichkeit sind. Dadurch beherrscht er dieselben und steht über ihnen. Ein solches Beherrschen der verschiedenen Theorien wirkt sehr anregend, weshalb das Buch den jungen Physikern aufs wärmste zum Studium empfohlen wird, sobald sie mit den Gesetzen der Optik hinreichend vertraut sind.

Das Ergebnis, welches die Prüfung mehrerer Theorien nebeneinander hinsichtlich einer guten Erklärung der Beobachtungen ergiebt, besteht in der Einordnung aller dieser Theorien in zwei Gruppen, von denen die eine die Elastizität des Mediums als konstant vorausgesetzt wird, wie dies bei Fresnel der Fall ist, während bei der anderen die Dichte des Äthers unveränderlich ist. Der Vertreter der letzteren ist Neumann. Möge das Buch die Anregung zu neuen experimentellen Beweisen für die eine oder die andere Theorie geben; denn nur auf diesem Wege kommen wir dem Ziele näher!

B. Nebel.

---

**Im Reiche des Lichtes.** Sonnen, Zodiakallichte, Kometen, Dämmerungslicht-Pyramiden nach den ältesten ägyptischen Quellen. Von Hermann Gruson. Zweite gänzlich umgearbeitete Auflage. Mit 57 Figuren und 8 Tafeln, zum Teil in farbiger Ausführung. Braunschweig 1895. Verlag von George Westermann. — 263 Seiten. Preis 8 Mark.

Die meisten der bisherigen Theorien über die Natur der Sonne und der auf ihr beobachteten Veränderungen lassen den Zusammenhang mit Vorgängen auf unserer Erde vermissen, tragen daher den Stempel der Unwahrscheinlichkeit an sich und müssen in Ermangelung eines Besseren eben hingenommen werden als Produkte der Studierstube. Die vorliegende Theorie ist dem Gebiete der Praxis entsprungen, indem der Verfasser, als Besitzer der grössten Eisengiesserei der Welt, durch sorgfältiges Beobachten und ziel-

bewusste Versuche eine Basis geschaffen hat, auf die er aufbauen kann, so dass seine Anschauungen nicht als leere Phantasiegebilde in der Luft schweben. Den Fundamentalversuch stellte er mit einer eisernen Flasche an, die der Schweisstemperatur von circa 1500 Grad ausgesetzt wurde. Durch die Wärme wurde die Luft verdünnt, sodass nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes eine Mischung von Luft und Wärme der äusseren Atmosphäre das Gleichgewicht hielt. Im vorliegenden Versuch ergaben die Messungen, dass der Flascheninhalt aus $^1/_4$ Luft und $^3/_4$ Wärme bestand. Daraus folgt, je höher die Temperatur ist, um so weniger wird Luft vorhanden sein. Infolge der ungeheueren Temperatur auf der Sonne wird das Luft- bezw. Gasquantum so verschwindend klein sein, dass die die Sonne umgebende, zunächst gelegene Schicht als Vacuum aufgefasst werden kann, an welche sich eine an Dichte zunehmende Gasschicht anschliesst, die nach dem Äther relativ steil abfällt. Das granulierte Aussehen der Sonnenoberfläche, sowie das Auftreten der Sonnenflecke werden auf Erscheinungen zurückführt, die sich im Kleinen auch beim geschmolzenen Eisen beobachten lassen. Infolge der die Sonne umgebenden Lichtbrechungssphäre müssen die Flecken dunkel erscheinen. Da die Sonnenmaterie fortwährend in Bewegung begriffen ist, indem die Teile an der Oberfläche von dem Äquator nach den Polen hin abfliessen und von da nach dem Sonnencentrum zurückkehren, so folgt, dass die Entstehung der Sonnenwärme nicht auf Verbrennungsprozessen, sondern nur auf Reibung und Stoss infolge der verschiedenen Geschwindigkeit der Teile auf ihrer Bahn beruhen kann. In enger Beziehung damit steht auch die Erklärung der Sonnenfackeln und Protuberanzen. Nach Aufstellung der Theorie über die Sonnenstrahlung erklärt sich leicht das Flimmern der Fixsterne, sowie die Sonnenkorona. Ein besonderes Kapitel wird den Kometen gewidmet, dessen Schweif auf ungezwungene Weise mit Hilfe der Theorie über die Strahlung erklärt wird; auch das rätselhafte Aufleuchten und Verschwinden der Sterne wird als eine natürliche Folge dieser Theorie hingestellt. Die letzte Abteilung ist dem Tierkreislicht vorbehalten, welches der Verfasser in seinen schönsten Erscheinungen am Nil selbst beobachtet hat. Seine Entstehung wird auf die Reflexion der Sonnenstrahlen an der Atmosphäre zurückgeführt; es ist demnach eine Dämmerungserscheinung, deren Zustandekommen gewissen Bedingungen unterliegt, auf welche der Verfasser näher aufmerksam macht. Mit grosser Befriedigung und Spannung folgt man den einfachen Auseinandersetzungen. Jedem Naturfreund wird daher das treffliche Buch bestens empfohlen.

B. Nebel.

---

**Handbuch der Photographie.** Von Prof. Dr. H. W. Vogel. Vier Teile, enthaltend die photographische Chemie, Optik, Praxis und Kunstlehre. II. Teil: Das Licht im Dienste der Photographie und die neuesten Fortschritte der photographischen Optik. Vierte, gänzlich umgearbeitete, verbesserte und vermehrte Auflage. Berlin 1894. Ver-

lag von Robert Oppenheim (Gustav Schmidt). 367 Seiten. Preis 9 Mark.

Von den beiden Teilen, in welche die photographische Optik getrennt wurde, ist der zweite Teil, die Linsenkunde, durch Dr. Hugo Schröder vor dem jetzt vorliegenden ersten Teil, die allgemeinen Eigenschaften des Lichtes, herausgegeben worden. Verfasser geht aus von dem Lambertschen Gesetzen über die Lichtstärke und deren Messung mittels der optischen Photometer und erläutert die dabei verwendeten optischen Lichteinheiten. Die dadurch erzielten Resultate sind aber nur für das Auge richtig und geben in photographischer Hinsicht zu den grössten Täuschungen Anlass, weshalb besondere photographische Photometer und Lichteinheiten hergestellt werden mussten. Nach der Untersuchung über die chemische Helligkeit des Tages- und Sonnenlichtes werden die künstlichen Lichtquellen für die Zwecke der Photographie geprüft, womit im engen Zusammenhang das Studium der Reflexion steht. Bei der Betrachtung über die Zusammensetzung des Lichtes und der chemischen Wirkungen der verschiedenen Farben wurde damit die Geschichte der farbenempfindlichen Verfahren eingeleitet. Die Photographie in natürlichen Farben erschien lange als ein unerreichtes Ziel; nach den ersten glücklichen Ergebnissen wurde von allen Seiten tüchtig an dem weiteren Ausbau gearbeitet, so dass man mit den heutigen Resultaten schon sehr zufrieden sein kann. Dieser wichtigen Errungenschaft ist natürlich ein grösserer Teil dieses Buches gewidmet. Den Anhang bildet eine gemeinverständliche Darstellung der Grundzüge der photographischen Optik, damit auch der Laie auf dem Gebiete der Optik in populärer Weise über die wichtigsten Grundsätze der photographischen Linsenkonstruktion aufgeklärt wird. Dieser Teil ist in betreff seines Inhaltes nicht wesentlich verschieden von den entsprechenden Kapiteln in der früheren Auflage. — In dem Schlusskapitel werden mehrere neue Objektivkonstruktionen beschrieben, die nach Herausgabe des Schröderschen Teiles aufgekommen sind; denn die Entwickelung der Photographie ist zur Zeit ganz enorm. Erinnert sei nur an die seit dem Druck dieses Bandes aufgekommene Photographie in Lebensgrösse mittels Blitzlichts durch Dr. Fetzer in München und die Entdeckung der Röntgenschen Lichtstrahlen, welche einen ungeheueren Einfluss auf die Photographie ausüben werden.

Das Verständnis des Buches wird auch dem Nichtfachmann durch die zahlreichen Figuren wesentlich erleichtert, so dass dieses Werk für jeden ein trefflicher Ratgeber sein wird.

B. Nebel.

---

**Elemente der theoretischen Physik.** Von C. Christiansen. Deutsch herausgegeben von Joh. Müller. Mit einem Vorwort von E. Wiedemann. Mit 143 Figuren im Text. Leipzig 1894. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). — 458 Seiten. Preis 10 Mark.

Das vorliegende Werk ist dazu bestimmt, den angehenden Physiker in die mathematische Physik einzuführen. Ausgehend von der allgemeinen

Bewegungslehre, dem freien Fall, der Wurfbewegung etc. wird übergegangen zur Elastizitätstheorie. An die Abschnitte über das Gleichgewicht und die Bewegung flüssiger Körper reihen sich notwendig diejenigen über innere Reibung und über Kapillarität an. Die Behandlung des Lichts und der Wärme folgt erst nach den Kapiteln über Elektrizität und Magnetismus. Am besten eignet sich das Buch zum gleichzeitigen Studium neben den Vorlesungen über Experimentalphysik, damit der junge Physiker möglichst bald mit dem mathematischen Gewand der Physik vertraut wird, was bisher nicht immer der Fall war. Es sei daher dieses Werk bestens empfohlen.

B. Nebel.

---

**Lehrbuch der Experimentalphysik.** Von E. von Lommel. Mit 430 Figuren im Text. Zweite Auflage. Leipzig 1895. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). — 550 Seiten. Preis 6,40 Mark geheftet und 7,20 Mark gebunden.

Wie rasch sich dieses Lehrbuch der Experimentalphysik eingebürgert hat, dafür spricht die Thatsache, dass schon nach Jahresfrist eine Neuauflage erforderlich war. Im grossen und ganzen sind nur geringe Änderungen gegenüber der ersten Auflage vorgenommen worden, die sich teils auf ausgesprochene Wünsche, teils auf notwendige Ergänzungen beziehen. Wie wir vermuten, konnten unsere früher geäusserten Wünsche bei der inzwischen rasch erfolgten zweiten Herausgabe nicht mehr berücksichtigt werden. Um Fühlung mit der Praxis zu haben, ist die geschichtliche Entwickelung bis auf die heute am häufigsten gebrauchten Apparate und Messinstrumente auszudehnen, wodurch die Brauchbarkeit des Buches nach dem Verlassen der Hochschule an Wert nicht einbüsst.

B. Nebel.

---

**Katechismus der Physik.** Von Julius Kollert. Fünfte verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 273 in den Text gedruckten Abbildungen. Leipzig 1895. Verlag von J. J. Weber. — 485 Seiten. Preis 4,50 Mark.

Verfasser war bei der Bearbeitung dieser Auflage bestrebt, früher gerügte Mängel zu beseitigen und den Inhalt, den Fortschritten der Wissenschaft entsprechend, zu ergänzen. Die Anordnung des Stoffes ist übersichtlich. Jedem, mit einer Nummer versehenen Abschnitt ist das Stichwort in fettem Druck vorangestellt, so dass man sich in kürzester Zeit orientieren kann. Das Buch eignet sich vorzüglich zur Vorbereitung für Examina, da es in knapper Weise einen äusserst reichhaltigen Stoff bietet, dem auch das Wesentliche der Elektrotechnik einverleibt ist. Der Vervollkommnung der Figuren dürfte der Verfasser immer noch seine Aufmerksamkeit schenken, vergl. z. B. die Tangentenbussole, Fig. 222.

B. Nebel.

---

**Lehrbuch der Experimentalphysik.** Von Adolph Wüllner. Erster Band. Allgemeine Physik und Akustik. Fünfte vielfach umgearbeitete und

verbesserte Auflage. Mit 321 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. Leipzig 1895. Verlag von B. G. Teubner. 1000 Seiten.

Wenn auch infolge der weiteren überraschenden Entwickelung der Physik bezüglich der Einteilung des Stoffes Änderungen angezeigt waren, wie z.B. die Voranstellung der Elektrizität vor die Optik, so hat doch im Charakter des Buches ein Wechsel nicht stattgefunden. Von grossem Wert sind die eingehenden Zusammenstellungen der Errungenschaften durch die Experimentalphysik, wodurch dieses Werk zu einem wichtigen Ratgeber für den Forscher wird, zumal die Hinweise auf die Litteratur bis in die neueste Zeit vorhanden sind. Neben den neueren Theorien sind auch die früher entwickelten angeführt, sobald die letzteren durch neuere Versuche ihre Bestätigung erfahren haben. Dies gab Veranlassung z. B. zur Besprechung der Boltzmannschen Theorie der inneren Reibung der festen Körper, auch wurde an Stelle der Meyerschen Theorie der Gasdiffusion die Stefansche gesetzt. Erwähnt seien auch die Arbeiten von van't Hoff, welche den Ausgangspunkt für zahllose Arbeiten auf dem Gebiet der physikalischen Chemie gebildet haben. Dem Plan nach soll der vierte und letzte Band dieses Lehrbuches am Ende des Jahres 1895 erscheinen. Mögen der in Aussicht genommenen raschen Herausgabe der weiteren Bände keine Hindernisse entgegenstehen, da die grossen Erfolge der Physik in den letzten Jahren in zusammenhängender und übersichtlicher Form besser geeignet sind, den heranwachsenden Physiker zu neuen Arbeiten anzuregen.

B. Nebel.

---

**Lehrbuch der Physik für Studierende.** Von H. Kayser. Zweite verbesserte Auflage. Mit 334 in den Text gedruckten Abbildungen. Stuttgart 1894. Verlag von Ferdinand Enke. — 564 Seiten.

Die zweite Auflage ist voluminöser geworden, was auf das neue Gewand zurückzuführen ist, indem ein besserer Druck die äussere Ausstattung wesentlich gehoben hat. Der Inhalt selbst hat dagegen nennenswerte Änderungen nicht erfahren. — Schon die Thatsache, dass in relativ kurzer Zeit eine Neuauflage erforderlich war, spricht dafür, dass die Behandlung des Stoffes im grossen und ganzen Anklang gefunden hat. Auch wir können demselben unsere Anerkennung nicht versagen. — Indessen würden wir den Wert des Buches noch dadurch zu erhöhen suchen, dass wir das Einzelne noch mehr ausfeilten, eine Arbeit, die von dem jährlich den Stoff behandelnden Lehrer spielend geleistet wird. Ist zwischen zwei Beispielen zu wählen, so ist doch dasjenige vorzuziehen, welches noch einen anderen Zweck mit verbindet. Dieser weitere Zweck sollte die Brücke zum praktischen Leben sein. Der Physiker von Fach besitzt in kurzer Zeit mehrere Werke der Physik, dies trifft aber bei dem Mediziner, Naturwissenschaftler, Ingenieur, Maschinenbauer, Architekten nicht zu. Diese werden nur ein Physikbuch sich anschaffen und dasselbe nach der Examenszeit nicht mehr hervorholen, wenn es über die nunmehr herantretenden Fragen des Lebens keinen Aufschluss zu geben vermag. Als Beispiel möchten wir die Tabelle (S. 411)

anführen, welche eine Idee von den üblichen Helligkeiten zu geben hat. Talglichter sind in Städten kaum mehr zu finden. Die Wachslichter beschränken sich auf die fürstlichen Kronleuchter, dagegen fehlt der praktische Zusammenhang zwischen der deutschen Paraffinnormalkerze mit der Spermacetikerze, der Amylacetatlampe etc. Wir würden folgende Tabelle z.B. vorschlagen:

Spermacetikerze = 1.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Deutsche Norm.-Paraffinkerze | 1 | ... | ... | ... | ... | Gasflamme Schnittbrenner ... |
| Stearinlicht . . . . . . | ... | ... | ... | ... | ... | Rundbrenner ... |
| Spermacetikerze . . . . | ... | 1 | ... | ... | ... | Glühlampe . . . . . . . ... |
| Amylacetatlampe . . . . | ... | ... | 1 | ... | ... | |
| Carcellampe . . . . . . | ... | ... | ... | 1 | ... | Bogenlampe . . . . . . ... |
| Platineinheit . . . . . | ... | ... | ... | ... | 1 | |

Bei dem Bunsenschen Photometer wäre die Notiz von Wert, dass das Fettfleckpapier wegen seiner Veränderlichkeit neuerdings durch den Lummer-Brodhunschen Glaswürfel mit Vorteil ersetzt wird.

Vermisst wird z. B. auch die Einteilung der Dynamomaschinen; denn selbst ein junger Physiker muss wissen, dass die im Laboratorium befindlichen Accumulatoren nur mit Nebenschlussmaschinen zu laden sind. Wo findet sich die Erklärung des Vorganges bei dem Gas- resp. Spiritusglühlicht? Die alte Döbereiner Lampe würde sie geben.

Solche Dinge gleichen Goldkörnern, indem sie auch nach der Studienzeit belehrend wirken und das Buch vor der das Nutzlose einhüllenden Staubdecke bewahren.

Enttäuschungen werden dann beim Eintritt in das praktische Leben vermieden, die sonst unausbleiblich sind, da der junge Mann sieht, dass die Physik in der Praxis mit ganz anderen Apparaten arbeitet, während er in seinem Buch nur veraltete Methoden beschrieben findet ohne Hinweis auf das Neue.

Unser Standpunkt ist: Nicht erweitern, sondern ausfeilen. B. Nebel.

---

**Lehrbuch der Physik für Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen und andere höhere Bildungsanstalten.** Von Jacob Heussi. Sechste Auflage, neu bearbeitet von A. Leiber. Mit 422 in den Text gedruckten Abbildungen. Braunschweig 1894. Verlag von Otto Salle. — 503 Seiten. Preis 5 Mark.

Die Neuauflage verdankt ihre Entstehung teils den neuen preussischen Lehrplänen, teils den wichtigen Fortschritten auf dem Gebiete der Physik. Die Mechanik der festen Körper hat teilweise eine Umänderung des Stoffes erfahren, das Prinzip von der Erhaltung der Energie wurde seiner Wichtigkeit wegen schärfer hervorgehoben, weshalb auch die Einführung des absoluten Maßsystems erforderlich war. Die bisher an verschiedenen Stellen zerstreute Wellenlehre wurde, wie dies auch bei anderen Physikbüchern üblich ist, mit Rücksicht auf ihre Wichtigkeit in der Akustik, Wärme, Optik und neuerdings auch Elektrizitätslehre in einem besonderen Ab-

schnitte einheitlich behandelt. Die schwierigeren Teile der Optik, Polarisation und Doppelbrechung haben eine Umarbeitung erfahren. Die mechanische Wärmetheorie ist ihrer fundamentalen Bedeutung wegen mehr berücksichtigt worden. Dasselbe gilt bezüglich der Einführung des Potentials in die Elektrizitätslehre, welch letztere infolge der ungeheueren Fortschritte eine völlige Neubearbeitung erfahren hat. Als neu hinzugekommen sind die Abschnitte über Meteorologie und über die mathematische Geographie zu bezeichnen.

Was den Inhalt des Buches betrifft, so dürfte sich eine weitere Sichtung des Stoffes empfehlen, z. B. könnte auf Seite 425 der in grossem Druck vorhandene Abschnitt „Hare wickelte . . .“ ohne Schaden gestrichen und dafür die Meidinger- und Leclanché-Elemente wegen ihrer grossen Verbreitung von dem unterordnenden kleinen Druck befreit werden. Ein Physikbuch für Mittelschulen soll die Schüler zunächst über die Vorgänge im täglichen Leben, z.B. Gasglühlicht etc. aufklären, dagegen allen unnötigen Ballast vermeiden. Das tiefere Eingehen sei den relativ wenigen Schülern vorbehalten, welche die Physik auf der Hochschule noch einmal hören.

Das heutige Leben erfordert praktische Männer und keine Dilettanten.

B. Nebel.

---

# Bibliographie

vom 28. Januar bis 13. Mai 1897.

### Periodische Schriften.

Arbeiten, die astronom.-geodätischen, des k. u. k. militär-geograph. Institutes in Wien. (Publikationen f. d. internationale Erdmessung.) VIII. Bd. Das Präzisionsnivellement in der österr.-ungar. Monarchie. II. Westlicher Teil. Herausg. vom k. und k. militär-geograph. Institute. Wien, Lechner. M. 16.

Publications de l'observatoire central Nicolas sous la direction de O. Backlund. Série II, Vol. II. St. Pétersbourg. Leipzig, Voss. — II. Nyrén, M., Observations faites au cercle verticale. M. 48.

Veröffentlichungen des k. astronom. Recheninstituts zu Berlin. Nr. 4. 4. Bauschinger, J., Genäherte Oppositions-Ephemeriden von 62 kleinen Planeten für 1897, Januar bis August. Unter Mitwirkung von A. Berberich und P. Neugebauer herausgegeben. Berlin, Dümmler. M. 1. 20.

Abhandlungen der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. 40. Bd. (Mathem.-phys. Klasse, 23. Bd.) Leipzig, Hirzel. M. 29.

Annalen der Physik und Chemie. Sachregister zu Bd. 1—50 (1877—1893). Leipzig, Barth. M. 7.

Arbeiten, astronom., d. k. k. Gradmessungsbureau. 8. Bd. Breiten-, Azimut- und Winkelbestimmungen. Publikationen für die internationale Erdmessung. Wien und Prag, Tempsky. M. 16.

Ergebnisse d. meteorol. Beobachtungen an den Landesstationen in Bosnien und der Hercegovina im Jahre 1895. Herausgegeben von der bosnisch-hercegovin. Landesregierung. Wien, Hof- u. Staatsdruckerei. M. 12.

Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1890. Dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin 46. Jahrg. 2. Physik d. Äthers. Redigiert von RICH. BÖRNSTEIN. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 3.

Anzeiger der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Klasse. Jahrg. 1897. Wien, Gerolds Sohn. M. 3.

Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg in Pr. 37. Jahrg. 1896. Königsberg, Koch. M. 6.

Abhandlungen d. k. sächs. meteorol. Institutes. 2. Heft. SCHREIBER, PAUL, Beiträge zur meteorol. Hydrologie der Elbe. Leipzig, Felix. M. 2.

Arbeiten, die astronom.-geod., des k. u. k. militär-geograph. Institutes in Wien. Publikationen für die intern. Erdmessung. IX. Bd. Trigonometr. Arbeiten. 5. Die Beobachtungen im Dreiecknetze in Nieder- und Ober-Österreich und in den angrenzenden Teilen von Mähren, Ungarn und Steiermark. Wien, Lechner. M. 16.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. von EMIL LAMPE. 25. Bd. Jahrg. 1893 u. 1894. 3. (Schluss-)Heft. Berlin, Reimer. M. 19.

Jahrbuch, deutsches meteorol., f. 1895. Meteorol. Station I. Ord. in Aachen. Hrsg. im Auftrage d. Stadtverw. von P. POLIS. I. Jahrg. Aachen, MÜLLER. M. 7.

Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. Herausgeg. von HERM. J. KLEIN. 7. Jahrg. 1896. Leipzig, Mayer. M. 7.

Fortschritte der Physik im Jahre 1891. Dargestellt von der physik. Gesellschaft zu Berlin. 47. Jahrg. 1. Abt. Physik der Materie. Red. von RICH. BÖRNSTEIN. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 18.

Berichte d. sächs. Ges. d. Wiss. Math.-phys. Kl. 1896. IV-VI. Leipzig, Hirzel. à M. 1.

Sitzungsberichte, Münch., Mathem. Kl. 1896. 3. Heft. München, Franz. M 1. 20.

Vierteljahrsschrift d. astr. Gesellsch. 31. Jahrg. 3. Heft. Leipzig, Engelmann. M. 2.

## Geschichte der Mathematik und Physik.

VILLICUS, FRZ., Die Geschichte der Rechenkunst vom Altertume bis zum XVIII. Jahrh. 3. Aufl. Wien, Gerolds Sohn. M. 3. 20.

POGGENDORFFS Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. 3. Bd., 7. Lieferung. Leipzig, Barth. M. 3.

LAMPE, EMIL, Karl Weierstrass, Gedächtnisrede. Leipzig, Ebendas. M. —. 60.

## Reine Mathematik.

FURTWÄNGLER, PHPP., Zur Theorie d. in Linearfaktoren zerlegb., ganzzahligen ternären cub. Formen (Diss.). Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. M. 1. 60.

HESSE's, LUDW. OTTO, Gesammelte Werke. Hrsg. von d. mathem.-physikal. Klasse der k. bayer. Akademie der Wissenschaften. München, Franz. M. 24.

GILLMER, M., Elemente d. Algebra oder prakt. Anleitung z rationellen Erlernung d. Auflösens d. Gleichungen vom 1.—3. Grade. Ilmenau, Schröter. geb. M. 6.

BOBEK, KARL, Einleitung in die projekt. Geometrie d. Ebene. Nach d. Vorträgen d. Hrn. C. KÜPPER bearbeitet. 2. wohlf. Ausgabe. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2.

KIEPERT, LUDW., Grundriss der Differential- und Integralrechnung. II. Teil. Intralrechnung. 6. Aufl. des gleichnamigen Leitfadens von weil. Dr. MAX STEGEMANN. Hannover, Helwing. M. 11. 50.

—— Tabelle der wichtigsten Formeln aus d. Integralrechn. Ebend. M. —. 50.

Schubert, Herm., Fünfstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 4.

Henselin, Adf., Rechentafel, enthaltend das grosse Einmaleins bis 999 mal 999, nebst einer Kreisberechnungstabelle. Berlin, Elsner. geb. M. 6.

Bolyai de Bolya, Wolfg., Tentamen inventutem studiosam in elementa math. purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi, cum appendice triplici. Ed. II. Tom. I. Conspectus arithmeticae generalis. Mandato academiae scientiarum hungaricae suis atnotationibus adiectis ediderunt Jul. König et Maur. Réthy. Budapestini (Berlin, Friedländer & Sohn). geb. M. 40.

Junker, Fr., Die symmetr. Funktionen d. gemeinsch. Variablenpaare tern. Formen. Tafeln d. tern. symmetr. Funkt. v. Gewicht 1—6. Wien, Gerolds Sohn. M. 5. 80.

Herrmann, Osk., Über algebr. Kurven, die sich beliebig eng an gegebene Kurvenpolygone anschliessen. Leipzig, Hinrichs Verlag. M. 1.

Riem, J., Rechentabellen für Multiplikation und Division. Basel, Schweiz. Verlagsdruckerei. M. 10.

Fricke, Rob., Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung. 2. Teil. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 1. 50.

Krause, Aug., Über Fuchs'sche Differentialgleichnungen vierten Grades. Berlin, Mayer & Müller. M. 2.

## Angewandte Mathematik.

Dietze, E., Graphische Tafeln zur Bestimmung des Umfangswiderstandes und Zahndruckes bei Rädern. 2. (Titel-)Aufl. Leipzig (1876), Ruhl. M. 1. 50.

Vollers, B., Die Bestimmung der Normalprofile eiserner I-Träger mittels logorith. und graph. Tabellen. Gotha, Gläser. M. 3.

Silber, O. H. P., Praktische Schattenkonstruktionen u. Perspektiven, Isometrie, Dachdurchdringungen und Dachausmittlungen. Berlin, Frantz. M. 12.

Kirchhoff, Gust., Vorlesungen über mathem. Physik. 1. Bd. Mechanik. 4. Aufl. Herausg. von Dr. W. Wien. Leipzig, B. G. Teubner. M. 13.

Heyn, Rud., Hauptsätze d. Perspektive. 2. wohlf. Ausg. Leipzig (1885), Felix. M. 5

Witt, G., Der Planet Saturn (aus „Himmel u. Erde"). Berlin, Pätel. M. —. 80.

Handwörterbuch der Astronomie. 6—8 Lfg. Breslau, Trewendt. à M. 3. 60.

Königsberger, Leo, Über verborgene Bewegung und unvollständige Probleme. Berlin, Reimer. M. 1.

Krümmel, Otto, Üb. Gezeitenwellen. Rektoratsrede. Kiel, Universitätsb. M. 1. 40.

Örter, mittlere, von 622 Sternen und scheinbare Örter von 450 Sternen, nebst Reduktionstafeln für das Jahr 1899 und einem Anhang, enthalt. mittlere Örter von 303 südl. Sternen für 1899. Berlin, Dümmler. M. 6.

Boltzmann, Ludw., Üb. e. mechan. Satz Poincarés. Wien, Gerolds Sohn. M —. 30.

Braun, Carl, Die Gravitations-Konstante, die Masse und mittlere Dichte der Erde nach einer neuen experim. Bestimmung. Wien, Gerolds Sohn. M. 5. 60.

Müller, O., Hilfstafeln f. praktische Messkunde, nebst logarithm. trigonometr. Tafeln. Zürich, Schulthess. M. 2. 40.

Schwarzschild, K., Die Poincaré'sche Theorie d. Gleichgewichts einer homogenen rotierenden Flüssigkeitsmasse. München, Franz. M. 5.

Debo, Ludw., Die Lage der neutralen Schichte bei gebogenen Körpern und die Druckverteilung im Mauerwerke bei excentrischer Belastung. Hannover, Schmorl & v. Seefeld Nachf. M. 1. 80.

Beau, Otto, Die Berechnung der Sonnen- und Mondfinsternisse. Für den Selbstunterricht entwickelt. Programm. Sorau, Zeidler. M —. 75.

—— II. Teil. Tafeln und Rechnungsergebnisse. Ebendaselbst. M. —. 75.

Kutter, W. R., Bewegung des Wassers in Kanälen und Flüssen. 2. Aufl. 2. Abdr. Berlin, Parey. geb. M. 7.

Holzmüller, Gust., Die Ingenieurmathematik in elem. Behandlung. 1. Teil, enthält die stat. Momente u. Schwerpunktslagen, die Trägheits- u. Centrifugalmomente f. die wichtigsten Querschnittformen u. Körper d. technischen Mechanik in rechn. u. graph. Behandlung. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 5.

Schulte, A., Wirkungsweise des Wassers im Laufrade der Turbinen. Berlin, Siemens. M —. 80.

Thaa, Geo. Ritter v., Anleitung z. Gebrauche d. logarithm. Rechenschiebers für die Zwecke des Tecknikers. Wien, Hof- und Staatsdruckerei. M. —. 80.

Ludendorff, Hans, Die Jupiter-Störungen der kleinen Planeten vom Hecuba-Typus. Dissertation. Berlin, Mayer & Müller. M. 2.

## Physik und Meteorologie.

Weinhold, Adf., F., Vorschule der Experimentalphysik. 4. Aufl. Leipzig, Quandt & Händel. M. 10.

Grätz, L., Die Elektrizität und ihre Anwendungen. 6. Aufl. Stuttgart, Engelhorn. M. 7.

Kohlrausch, Frdr, Statistik der Löslichkeit einer Gruppe von Salzen im Wasser bei mittlerer Temperatur. Berlin, Reimer. M. — 50.

Planck, Max, Üb. irreversible Strahlungsvorg. 1. Mittlg. Berlin, Reimer. M. — 50.

Warburg, E., Über die Verzögerung bei der Funkenentladung. Berlin, Reimer. M. — 50.

Lohse, O., Untersuchung des violetten Teils einiger linienreicher Metallspektra. Berlin, Reimer. M. 1.

Zenger, K. W., Die Meteorologie der Sonne und das Wetter im Jahre 1887, zugleich Wetterprognose f. d. Jahr 1897. Prag, Rivnáč. M. 1.44.

Hasenoehrl, Fritz, Über den Temperaturcoeffizienten der Dielektrizitätskonstante in festen Isolatoren. Wien, Gerolds Sohn. M. —. 40.

Lampa, Ant., Über die Brechungsquotienten einiger Substanzen für sehr kurze elektrische Wellen. 2. Mittlg. Wien, Gerolds Sohn. M —. 20.

Exner, Frz. und Haschek, E., Über die ultravioletten Funkenspektra der Elemente. VI. Mittlg. Wien, Gerolds Sohn. M. —. 40.

Tumlirz, O., Die Abweichung des gesättigten Wasserdampfes vom Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze. Wien, Gerolds Sohn. M. —. 30.

Wind, C. H., Über den dem Liouvilleschen Satze entsprechenden Satz der Gastheorie, Wien, Gerolds Sohn. M. —. 40.

Kahlbaum, Geo. W. A., Studien über Dampfspannkraftmessungen. In Gemeinschaft mit C. G. v. Wirkner und anderen Mitarbeitern. II. Abtlg. 1. Hälfte. Basel, Schwabe. M. 8.

Kapp, Gisbert, Elektrische Wechselströme. Deutsche Ausgabe von Herm. Kaufmann. 2. Aufl. Leipzig, Leiner. M 2.

Bezold, Wilh. v., Zur Theorie des Erdmagnetismus. Berlin, Reimer. M. 2.

Langbein, H., Calorimetrische Heizwertbestimmung. Weimar, Steinert. M. 1.

Biscan, Wilh., Die elektrischen Messinstrumente. Leipzig, Leiner. M. 3.

# Mathematisches Abhandlungsregister.

## 1896.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

### A.

**Abelsche Transcendenten.**

1. Sur les fonctions abéliennes. H. Poincarré. Compt. Rend. CXX, 239.
2. Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois. G. Humbert. Compt. Rend. CXX, 365, 425.

**Absolute Geometrie.**

3. Sur la géométrie non Euclidienne. Dauge. Mathesis, Sér. 2, VI, 7. — P. Mansion ibid. 12.
4. Premiers principes de métagéométrie P. Mansion. Mathesis, Sér. 2, VI, Supplément.
5. La géométrie non euclidienne avant Lobatchefsky. P. Mansion. Mathesis, Sér. 2, VI, Supplément.

**Abzählende Geometrie.**

6. Über die Ordnung der Enveloppe solcher ebenen Kurvenreihen, deren Individuen sich in Gruppen von je $w$ ordnen lassen, welche den Punkten einer Geraden projektiv sind. O. Zimmermann. Crelle CXVI, 10.

**Analytische Geometrie der Ebene.**

7. Remarques sur les courbes définies par une équation différentielle du premier ordre. Em. Picard. Compt. Rend. CXX, 522.
8. Construire un triangle dont les bissectrices sont données. Barbarin. Mathesis, Sér. 2, VI, 143.
9. Propriété de la lemniscate. Droz-Farny etc. Mathesis, Sér. 2, VI, 49.
10. Propriétés de la strophoïde. Droz-Farny, Gillet, Klompers, Retali. Mathesis, Sér. 2, VI, 97.
11. Sur une série de limoçons de Pascal. Droz-Farny, Klompers, Retali, Verdeyen, Colart. Mathesis, Sér. 2, VI, 100.
12. Lieu de certains points de départ de trois tangentes à une parabole semicubique. J. Gillet. Mathesis, Sér. 2, VI, 183.

Vergl. Ellipse. Kegelschnitte. Kreis. Parabel.

**Analytische Geometrie des Raumes.**

13. Compte Rendu de la Géométrie réglée de G. Koenigs. A. Demoulin. Mathesis, Sér. 2, VI, Supplément.
14. On certain general properties of point transformations. J. Brill. Quart. Journ. math. XXVII, 356.
15. Sur les droites de contact des courbes gauches et sur une famille de courbes gauches. J. Andrade. Compt. Rend. CXXII, 1110.
16. Sur les courbes algébriques à torsion constante et sur les surfaces minima algébriques inscrites dans une sphère. E. Cosserat. Compt. Rend. CXX, 1252.

17. On twisted quartics of the second species. A. R. Forsyth. Quart. Journ. math. XXVII, 247.
18. Sur deux figures correspondentes dans deux plans, dont l'une reste la projection gauche de l'autre tandis qu'un des plans tourne. Hacken. Mathesis, Sér. 2, VI, 187.
    Vergl. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

### Astronomie.

19. Sur l'intégration de l'équation différentielle du rayon vecteur d'un certain groupe des petites planètes. O. Backlund. Compt. Rend. CXXII, 1103.
20. Sur un procédé de vérification, applicable un calcul des séries de la Mécanique céleste. Poincarré. Compt. Rend. CXX, 57.
21. Sur le développement approché de la fonction perturbatrice. N. Coculesco. Compt. Rend. CXX, 32.
22. Sur la valeur approchée des coefficients des termes d'ordre élevé dans le développement de la partie principale de la fonction perturbatrice. Adr. Féraud. Compt. Rend. CXXII, 871.
23. Sur le développement approché de la fonction perturbatrice dans le cas des inégalités d'ordre élevé. M. Hamy. Compt. Rend. CXXII, 980.
24. The motion of a satellite about a spheroidal planet. F. W. Dyson. Quart. Journ. math. XXVII, 50.
25. Addition à la théorie du mouvement de Saturne par Le Verrier et rectification des tables. A. Gaillot. Compt. Rend. CXX, 26.
26. Sur les lacunes dans la zone des petites planètes. O. Callandreau. Compt. Rend. CXX, 585. [Vergl. Bd. XL, Nr. 327.]
    Vergl. Chronologie.

### Ausdehnungslehre.

27. Anwendung der Grassmann'schen Methoden auf die Theorie der Kurven und Flächen zweiten Grades. Emil Müller. Crelle CXV, 234.
    Vergl. Geschichte der Mathematik 185.

## B.

### Bestimmte Integrale.

28. Sulla definizione di integrale. G. Ascoli. Annali mat. Série 2, XXIII, 67. — G. Peano ibid. 153.
29. Sommation des séries à l'aide des intégrales définies. M. Petrovitch. Compt. Rend. CXX, 819.
30. Sur un mode de décomposition des intégrales définies en éléments simples. M. Petrovitch. Compt. Rend. CXXII, 27.
31. Sur l'intégration des équations linéaires à l'aide des intégrales définies. L. Schlesinger. Compt. Rend. CXX, 1396.
32. Evaluation of two definite integrals. A. R. Forsyth. Quart. Journ. math. XXVII, 216.
33. Démontrer l'intégrale $\int_0^a \sqrt{b^2 - 2n^2 + \sqrt{4(a^2 - b^2)x^2 + b^4}}\, dx = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}(a^2 + b^2)$
    E. Fauquembergue. Mathesis, Sér. 2, VI, 22.
    Vergl. Differentialgleichungen 65. Gammafunctionen. Variationsrechnung.

## C.

### Chronologie.

34. Ableitung der Gauss'schen Formel zur Bestimmung des jüdischen Osterfestes. M. Hamburger. Crelle CXVI, 90.
35. Sur la formation du calendrier. A. Auric. Compt. Rend. CXXI, 804. — Flamant ibid. CXXII, 24.

### Combinatorik.

36. Sur les séquences des permutations circulaires. Dés. André. Compt. Rend. CXX, 714.
37. Relation entre des nombres combinationes. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VI, 256.

# D.

## Determinanten.

38. Sur le convergence des déterminants d'ordre infini et des fractions continues. H. v. Koch. Compt. Rend. CXX, 144.
39. Sur les dépendances mutuelles des déterminante potentiels. De Jonquières. Compt. Rend. CXX, 408, 580. (Vergl. Nr. 415.)

Vergl. Differentialgleichungen 62.

## Differentialgleichungen.

40. Sur l'integration des équations différentielles ordinaires. Alf. Guldberg. Compt. Rend. CXXI, 49.
41. Sur l'application aux équations différentielles de méthodes analogues à celles de Galois. J. Drach. Compt. Rend. CXX, 73.
42. Sur l'extension des idées de Galois à la théorie des équations différentielles. Ém. Picard. Compt. Rend. XXI, 789.
43. Zur Theorie der Differentialgleichungen, die Fundamentalauflösungen besitzen. A. Guldberg. Crelle CXV, 111.
44. Sur une classe d'équations dont l'intégrale générale est uniforme. Ém. Picard. Compt. Rend. CXX, 402.
45. Verallgemeinerung eines Satzes von den algebraischen Integralen der Differentialgleichungen. L. Königsberger. Crelle CXV, 23.
46. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei grossen reellen Werten des Arguments. Ad. Kneser. Crelle CXVI, 178.
47. Sur une application de la méthode de M. Darboux. Beudon. Compt. Rend. CXX, 902.
48. Sur les invariants intégraux. G. Koenigs. Compt. Rend. CXXII, 25.
49. Sur certaines classes d'équations de Laplace à invariants égaux. A. Thybant. Compt. Rend. CXXII, 834.
50. Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung. G. Wallenberg. Crelle CXVI, 1.
51. Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre. A. Korkine. Compt. Rend. CXXII, 1183. — P. Painlevé ibid. 1319.
52. Sur l'équation différentielle binome du premier ordre M. Petrovitch. Compt. Rend. XXI, 632.
53. Sur une équation différentielle du premier ordre. M. Petrovitch. Compt. Rend. CXXII, 1261.
54. Sur l'équation de Lamé. G. Floquet. Compt. Rend. CXXI, 805.
55. On the solution of Lamé's equation $\frac{d^2U}{du^2}=U[n(n+1)pu+B]$ in finite terms when $2n$ is an odd number. L. Crawford. Quart. Journ. math. XXVII, 93.
56. Sur les invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre. Tresse. Compt. Rend. CXX, 429.
57. Sur une équation différentielle du second ordre non linéaire et à coefficients doublement périodique. H. Gyldén. Compt. Rend. CXXII, 160, 585.
58. Sur les systèmes en involution d'équations du second ordre. E. Goursat. Compt. Rend. CXXII, 1258.
59. Über lineare Differentialgleichungen mit mehrwertigen algebraischen Koefficienten. L. W. Thomé. Crelle CXV, 33, 119.
60. Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace. E Goursat. Compt. Rend. CXXII, 169.
61. Über gemeinsame Vielfache linearer Differentialausdrücke und lineare Differentialgleichungen derselben Klasse. L. Heffter. Crelle CXVI, 157.
62. Über den Zusammenhang zwischen den Fundamentaldeterminanten einer linearen Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung und ihrer $n$ Adjungierten. E. Grünfeld. Crelle CXV, 328.
63. Zur Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen. A. Gutzmer. Crelle CXV, 79.
64. Über die bei den linearen homogenen Differentialgleichungen auftretende Fundamentalgleichung. M. Hamburger. Crelle CXV, 343.

65. Über die Integration linearer homogener Differentialgleichungen durch Quadraturen. L. Schlesinger. Crelle CXVI, 97.
66. Sur les équations différentielles linéaires homogènes dont l'intégrale générale est uniforme. G. Floquet. Compt. Rend. CXXI, 676.
67. Sur la théorie du système des équations différentielles. A. J. Stodolkievitz. Compt. Rend. CXX, 36, 595, 825.
68. Sur l'intégration du système des équations différentielles. A. J. Stodolkievitz. Compt. Rend. CXX, 1037.
69. Application des invariants intégraux à la reduction au type canonique d'un système quelconque d'équations différentielles. G. Koenigs. Compt. Rend. CXXI, 875.
70. Zur Integration derjenigen Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Koefficienten unabhängige, unbestimmte Funktionen der unabhängigen Veränderlichen sind. G. Bohlmann. Crelle CXV, 89. [Vergl. Bd. XLI, Nr. 33.]
71. Sui sistemi simmetrici di equazioni a derivate parziali C. Somigliana. Annali mat. Serie 2, XXII, 143.
72. Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. J. Beudon. Compt. Rend. CXX, 304.
73. Sur l'extension de la méthode de Cauchy aux systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque. J. Beudon. Compt. Rend. CXXI, 808.
74. Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles. E. Delassus. Compt. Rend. CXXII, 772.
75. Über die Reihenentwickelung der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen. J. Horn. Crelle CXVI, 265.
76. Sur les équations aux dérivées partielles à coefficients constants et les fonctions non analytiques. Ém. Borel. Compt. Rend. CXXI, 933.
77. Sur un problème relatif à la détermination des intégrales d'une équation aux dérivées partielles. E. Goursat. Compt. Rend CXXI, 671.
78. Sur la théorie des équations aux dérivées partielles. Wlad. de Tannenberg. Compt. Rend. CXX, 674.
79. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles. Ém. Borel. Compt. Rend. CXX, 677.
80. Sur une classe étendue d'équations linéaires aux dérivées partielles dont toutes les intégrales sont analytiques. Ém. Picard. Compt. Rend. CXXI, 12.
81. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles. Et. Delassus. Compt. Rend. CXXI, 46.
82. Sur une classe d'équations linéaires aux dérivées partielles. H. v. Koch. Compt. Rend. CXXI, 517.
83. Sull' equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine (tipo ellittico) e sopra una classificazione dei sistemi di linee ortogonali che si possono tracciare sopra una superficie. P. Burgatti. Annali mat. Serie 2, XXIII, 225.
84. Sur la méthode de M. Darboux pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. E. Goursat. Compt. Rend. CXX, 542.
85. Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre. E. Goursat. Compt. Rend. CXX, 712.
86. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires et du second ordre à caractéristiques imaginaires. Le Roy. Compt. Rend. CXXII, 367.
87. Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques imaginaires. Ém. Picard. Compt. Rend. CXXII, 417.

Vergl. Astronomie 19. Bestimmte Integrale 31. Elasticität 102. Mechanik.

**Differenzenrechnung.**

88. Un contributo alla teoria delle forme lineari alle differenze. Etto. Bortolotti. Annali mat Serie 2. XXIII, 309.

**Dreiecksgeometrie.**

89. La bibliographie de la géométrie du triangle. E. Vigarié. Mathesis, Sér. 2, VI, Supplément.



## E.

### Elastizität.



### Elektrizität.



### Ellipse.

117. Sur les circonférences ayant le centre sur une ellipse et pour rayon le rayon du cercle osculateur de l'ellipse. Kulhoff. Mathesis, Sér. 2, VI, 73.
Vergl. Gleichungen 200.

### Elliptische Transcendenten.

118. La trasformazione, d'ordine pari, delle funzioni ellittiche. Fr. Brioschi. Annali mat. Serie 2, XXII, 313.
119. Nuove formole nella moltiplicazione e nella trasformazione delle funzioni ellittiche. Fr. Brioschi. Annali mat. Serie 2, XXIII, 73.
120. Sur l'equivalence des six formes différentes d'expression des quadratures de différentielles algébriques réductibles aux intégrales elliptiques. F. de Salvert. Compt. Rend. CXX, 1034.
121. Sur deux formules connexes concernant les fonctions complètes de troisième espèce, relatives à des modules complémentaires. F. de Salvert. Compt. Rend. CXX, 1208.
122. Sur l'addition des arguments dans les fractions périodiques du second ordre. G. Fontené. Compt. Rend. CXXII, 172.
123. Sulle funzioni $\sigma$ ellittiche pari. E. Pascal. Annali mat. Serie 2, XXIII, 181.
Vergl. Differentialgleichungen 57.

## F.

### Formen.

124. Über Fundamentalsysteme und bilineare Formen. G. Landsberg. Crelle CXVI, 331.
125 Dimostrazione algebrica del teorema di Weierstrass sulle forme bilineari. Ben. Calò. Annali mat. Serie 2, XXIII, 159.
126. On the arithmetical theory of conjugate binary quadratic forms. G. B. Mathews. Quart. Journ. math. XXVII, 230.
127. Über indefinite ternäre quadratische Formen. A. Meyer. Crelle CXV, 150. CXVI, 307. [Vergl. Bd. XLI, Nr. 73.]
128. Sur le nombre des classes de formes quadratiques de déterminant négatif. M. Lerch. Compt. Rend. CXXI, 878.
Vergl. Differenzenrechnung.

### Funktionen.

129. Über einen neuen Fundamentalsatz in der Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln. K. Hensel. Crelle CXV, 254.
130. Zur Theorie der algebraischen Funktionen. L. Baur. Crelle CXVI, 167.
131. Abgekürzte algebraische Division bei quadratischem und höherem Divisor. C. Reuschle. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 93. [Vergl. Nr. 158.]
132. Sur les fonctions entières. Desaint. Compt. Rend. CXX, 548.
133. Démonstration élèmentaire d'un théoréme de Mr. Picard sur les fonctions entières. Ém. Borel. Compt. Rend. CXXII, 1045. — Ém. Picard ibid. 1048. — Hadamard ibid. 1257.
134. Sur les polynômes de Bernoulli. Sonin. Crelle CXVI, 133, 147. — Ch. Hermite ibid. 139.
135. Sur les fonctions uniformes définies par l'inversion de différentielles totales. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXII, 660.
136. Sur l'inversion des systèmes de différentielles totales. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXII, 769.
137. Sur une propriété des fonctions méromorphes. Ém. Borel. Compt. Rend. CXX, 303.
138. Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Hadamard. Compt. Rend. CXXII, 1470.
139. Sur les fonctions de deux variables réelles et sur la notion de fonction arbitraire. Ém. Borel. Compt. Rend. CXXI, 811.
140. Sur les groupes d'opérations. Levavasseur. Compt. Rend. CXXII, 180, 516. 711.
141. Funktionalgleichungen mit drei von einander unabhängigen Veränderlichen. M. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 161.
142. Sur les équations fonctionelles. Leau. Compt. Rend. CXX, 427.
Vergl. Abellsche Transcendenten. Bestimmte Integrale. Combinatorik. Determinanten. Differentialgleichungen. Differenzenrechnung. Elliptische Transcendenten. Formen. Gammafunktionen. Geometrie (höhere). Gleichungen.

Hyperelliptische Funktionen. Interpolation. Invariantenthorie. Kettenbrüche. Mannigfaltigkeiten. Maxima und Minima. Quaternionen. Reihen. Substitutionen. Symmetrische Funktionen. Thetafunktionen. Transformationsgruppen. Variationsrechnung.

## G.

### Gammafunktionen.

143. Sur la fonction $\log \Gamma(a)$. Ch. Hermite. Crelle CXV, 201.

### Geometrie (höhere).

144. Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito. Cor. Segre. Annali mat. Serie 2, XXII, 42.
145. Über die endlichen Gruppen von Korrelationen. S. Kantor. Crelle CXVI, 171.
146. La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo geoetrico. E. Bertini. Annali mat. Serie 2, XXII, 1.
147. Sur les faisceaux réguliers et les équilatères d'ordre $n$. P. Serret. Compt. Rend. CXXI, 372.
148. Propriété de deux faisceaux homographiques de quatre rayons. Cl. Servais. Mathesis, Sér. 2, VI, 25.
149. Circonférence passant par deux faisceaux homographiques de manière que deux rayons homologues quelconques la rencontrent en des points en involution. Cl. Servais. Mathesis, Sér. 2, VI, 134.
150. Zur Maßbestimmung in den einförmigen Grundgebilden. K. Doehlemann. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 265.
151. Sur les hyperboles équilatères d'ordre quelconque. P. Serret. Compt. Rend. CXXI, 340.
152. Sur les équilatères comprises dans les équations

$$0 = \sum_{1}^{2n-2} l_1 T_1^n \equiv H_n, \quad 0 = \sum_{1}^{2n-1} l_1 T_1^n \equiv H_n + \lambda H_1'$$

P. Serret. Compt. Rend. CXXI, 438.
153. Geometrische Bedeutung der Partialbruchzerlegung. C. Reuschle. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 103. [Vergl. Nr. 131.]
154. Théorèmes sur la spirale d'Archimède publiés par Chasles dans la Correspondance mathématique et physique. Mathesis, Sér. 2, VI, 112.
155. Étude de la courbe aux trois foyers faite par Hachette dans la Correspondance mathématique et physique. Mathesis, Sér. 2, VI, 112.
156. Sur un quadrilatère connexe sur les côtés duquel on a construit des triangles isoscèles. Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, VI, 181.
157. Engendrement d'une conchoïde. Klompers. Mathesis, Sér. 2, VI, 257. — Barisien ibid. 259.
158. Die geometrischen Konstruktionen 3. und 4. Grades, ausgeführt mittels der geraden Linie und einer festen Kurve dritter Ordnung. Fr. London. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 129.
159. Sur les courbes de quatrième classe. G. Humbert. Compt. Rend. CXX, 863.

Vergl. Absolute Geometrie. Abzählende Geometrie. Mehrdimensionale Geometrie. Schliessungsaufgaben. Singularitäten.

### Geschichte der Mathematik.

160. Extraction des racines carrées dans la Grèce antique. V. V. Bobynin. Zeitschr. Math. Phys. XLI, Hist. litter. Abtlg. 193
161. Esquisse de l'histoire du calcul fractionnaire. V. V. Bobynin. Biblioth. math. 1896, 97.
162. Sur l'inscription astronomique de Keskinto. P. Tannery. Compt. Rend. CXX, 363.
163. Geometrie mit konstanter Zirkelöffnung im Altertum. M. Kutta. Biblioth. math. 1896, 16.
164. Nochmals der Jakobsstab. H. Suter. Biblioth. math. 1896, 13. [Vergl. Bd. XLI, Nr. 106.]
165. Über die im Mittelalter zur Feldmessung benutzten Instrumente. M. Curtze. Biblioth. math. 1896, 65.

166. Johannes Anglicus und sein Quadrat. A. Steinschneider. Biblioth. math. 1896, 102.
167. Über die sogenannte Regel Ta Yen in Europa. M. Curtze. Zeitschr. Math. Phys. XLI, Hist. litter. Abtlg. 81.
168. Zur Geschichte der Übersetzungen der Elementa im Mittelalter. M. Curtze. Biblioth. math. 1896, 1.
169. Über Johann von Gemunden. M. Curtze. Biblioth. math. 1896, 4.
170. Die Mathematik bei den Juden. M. Steinschneider. Biblioth. math. 1896, 33, 77, 109. [Vergl. Bd. XLI, Nr. 108.]
171. Le commentaire de Jakob Ziegler sur la „Saphea" de Zakali. G. Eneström. Biblioth. math. 1896, 53.
172. Beitrag zur Geschichte der prosthaphäretischen Methode in der Trigonometrie. A. v. Braunmühl. Biblioth. math. 1896, 105.
173. Das Problem der kürzesten Dämmerung. K. Zelbr. Zeitschr. Math. Phys. XLI, Hist. litter. Abtlg. 121, 153.
174. Ein Beitrag zur Geschichte der Physik im 14. Jahrhundert. M. Curtze. Biblioth. math. 1896, 43.
175. Sur la plus ancienne série française d'observations thermométriques et météorologiques. Maze. Compt. Rend. CXX, 731.
176. Sur le premier thermomètre à mercure. Maze. Compt. Rend. CXX, 732.
177. Sur le premier thermomètre à alcool utilisé à Paris. Maze Compt. Rend. CXXI, 230.
178. Das Geburtsjahr von Johannes Hudde. J. Korteweg. Zeitschr. Math. Phys. XLI, Hist. litter. Abtlg. 22.
179. Vandermonde's Vornamen. H. Simon. Zeitschr. Math. Phys. XLI, Hist. litter. Abtlg. 83.
180. Paolo Ruffini e i primordii della teoria dei gruppi. H. Burkhardt. (E. Pascal.) Annali mat. Serie 2, XXII, 175. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 107.]
181. La traduction française de 1805 des Disquisitiones arithmetique de Gauss. De Jonquières. Compt. Rend. CXXII, 829, 857.
182. Note bibliographique sur les femmes dans les sciences exactes. G. Eneström. Biblioth. math. 1896, 73. [Vergl. Bd. XLI, Nr. 101.]
183. Sur les découvertes mathématiques de Wronski. S. Dickstein. Biblioth. math. 1896, 5. [Vergl. Bd. XL, Nr. 125.]
184. Riemann e la sua importanza nello sviluppo della matematica moderna. F. Klein (E. Pascal). Annali mat. Serie 2, XXIII, 209.
185. Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre. V. Schlegel. Zeitschr. Math. Phys. XLI, Hist. litter. Abtlg. 1, 41.
186. Nachruf auf A. Cayley (16. VIII. 1821—26. I. 1895), L. Schläfli (15. I. 1814—20. III. 1895), J. Dienger (5. XI. 1818—27. XI. 1894). L. Fuchs. Crelle CXV, 349.
187. Notice sur A. Cayley. Ch. Hermite. Compt. Rend. CXX, 235.
188. Sur les travaux de Franz Neumann, † 23. V. 1895. J. Bertrand. Compt. Rend. CXX, 1189.
189. Notice sur les travaux de John Russell Hind, † 23. XII. 1895. F. Tisserand. Compt. Rend. CXXII, 17.
190. Nécrologue de Joseph Graindorge (9. VIII. 1843 — 23. I. 1896). Mathesis, Sér. 2, VI, 48.
191. Zum Andenken an Ludwig Ofterdinger (18. V. 1810—10. IV. 1896). H. Künssberg. Biblioth. math. 1896, 50.

Vergl. Absolute Geometrie 5. Bestimmte Integrale 28. Dreiecksgeometrie 90. Geometrie (höhere) 154, 155. Kegelschnitte 217. Singularitäten 357. Tetraeder.

## Gleichungen.

192. Über den Eisenstein'schen Satz von der Irreduktibilität algebraischer Gleichungen. L. Königsberger. Crelle CXV, 53.
193. Sur les racines multiples des équations. F. Brioschi. Compt. Rend. CXXI, 582.
194. Transformations de l'équation $x^{4n}-1=0$ et conséquences géométriques qu'on peut en tirer. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VI, 229.
195. $x^4-5p^2x+8q^2=0$ n'a pas de racine entière, $p$ étant un nombre pair et $q$ un nombre différent de zéro. E. Fauquembergue. Mathesis, Sér. 2, VI, 30.

196. Didaktische Bemerkungen zur kubischen Gleichung. W. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 58, 326.
197. Problème d'algèbre tiré de la Correspondance mathématique et physique. Mathesis, Sér. 2, VI, 201.
198. Sur les racines communes à plusieurs équations. W. Dyck. Compt. Rend. CXX, 34. [Vergl. Bd. XL, Nr. 473.
199. Zur Theorie der Resultanten. E. Netto. Crelle CXVI, 33.
200. Élimination de deux inconnues entre trois équations dont deux du troisième et une du second degré. E. Fauquembergue. Mathesis, Sér. 2, VI, 278.
201. Deux équations dont une cubique a au moins une racine réelle incommensurable quand l'autre a une racine entière. E. Fauquembergue. Mathesis, Sér. 2, VI, 54.
202. Sur les racines de certaines équations dépendantes entre elles. E. Fauquembergue. Mathesis, Sér. 2, VI, 140.
203. Sur les machines algébriques. Léon. Torres. Compt. Rend. CXXI, 245.
204. Abaque de l'équation des marées diurnes et semi-diurnes. M. d'Ocagne. Compt. Rend. CXXII, 298

Vergl. Geschichte der Mathematik 180. Symmetrische Funktionen.

## H.

### Hydrodynamik.

205. Recherches sur la houlle de mer. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXX, 1240, 1310, 1381. CXXI, 15, 85.
206. Sur la pression intérieure et le viriel des forces intérieures dans les fluides. E. H. Amagat. Compt. Rend. CXX, 489.
207. Théorie de l'écoulement tourbillonant et tumultueux. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXII, 1289, 1369, 1445, 1517.
208. On elliptic cylindrical vortices. A. E. H. Love. Quart. Journ. math. XXVII, 89.
209. On the small oscillations of the first order of Kirchhoff's elliptic vortex cylinder. P. H. Cowell. Quart. Journ. math. XXVII, 227.
210. Calcul des trajectoires fluides. P. E. Touche. Compt. Rend. CXXI, 157.
211. Die Wasserwellen. Kurz. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 111.
212. Quelques considérations sur la construction des grands barrages. M. Lévy. Compt. Rend. CXXI, 288.
213. Expression de la charge supportée par l'arbre d'une turbine hydraulique en marche. Théorème relatif à l'effet dynamique de l'eau sur les aubages. B. de Fontviolant. Compt. Rend. CXXI, 637.

Vergl. Nautik.

### Hyperelliptische Funktionen.

214. Relations différentielles entre les périodes des fonctions hyperelliptiques $p=2$. F. Brioschi. Crelle CXVI, 326.

## I.

### Interpolation.

215. Ein Analogon zu den Euler'schen Interpolationsformeln. E. Netto. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 107.

### Invariantentheorie.

216. Sur certains invariants relatifs au groupe de Hesse. Boulanger. Compt. Rend. CXXII, 178.

Vergl. Differentialgleichungen 48, 49, 56, 69. Oberflächen 282.

## K.

### Kegelschnitte.

217. Discussion de l'équation générale du second degré publiée par Ampère dans la Correspondence mathématique et physique. Mathesis, Sér. 2, VI, 253.
218. Sur une propriété focale des coniques à centre. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VI, 129.
219. Sur les coniques qui se touchent en deux points donnés. V. Jeřabek. Mathesis, Sér. 2, VI, 37.

220. Über Kreise, welche einen Kegelschnitt doppelt berühren. B. Sporer. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 200.
221. Sur les triangles équilatéraux inscrits à une conique. E. N. Barisien. Mathesis, Sér. 2, VI, 14 — Droz-Farny ibid. 107.
222. Quadrilatère circonscrit à une conique et dont deux côtés sont parallèles. R. Buysens. Mathesis, Sér. 2, VI, 260.
223. Droites menées par quatre points d'une conique à centre, tels que les normales à la courbe en ces points soient concourantes. Buisseret. Mathesis, Sér. 2, VI, 207. — Barisien, Déprez, Droz-Farny ibid. 208.
224. Conique sur laquelle se trouvent les 6 points de rencontre des côtés non homologues de deux triangles. Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, VI, 95. — J. Neuberg ibid. 96. — Bastin, Déprez ibid. 97.
225. Sur un système de coniques. J. Neuberg. Mathesis, Sér. 2, VI, 164.
Vergl. Ausdehnungslehre. Ellipse. Kreis. Parabel.

## Kettenbrüche.

226. Über Näherungswerte und Kettenbrüche. K. Th. Vahlen. Crelle CXV, 221.
227. Relations entre la fonction Bessélienne de 1re espèce et une fraction continue. J. H. Graf. Annali mat. Série 2, XXIII, 45.
Vergl. Determinanten 38.

## Kinematik.

228. Beitrag zur kinematischen Theorie der Gelenkmechanismen. Joh. Kleiber. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 177, 233, 281.
229. Sur un mode de description de la ligne droite au moyen de tiges articulées. R. Bricard. Compt. Rend. CXX, 69.
230. Toute surface algébrique peut être décrite par le moyen d'un système articulé. G. Koenigs. Compt. Rend. CXX, 861.
231. Toute condition algébrique imposée au mouvement d'un corps est réalisable par le moyen d'un système articulé. G. Koenigs. Compt. Rend. CXX, 981.
232. Sur le mouvement d'une figure plane dans son plan. A. Pellet. Compt. Rend. CXX, 1204
233. Sur le déplacement d'un trièdre trirectangle autour de son sommet, la position de ce trièdre dépendant de deux paramètres. M. Fouché. Compt. Rend. XXII, 763.

## Kreis.

234. Le cercles de Chasles. Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, VI, 193. — E. N. Barisien ibid. 265. [Vergl. Bd. XLI, Nr. 147.]
235. Sur les cercles radicaux. J. J. Duran Loriga. Mathesis, Sér. 2, VI, 105.
236. Enveloppe de l'axe radicale d'un cercle fixe avec un cercle mobile dont le centre parcourt une circonférence donnée; extension dans l'espace. Tzitzéica. Mathesis, Sér. 2, VI, 70.
237. Génération de deux circonférences ayant pour centre de similitude un point donné. J. Neuberg. Mathesis, Sér. 2, VI, 83.
Vergl. Dreiecksgeometrie 98. Ellipse 117.

# M.

## Magnetismus.

238. Kraftwirkung eines Magnets auf einen anderen. Kurz. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 167.
239. Potentielle Energie eines Magnets. Kurz. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 169
240. Potential einer magnetischen Kugel. Kurz. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 172.
241. Die magnetische Induktion. Kurz. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 175.
242. Solanoid, Ring- und Kugelspirale. Kurz. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 226.

## Mannigfaltigkeiten.

243. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. J. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 231.



**Maxima und Minima.**

244. On donne deux points $A$, $B$ et une droite d non situés dans un même plan. Trouver sur la droite un point $X$ dont la somme des distances $XA + XB$ aux points donnés soit un minimum. Soons etc. Mathesis, Sér. 2, VI, 28.

**Mechanik.**

245. On a theorem of Jacobi in dynamics. A. C. Dixon. Quart. Journ. math. XXVII, 362.
246. Sur l'intégration de l'équation différentielle de Hamilton. P. Stäckel. Compt. Rend. CXXI, 489. [Vergl. Bd. XL, Nr. 528.]
247. Une propriété des mouvements sur une surface. Hadamard. Compt. Rend. CXXII, 983.
248. Condition d'immobilité d'un disque sous l'action de trois forces tangentielles. J. Jonesco, Strymeersch, Klompers, Mandart. Mathesis, Sér. 2, VI, 274.
249. Sur les forces de l'espace et les conditions d'équilibre d'une classe de systèmes déformable. B. Mayor. Compt. Rend. CXXII, 1185.
250. Sur une classe de solutions périodiques dans un cas particulier du problème des trois corps. J. Perchat et J. Mascart. Compt Rend. CXX, 906.
251. Sur l'équilibre d'une enveloppe ellipsoidale. L. Lecornu. Compt. Rend. CXXII, 218.
•252. Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslagen. A. Kneser. Crelle CXV, 308.
253. Sur l'entretien du mouvement du pendule sans perturbations. G. Lippmann. Compt. Rend. CXXII, 104.
254. Sur les solutions périodiques du problème du mouvement d'un corps pesant quelconque, suspendu par un de ses points. G. Koenigs. Compt. Rend. CXXII, 1048.
255. Sopra due moti di Poinsot concordanti. Rob. Marcolongo. Annali mat. Serie 2, XXII, 157.
256. Sur la rotation des solides. R. Liouville. Compt. Rend. CXX, 903.
257. A propos d'une communication de Mr. R. Liouville sur la rotation des solides. N. Jourkovsky. Compt. Rend. CXXII, 915.
258. Sur la rotation des solides et le principe de Maxwell. R. Liouville. Compt. Rend. CXXII, 1050.
259. Sur la rotation d'un corps variable. L. Picart. Compt. Rend. CXXII, 1264.
260. Sulle rotazioni permanenti stabili di un sistema in cui sussistono moti interni stazionarii. V. Volterra. Annali mat. Serie 2, XXIII, 269.
261. Sur la pénétration d'un projectile dans les semi-fluides et les solides. H. Resal. Compt. Rend. CXX, 397.
262. Sur le mouvement des projectiles dans l'air. Chapel. Compt. Rend. CXX, 677.
263. Sur la définition générale du frottement. P. Painlevé. Compt. Rend. CXX, 596.
264. Sur les lois du frottement de glissement. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXI, 112.
265. Sur un mode nouveau de régulation des moteurs. L. Lecornu. Compt. Rend. CXXII, 1188, 1322. — H. Léauté ibid. 1191.
266. Sur la forme de l'intrados des voûtes en anse de panier. H. Resal. Compt. Rend. CXX, 352.
267. Axoïdes de deux lignes planes. H. Resal. Compt. Rend. CXX, 483.
268. Une propriété générale des axoïdes. A. Mannheim. Compt. Rend. CXX, 671.
269. Sur les variations de l'écrouissage des métaux. Faurie. Compt. Rend. CXX, 1407.
270. Sur les déformations permanentes et la rupture des corps solides. Compt. Rend. CXXI, 343.
271. Sur les poutres droites continues solidaires avec leurs piliers. Eug. Laye. Compt. Rend. CXX, 253.
272. Résistance des poutres droites à travées solidaires sur appuis élastiques. P. Toulon. Compt. Rend. CXXI, 872. CXXII, 304.
273. Sur des abaques des efforts tranchants et des moments de flexion développés dans les poutres à une travée par les surcharges du Règlement du 29. VIII. 1891 sur les ponts métalliques. Marc. Duplaix. Compt. Rend. CXXII, 128.
274. Marche et course en flexion. Comte & Regnault. Compt. Rend. CXXII, 401.

275. Du rôle des membres postérieurs dans la locomotion du cheval. Le Hello. Compt. Rend. CXXII, 1357.
276. Mesure du travail dépensé dans l'emploi de la bicyclette. Bouny. Compt. Rend. CXXII, 1391, 1528. — Marey ibid. 1395.
Vergl. Astronomie. Elastizität. Elektrizität. Hydrodynamik. Kinematik. Magnetismus. Optik. Wärmelehre.

**Mehrdimensionale Geometrie.**

277. Sur l'emploi d'une quatrième dimension. De la Rive. Compt. Rend. CXX, 983.
278. Sur une généralisation de la formule de l'aire du triangle sphérique. H. Stouff. Compt. Rend. CXXII, 303.

## N.

**Nautik.**

279. Théorie du tangage sur une mer houleuse. A. Kriloff. Compt. Rend. CXXII, 183.
280. Étude de la stabilité des navires par la méthode des petits modèles. J. Leflaive. Compt. Rend. CXXII, 704.

## O.

**Oberflächen.**

281. Sur la théorie des surfaces et des groupes algébriques. Ém. Picard. Compt. Rend. CXX, 658.
282. Sur deux invariants nouveaux dans la théorie générale des surfaces algébriques. Ém. Picard. Compt. Rend. CXXII, 101.
283. Eine neue Formel für die mittlere Krümmung und das Krümmungsmaß einer Fläche. V. Kommerell. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 123.
284. Sur les lignes de courbure. Th. Craig. Compt. Rend. CXX, 672.
285. Sur les surfaces dont les lignes de courbure forment un réssau à invariants tangentiels égaux. A. Thybaut. Compt. Rend. CXXI, 519.
286. Sur les surfaces à lignes de courbure sphériques. E. Blutel. Compt. Rend. CXXII, 301.
287. Sur les courbes tracées sur une surface et dont le sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface. E. Cosserat. Compt. Rend. CXXI, 43.
288. Sur les lignes asymptotiques. E. Goursat. Compt. Rend. CXXII, 593.
289. On the continuous deformation of surfaces. D. B. Mair. Quart. Journ. math. XXVII, 1.
290. Sur la déformation des surfaces. P. Adam. Compt. Rend. CXXI, 551.
291. Zur simultanen Transformation quadratischer Differentialformen. J. Knoblauch. Crelle CXV, 185.
292. Sur les transformations biuniformes des surfaces algébriques. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXII, 874.
293. Di alcune superficie che ammettono un sistema di linee eguali e un secondo sistema di linee eguali, o simili. Gem. Pirondini. Annali mat. Serie 2, XXIII, 93.
294. Sur le roulement de deux surfaces l'une sur l'autre. E. Cosserat. Compt. Rend. CXXI, 935.
295. Sur un système triple ortogonal. P. Adam. Compt. Rend. CXXI, 812. — E. Goursat ibid. 883. — J. Bertrand ibid. 921.
296. Konstruktion der Schmiegungsebenen der Schnittkurve zweier Kegel. A. Beck. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 221.
297. On geodesic torsion. G B. Mathews. Quart. Journ. math. XXVII, 145.
298. Simmetria ortogonale rispetto a una superficie di revoluzione. Gem. Pirondini. Annali mat. Serie 2, XXII, 213.
299. Sulla costruzione della superficie del 3° ordine individuata da 19 punti. M. Pannelli. Annali mat. Serie 2, XXII, 237.
300. Über Isogonalflächen. L. Heffter. Crelle CXV, 1.
301. Über Modellierung von Isogonalflächen. L. Heffter. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 163.
302. Propriété nouvelle de la surface de l'onde. A. Mannheim. Compt. Rend. CXXII, 708.

303. Sur les surfaces aspidales. A. Mannheim. Compt. Rend. CXXII, 1396.
Vergl. Abel'sche Transcendenten 2. Differentialgleichungen 83. Kinematik 230. Mechanik. Singularitäten. Transformationsgruppen.

**Oberflächen zweiter Ordnung.**

304. Über die Konstruktion der Fläche zweiten Grades aus 9 gegebenen Punkten. H. Liebmann. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 120. — Joh. Kleiber ibid. 228.
Vergl. Ausdehnungslehre.

**Optik.**

305. Examples of the characteristic function. A. R. Hermann. Quart. Journ. math. XXVII, 191.
306. Principe d'Huygens dans les corps isotropes. E. Carvallo. Compt. Rend. CXX, 88. [Vergl. Bd. XL, Nr. 603.]
307. Sur le spectre cannelé. H. Poincaré. Compt. Rend. CXX, 757. — A. Schuster ibid. 987.
308. Les rayons cathodiques et les vibrations longitudinales de l'éther. H. Poincaré. Compt. Rend. CXXI, 792. CXXII, 76, 520, 990. — G. Jaumann ibid. CXXII, 74, 517, 988.
309. Sur la caustique d'un arc de courbe réfléchissant les rayons émis par un point lumineux. A. Cornu. Compt. Rend. CXXII, 1455.
310. Sur l'entraînement des ondes lumineuses par la matière en mouvement. G. Foussereau. Compt. Rend. CXX, 85.
311. Sur le passage de la lumière à travers une lame mince dans le cas de la réflexion totale. Ch. Fabry. Compt. Rend. CXX, 314.
312. Absorption de la lumière dans les cristaux uniaxes. G. Moreau. Compt. Rend. CXX, 602.
313. Sur l'absorption de la lumière par les milieux doués du pouvoir rotatoire. E. Carvallo. Compt. Rend. CXXII, 985.
314. Sur la dispersion rotatoire anomale des milieux absorbants cristallisés. G. Moreau. Compt. Rend. CXX, 258.
315. Recherches spectrales sur la rotation et les mouvements des planètes. H. Deslandres. Compt. Rend. CXX, 417. — H. Poincaré ibid. 420.

## P.

**Parabel.**

316. Le problème de la duplication du curbe au moyen d'une parabole. G. de Longchamps. Mathesis, Sér. 2, VI, 245.
317. Sur les paraboles ayant un diamètre commun et touchant une droite donnée au bout de ce diamètre. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VI, 92.
318. Paraboles touchant une droite donnée en un point donné, leur directrices passant par un point donné. Droz-Farny, Déprez, Buisseret, Gob. Mathesis, Sér. 2, VI, 50. — Déprez, J. Jonesco ibid. 51.
319. Parabole lieu des points tels que, si l'on mène les trois normales à une parabole donnée, le cercle passant par les seconds points de rencontre des normales avec la parabole ait son centre sur l'axe de la parabole. Bastin, Cristescu, J. Jonesco. Mathesis, Sér. 2, VI, 26.
320. Sur les normales de deux points à une parabole donnée. Cristescu, Barisien, J. Jonesco. Mathesis, Sér. 2, VI, 180.
321. Propriété du triangle dont les sommets sont les pieds des normales abaissées d'un point sur une parabole et du second triangle formé par les tangentes en ces trois points. Cristesco. Mathesis, Sér. 2, VI, 332. — Droz Farny, H. Brocard ibid. 234. — Déprez ibid. 236.
322. Parabole lieu de la projection du centre d'osculation d'une parabole sur la droite qui joint le foyer au point d'osculation. Déprez. Mathesis, Sér. 2, VI, 188.
323. Parabole lieu du centre du cercle circonscrit à un triangle dont les sommets se trouvent sur une autre parabole. Gillet etc. Mathesis, Sér. 2, VI. 98. — Cristescu etc. ibid. 99.
324. Théorèmes sur une parabole et un cercle. Schoute, Bastin, Déprez, Droz-Farny, Verdeyen, J. Jonesco, V. Cristescu. Mathesis,

Sér. 2, VI, 116. — Cl. Servais ibid. 120. — Klompers, Buisseret, Buysens, Colart, Polak, B. Jonesco, Ratali ibid. 122.

325. Cordes d'une parabole qui en enveloppent une autre. Cristesco. Mathesis, Sér. 2, VI, 275.

Vergl. Quadratur 339.

**Planimetrie.**

326. Zur Übertragung der Rechnungsarten auf die Geometrie, insbesondere über die Möglichkeit der Multiplikation von Strecken mit Strecken. H. Vollprecht. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 276.

327. Sur une nouvelle démonstration du postulatum d'Euclide. P. Mansion. Mathesis, Sér. 2, VI, 109. — M. Frolov ibid. 225.

328. A rigorously euclidean demonstration of the theory of parallel straight lines to be introduced immediately after Eucl. I, 26. Thos. Cullovin. Quart. Journ. math. XXVII, 188, 225. — A. E. H. Love ibid. 353.

329. Sur le problème de mener par un point 0 situé dans l'angle $CAB$ une transversale $MN$ formant un triangle $MAN$ d'aire donnée, problème traité dans la Correspondance mathématique et physique. Mathesis, Sér. 2, VI, 200.

330. Un triangle est isoscèle s'il a deux bissectrices intérieures égales. G. Tarry. Mathesis, Sér. 2, VI, 41.

331. La base $BC$ d'un triangle $ABC$ est divisée harmoniquement aux points $D, E$; quelles valeurs prend $AD^2 + AE^2$? Klompers. Mathesis, Sér. 2, VI, 189.

332. Propriétés d'un triangle sur les côtés duquel on a construit exterieurement des carrés. Droz-Farny etc. Mathesis, Sér 2, VI, 49.

333. Construire un pseudocarré, connaissant les longueurs de trois côtés. Klompers, Colart. Mathesis, Sér. 2, VI, 52. — Droz-Farny, J. Jonesco ibid. 53. — Déprez ibid. 75.

334. Pseudocarré construit au moyen d'un autre. Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, VI, 94. — Déprez, J. Jonesco ibid. 95.

335. Sur une transversale d'un parallélogramme donné qu'on fait tourner autour d'un point fixe. Hacken, Klompers, Poort. Mathesis, Sér. 2, VI, 69.

336. Sur les projections d'un point sur les côtés d'un quadrilatère. Colart, Déprez, Klompers. Mathesis, Sér. 2, VI, 209.

337. Sur un système de quadrilatères. Klompers, Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, VI, 190.

Vergl. Dreiecksgeometrie. Kreis.

## Q.

**Quadratur.**

338. Aire des paraboles d'ordre supérieur. H. Schoute. Compt. Rend. CXXII, 1113. — D. J. Korteweg ibid. 1399. G. Mannoury ibid. 1399.

339. Sur l'aire d'une partie de la parabole. Mendeleef. Compt. Rend. XXI, 421

340. Aires et volumes relatifs à la chainette. C. E. Wasteels. Mathesis, Sér. 2, VI, 241.

341. Périmètre et aire de la podaire d'une cardioïde et le sa développée. Fairon. Mathesis, Sér. 2, VI, 185.

Vergl. Mehrdimensionale Geometrie 278.

**Quaternionen.**

342. Zur Theorie der Vektoren und Quaternionen. Beez. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 35, 65.

## R.

**Rechnen.**

343. Sur la définition de la multiplication. Laisant et Lemoine. Mathesis, Sér. 2, VI, 85.

Vergl. Geschichte der Mathematik 161. Planimetrie 326. Wurzelausziehung. Zinseszins.

**Reihen.**

344. Sur la divergence des séries de la mécanique céleste. H. Poincaré. Compt. Rend. CXXII, 497, 557.

345. Sur la sommation des séries divergentes. Ém. Borel. Compt. Rend. CXXI, 1125.

346. Sur la géneralisation de la notion de limite et sur l'extension aux séries divergentes sommables du théorème d'Abel sur les séries entières. Ém. Borel. Compt. Rend. CXXII, 73.
347. Applications de la théorie des séries devergentes sommables. Ém. Borel. Compt. Rend. CXXII, 805.
348. Sur le théorème de Taylor transformé. N. U. Bougaief. Compt. Rend. XCCI, 1127.
349. Sur le théorème de Taylor avec l'approximation du troisième degré. N. Bougaief. Compt. Rend. CXXII, 369.
350. Sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable. F. Gomes Teixeira. Crelle CXVI, 14.
351. Sur une suite récurrente. J. Neuberg. Mathesis, Sér. 2, VI, 88.
352. Sur une extension du théorème de Laurent. Ch. Hermite. Crelle CXVI, 85.
353. Über einige unendliche Produkte und Reihen. O. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 127.
354. Products and series involving prime numbers only. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XXVII, 270.
355. On Hamilton's numbers. G. B. Mathews. Quart. Journ. math. XXVII, 184. — J. C. Glashan ibid. 242.

Vergl. Astronomie 20, 21, 22, 23. Bestimmte Integrale 29. Differentialgleichungen 75. Funktionen 134. Symmetrische Funktionen. Wurzelausziehung 408.

## S.

### Schliessungsaufgabe.

356. Über Steiner'sche Kugelketten. K. Th. Vahlen. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 153.

### Singularitäten.

357. Mémoire de Michel Reiss daté de 1832 et publié dans la Correspondance mathematique et physique sur des propriétés des courbes algébriques. Mathesis, Sér. 2, VI, 42
358. Über Singularitäten ebener algebraischer Kurven. W. Köstlin. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 1.
359. Über die doppelpunktige Focalkurve. R. Müller. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 62.
360. Über die Doppelpunkte der algebraischen Curven. H. Oppenheimer. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 305.
361. Über die ebenen Kurven vierter Ordnung vom Geschlechte eins. H. Liebmann. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 85.
362. Sur une question concernant les points singuliers des courbes gauches algébriques. G. B. Guccia. Compt. Rend. CXX, 816.
363. Über einige Arten singulärer Punkte von Raumkurven. A. Meder. Crelle CXVI, 50, 247.
364. Sur les variétés unicursales à deux dimensions. L. Autonne. Compt. Rend. CXXI, 673.
365. Sur les variétés unicursales à trois dimensions. L. Autonne. Compt. Rend. CXXI, 881, 1129.
366. Sur les points doubles d'un faisceau de surfaces algébriques. G. B. Guccia. Compt. Rend. CXX, 896.

### Sphärik.

367. Eine neue Ableitung der harmonischen Eigenschaften des Vierecks. A. W. Velten. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 332.
368. On the nine-points circle of a spherical triangle. A. Cayley. Quart. Journ. math. XXVII, 35.
369. Dans deux triangles sphériques ayant leurs côtés proportionnels les angles du plus petit triangle sont moindres que ceux de l'autre. P. Mansion. Mathesis, Sér. 2, VI, 114.
370. On a little-circle spherical triangle. E. C. Hudson. Quart. Journ. math. XXVII, 378.

Vergl. Kreis 236. Trigonometrie 397.

### Substitutionen.

371. Complemento alle cicerche sulle forme quaternarie quadratiche e sui gruppi poliedrici. L. Bianchi. Annali mat. Serie 2, XXIII, 1. [Vergl. Bd. XL, Nr. 247.]
372. Sur les substitutions. Zochios. Compt. Rend. CXX, 766.
373. Sur la théorie des substitutions échangeables. Demeczky. Compt.Rend.CXX, 39.
374. Sur un mode de formation de certains groupes primitifs. Edm. Maillet. Quart. Journ. math. XXVII, 119.
375. Application de la théorie des substitutions à celle des carrés magiques. Edm. Maillet. Quart. Journ. math. XXVII, 132.
376. Sur les types de groupes de substitutions dont l'ordre égale le degré. R. Levavasseur. Compt. Rend. CXX, 822, 899, 1206. CXXI, 238.
377. Sur une catégorie de groupes de substitutions associés aux groupes dont l'ordre égale le degré. R. Levavasseur. Compt. Rend. CXX, 1206.
378. Sur les groupes d'opérations. R. Levavasseur. Compt. Rend. CXXII, 180, 516, 711.
379. Sur les substitutions régulières non linéaires. Autonne. Compt. Rend. CXXII, 1043.
380. Intransitive substitution groups of 10 letters. Geo. A. Miller. Quart. Journ. math. XXVII, 99.
381. Sur les groupes de substitutions. A. Miller. Compt. Rend. CXXII, 370.
382. List of the transitive substitution groups of 10 and of 11 letters. F. N. Cole. Quart. Journ. math. XXVII, 39.
383. On the 60 icosahedral substitutions. A. Cayley. Quart. Journ. math. XXVII, 236.

### Symmetrische Funktionen.

384. Die elementaren symmetrischen Funktionen und die Potenzsummen einer oder mehrerer Reihen von Veränderlichen. Fr. Junker. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 199.

## T.

### Tetraeder.

385. Historique des Problèmes d'Estève et de Bruno sur le tétraèdre extrait de la Correspondance mathématique et physique. Mathesis, Sér. 2, VI, 18.

Vergl. Zahlentheorie 424.

### Thetafunktionen.

386. Über eine Darstellung der Richtungscosinus zweier orthogonalen Koordinatensysteme durch Thetafunktionen zweier Argumente, welche die Lösung mehrerer Probleme der Mechanik als Spezialfälle umfasst. Fr. Kötter. Crelle CXVI, 213.

### Transformationsgruppen.

387. Sur la détermination des équations des groupes continus finis. E. Vessiot. Compt. Rend. CXX, 77.
388. Sur certains groupes algébriques. E. Cartan. Compt. Rend. CXX, 544.
389. I gruppi continui proiettivi semplicemente infiniti nello spazio ordinario. G. Pittarelli. Annali mat. Serie 2, XXII, 61.
390. Sur les surfaces algébriques admettant un groupe continu de transformations birationelles en elles même. G. Castelnuovo et F. Enriques. Compt. Rend. CXXI, 242. — P. Painlevé ibid. 318.
391. Sur les groupes paramètres dans la théorie des substitutions. Ed. Maillet. Annali mat. Serie 2, XXIII, 199.
392. Sur un groupe continu de transformations avec 28 paramètres qu'on rencontre dans la théorie de la déformation des surfaces. P. Stäckel. Compt. Rend. CXXI, 396.

Vergl. Geschichte der Mathematik 180.

### Trigonometrie.

393. Sur la formule approximative $x = \sin x \cdot \frac{14 + \cos x}{9 + 6 \cos x}$. P. Mansion. Mathesis, Sér. 2, VI, 84.

394. Über algebraische Beziehungen an einem symmetrischen Kreissechseck. M. Stern. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 272.
395. Trois droites se rencontrant en un point. Bastin, Déprez. Mathesis, Sér. 2, VI, 125.
396. Résoudre un système de deux équations trigonométriques. Hacken, B. Jonesco. Déprez, Mandart. Mathesis, Sér. 2, VI, 277.
397. Der Resultantenbegriff in der sphärischen Trigonometrie. Franz Meyer. Crelle CXV, 209.

Vergl. Geschichte der Mathematik 172. Zahlentheorie 437.

## V.

### Variationsrechnung.

398. Sur les problèmes de variations qui correspondent aux droites de l'espace. G. Koenigs. Compt. Rend. CXXI, 1122.
399. Sur les problèmes de variations relatifs aux intégrales doubles. G. Koenigs. Compt. Rend. CXXII, 126.

## W.

### Wärmelehre.

400. Sur le problème de Fourier. E. Le Roy. Compt. Rend. CXX, 179, 599.
401. Sur la théorie des gaz. J. Bertrand. Compt. Rend. CXXII, 963, 1083, 1174, 1314. — Bolzmann ibid. 1173, 1314.
402. Die Elastizitätskoefficienten und die Wellenbewegungserscheinungen als Funktionen der Molekulargewichte und spezifischen Wärme. O. Förster. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 258.
403. Erwärmung flüssiger und fester Körper durch Druck. Kurz. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 113.
404. Adiabatische Ausdehnung realer Gase. Kurz. Zeitschr. Math. Phys. XLI, 117.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung.

405. Sur une application de la théorie de la probabilité des erreurs aux nivellements de haute précision. M. d'Ocagne. Compt. Rend. CXX, 717.
406. Sur la méthode des moindres carrés. J. Andrade. Compt. Rend. CXXII, 1400.

### Wurzelausziehung.

407. Sur les valeurs principales des radicaux. De Tilly. Mathesis, Sér. 2, VI, 5. [Vergl. Bd. XLI, Nr. 240.]
408. Nouvelle méthode pour extraire les racines des nombres. M. V. Prada. Compt. Rend. CXXI, 635.

Vergl. Geschichte der Mathematik 160.

## Z.

### Zahlentheorie.

409. Elementarer Beweis des Satzes, dass in jeder unbegrenzten arithmetischen Progression $my+1$ unendlich viele Primzahlen vorkommen. E. Wendt. Crelle CXV, 85.
410. Nouveaux theorèmes d'arithmétique. P. Pepin. Compt. Rend. CXX, 1254. [Vergl. Bd. XL, Nr. 667.]
411. Du meilleur système de numération et de poids et mesures. E. Gelin. Mathesis, Sér. 2, VI, 161.
412. Über den grössten gemeinsamen Teiler aller Zahlen, welche durch eine ganze Funktion von $n$ Veränderlichen darstellbar sind. K. Hensel. Crelle CXVI, 350.
413. Sur le cas général de la division des nombres entiers. M. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VI, 21.
414. Sur le moindre multiple. Stuyvaert. Mathesis, Sér 2, VI, 198, 229.
415. Démonstration d'un théorème sur les nombres entiers. De Jonquières. Compt. Rend. CXX, 534. [Vergl. Nr. 39.]
416. Sur une question d'algèbre qui a des liens avec le dernier théorème de Fermat. De Jonquières. Compt. Rend. CXX, 1139, 1236.
417. Quelques propriétés des racines primitives des nombres premiers. De Jonquières. Compt. Rend. CXXII, 1451.

418. Quelques propriétés des racines secondaires des nombres premiers. De Jonquières. Compt. Rend. CXXII, 1513.
419. On the reduction of Kroneckers modular systems. H. Hancock. Quart. Journ. math. XXVII, 147.
420. Démonstration d'un théorème de Tchébychef. A. Markoff. Compt. Rend. CXX, 1032.
421. Cyclic numbers. L. E. Dickson. Quart. Journ. math. XXVII, 366.
422. Sur quelques théorèmes de l'arithmologie. N. Bougaief. Compt. Rend. CXX, 432.
423. Sur les fractions décimales périodiques mixtes. N. Socolof. Mathesis, Sér. 2, VI, 132.
424. Rationale Tetraeder. K. Schwering. Crelle CXV, 301.
425. Un nombre parfait impair (s'il en existe) est le somme de deux carrés. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VI, 132.
426. Pour quelles valeurs de $n$ la somme des carrés des $n$ premiers triangulaires divisée par le somme des $n$ premiers triangulaires est elle un carré parfait? E. Fauquembergue. Mathesis, Sér. 2, VI, 101.
427. Décomposition de $(a^2+b^2)^6$ en somme de trois ou de quatre carrés. Soons. Mathesis, Sér. 2, VI, 27. — E. Fauquembergue ibid. 274.
428. Nombres triangulaires qui, augmentés d'une unité deviement des carrés. E. Fauquembergue. Mathesis, Sér. 2, VI, 28.
429. Sur l'équation $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=p^2$. E. Fauquembergue. Mathesis, Sér. 2, VI, 76.
430. Sur les racines de $x^3+2=y^2$. E. Fauquembergue. Mathesis, Sér. 2, VI, 191.
431. Sur l'équation $v^4+x^4+y^2=2z^2$, la forme des valeurs de $v$, $x$, $y$ étant donnée. E. Fauquembergue. Mathesis, Sér. 2, VI, 210, 212.
432. Fable des nombres triangulaires. Arnaudeau. Compt. Rend. CXX, 248. — Bouquet de la Grye ibid. 976.
433. Sommes de quatre et de trois triangulaires. J. Jonesco. Mathesis, Sér. 2, VI, 134.
434. La somme des puissances semblables des $x$ premiers nombres, augmentée en diminuée de l'unité, est divisible par $x+2$. E. Fauquembergue. Mathesis, Sér. 2, VI, 127.
435. Sur la congruence $\frac{r^{p-1}-1}{p}\equiv q_r (mod\, p)$. D. Mirimanoff. Crelle CXV, 295
436. Problèmes d'arithmologie. E. Gelin. Mathesis, Sér. 2, VI, Supplément.
437. Sur les solutions entières $x_1\ldots x_n$, $\varkappa_1\ldots\varkappa_n$, $k$ de l'équation $x_1$ acrtg $\frac{1}{\varkappa_1}+x_2$ arctg $\frac{1}{\varkappa_2}+\cdots+x_n$ arctg $\frac{1}{\varkappa_n}=\frac{k\pi}{4}$. C. Storner. Compt. Rend. CXXII, 175, 225.
438. Sur l'équation $\frac{x}{y}\cdot z=\frac{x}{y}+z$. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VI, 131.

Vergl. Chronologie 34. Formen. Geschichte der Mathematik 167, 181. Kettenbrüche 226. Reihen 354. Substitutionen 375.

**Zinseszins.**

439. Sur le calcul des annuités viagères. E. Fagnart. Mathesis, Sér. 2, VI, 64.

# Historisch-litterarische Abteilung.

## Quadrat- und Kubikwurzeln bei den Griechen nach Heron's neu aufgefundenen *Μετρικά*.

Von

Maximilian Curtze
in Thorn.

Es sind wohl kaum über irgend eine strittige Frage des griechischen Altertums eine grössere Zahl Vermutungen aufgestellt worden als über die Art, wie die Griechen Wurzeln aus Nichtquadratzahlen ausgewertet haben. Da, wo man die Erläuterung des Verfahrens zu finden erwarten durfte, im Kommentare des Eutokios zu der *κύκλου μέτρησις* des Archimedes, steht nur der Hinweis, dass man das Verfahren bei Theon und Heron nachlesen könne.* Da bis jetzt die *Μετρικά* des Heron, in welchen die Anleitung stehen sollte, für verloren galten, so blieb nur der Kommentar Theon's zum Almagest übrig, in welchem ja unser heutiges Verfahren, auf 60teilige Brüche angewendet, beschrieben ist. Wie dasselbe nach dem griechischen Muster auf die Rechnung mit Stammbrüchen zu übertragen ist, hat neuerdings Bobynin gezeigt.** Damit ist aber immerhin noch nicht das Verfahren Heron's aufgedeckt. Nun sind aber durch Herrn Wirklichen Geheimen Ober-Regierungsrat Dr. R. Schöne zu Berlin im Kodex Nr. 1 der Serailbibliothek zu Konstantinopel die drei Bücher *Μετρικά* Heron's wieder aufgefunden worden, und wird der Text derselben, herausgegeben von dem Sohne des Entdeckers, Herrn Dr. Hermann Schöne, nebst einer deutschen Übersetzung erscheinen. Als mir vor einigen Wochen Einblick in die vortrefflich erhaltene und vorzüglich geschriebene Pergamenthandschrift, die dem Schrift-

* *Archimedis opera omnia ed.* Heiberg, *vol. III*, p. 270: *ὅπως δὲ δεῖ σύνεγγυς τὴν δυναμένην πλευρὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εὑρεῖν, εἴρηται μὲν Ἥρωνι ἐν τοῖς μετρικοῖς, εἴρηται δὲ Πάππῳ καὶ Θέωνι καὶ ἑτέροις πλείοσιν ἐξηγουμένοις τὴν μεγάλην σύνταξιν τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου. ὥστε οὐδὲν ἡμᾶς χρὴ περὶ τούτου ζητεῖν ἐξὸν τοῖς φιλομαθέσιν ἐξ ἐκείνων ἀναλέγεσθαι.*

** V. V. Bobynin, *Extraction des racines carrées dans la Grèce Antique* (Zeitschrift für Mathematik und Physik, Hist.-litt. Abt. 1896, 6. Heft, S. 193—211).

charakter nach im 10. Jahrhundert entstanden sein wird, gestattet wurde, war mir die Stelle des Eutokios nicht gegenwärtig; durch den Aufsatz Bobynin's darauf wieder aufmerksam geworden, wendete ich mich sofort an Herrn Geheimenrat Dr. Schöne mit der Bitte, den Text der *Μετρικά* daraufhin nachsehen lassen zu wollen, ob die durch Eutokios versprochene Stelle sich wirklich in demselben finde, und, wenn dies in der That der Fall sei, durch Veröffentlichung des betreffenden Abschnittes noch vor Herausgabe des Ganzen für eine so wichtige historisch-mathematische Streitfrage einen hoffentlich endgiltigen Abschluss herbeizuführen. Die daraufhin vorgenommene Textesdurchsicht ergab nun wirklich den gewünschten Nachweis, sie ergab aber noch mehr: *die Anweisung, methodisch den angenäherten Wert von Kubikwurzeln aus Nichtkubikzahlen zu finden*, also, wenn man von der bekannten Pappustelle absieht,* ein vollständiges Novum Herr Dr. Hermann Schöne hatte die grosse Güte, mir die betreffenden Abschnitte aus dem 1. und dem 3. Buche jenes Werkes im Originalwortlaute mit seinen kritischen Bemerkungen versehen mitzuteilen; es wurde mir dabei aber gleichzeitig auch die Erlaubnis erteilt, dieselben noch vor der Herausgabe des vollständigen Textes der *Μετρικά* veröffentlichen zu dürfen, und so ist in hochherziger Weise, in einer Art, die zu erhoffen ich ja nie Grund hatte, meinem oben erwähnten Wunsche Rechnung getragen worden. Auch an dieser Stelle meinem tiefgefühltesten Danke für diese grosse Güte Ausdruck zu geben, ist mir zugleich Bedürfnis und angenehme Pflicht.

Zunächst lasse ich hier den Text der Anweisung, Quadratwurzeln näherungsweise zu finden, folgen, und werde dann daran einige weitere erläuternde Bemerkungen knüpfen. Nochmals wiederhole ich, dass sowohl die Textrezension als die kritischen Bemerkungen von Herrn Dr. Hermann Schöne in Berlin stammen. Die Schreibweise der Handschrift ist sowohl bei den ganzen Zahlen als auch bei den Brüchen beibehalten, und nur die offenbaren Irrtümer sind berichtigt.

*Codex Constantinopolitanus palatii veteris 1, fol. 70ᶜ:*

1 ἐπεὶ οὖν αἱ $\overline{\psi\kappa}$ ῥητὴν πλευρὰν οὐκ ἔχουσι, ληψόμεθα μετὰ διαφόρου ἐλαχίστου τὴν πλευρὰν οὕτως· ἐπεὶ ὁ συνεγγίζων τῷ $\overline{\psi\kappa}$ τετράγωνός 5 ἐστιν ὁ $\overline{\psi\kappa\vartheta}$ καὶ πλευρὰν ἔχει τὸν $\overline{\kappa\zeta}$, μέρισον τὰς $\overline{\psi\kappa}$ εἰς τὸν $\overline{\kappa\zeta}$· γίγνεται $\overline{\kappa\varsigma}$ καὶ τρίτα δύο. πρόσθες

Das heisst zu deutsch:

Da nun 720 eine rationale Wurzel nicht besitzt, so finden wir die Wurzel mit kleinster Differenz in folgender Weise. Da das 720 am nächsten kommende Quadrat 729 mit der Seite 27 ist, so teile 720 durch 27; es entsteht $26\frac{2}{3}$. Dazu addiere 27, es ergiebt sich $53\frac{2}{3}$; davon die Hälfte giebt $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$: also

* Pappi Alexandrini *collectionis quae supersunt ed.* Fr. Hultsch. Vol. I, Berolini 1876, p. 33.

τὰς κζ. γίγνεται νγ τρίτα δύο. τούτων τὸ ἥμισυ γίγνεται κϛ∟γ'. ἔσται 10 ἄρα τοῦ ψκ ἡ πλευρὰ ἔγγιστα τὰ κϛ∟γ'. τὰ γὰρ κϛ∟γ' ἐφ' ἑαυτὰ γίγνεται ψκ λ'ϛ. ὥστε τὸ διάφορον μονάδος ἐστὶ μόριον λ'ϛ. ἐὰν δὲ βουλώμεθα ἐν ἐλάσσονι μορίῳ 15 τοῦ λ'ϛ τὴν διαφορὰν γίγνεσθαι, ἀντὶ τοῦ ψκθ τάξομεν τὰ νῦν εὑρεθέντα ψκ καὶ λ'ϛ. καὶ ταῦτα ποιήσαντες εὑρήσομεν πολλῷ ἔλαττον λ'ϛ τὴν διαφορὰν γιγνο- 20 μένην.

ist die nächste Wurzel aus 720 gleich $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. Denn $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ mit sich selbst multipliziert giebt $720\frac{1}{36}$, so dass der Unterschied nur $\frac{1}{36}$ der Einheit beträgt. Wollen wir aber, dass der Unterschied in noch kleineren Teilen als $\frac{1}{36}$ sich ergäbe, so setzen wir an Stelle von 729 die jetzt gefundenen $720\frac{1}{36}$, und indem wir dieses thun, finden wir, dass der Unterschied um vieles geringer wird als $\frac{1}{36}$.

1. ρη τὴν die Hs. — 3. τῶ die Hs. — 11 zu Anfang τὰ wohl als Dittographie zu tilgen. — 12, 13, 15, 17 λϛ, dagegen 19 λ'ϛ die Hs.

Im Obigen liegt offenbar die Formel verborgen (dabei bedeutet $\sim$ nahezu gleich):

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 \pm b} \sim \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right) = \alpha; \quad \sqrt{A} \sim \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{A}{\alpha}\right) = \alpha';$$

$$\sqrt{A} \sim \frac{1}{2}\left(\alpha' + \frac{A}{\alpha'}\right) = \alpha'' \text{ etc.}$$

Schreibt man dieselbe entwickelt so:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 \pm b} \sim \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2 \pm b}{a}\right) \sim a \pm \frac{b}{2a},$$

so sieht man, dass in der Heron'schen Formel die von allen Forschern als den Griechen bekannt vorausgesetzte Annäherung

$$\sqrt{a^2 \pm b} \sim a \pm \frac{b}{2a}$$

enthalten ist. Obwohl diese Form des Resultates von Heron nicht ausdrücklich erwähnt wird, so ergiebt sich doch aus den bis jetzt veröffentlichten Texten ohne Zweifel, dass sie ihm bekannt gewesen ist. Denn, wenn er $\sqrt{63} = 8 - \frac{1}{16}$ setzt (*λοιπὰ ξγ· τούτων τετραγωνικὴ πλευρὰ γίγνεται η παρὰ ιϛ''*, ed. Hultsch, p. 163, 9—10), so muss er sicherlich diesen Wert durch die zweite Form gefunden haben, da die Anwendung der ersten Form sie als $7\frac{15}{16}$ ergiebt. Das doppelte Vorzeichen entspricht dem *συνεγγίζων* des Textes, da bald das grössere bald das kleinere Quadrat die grössere Annäherung ergiebt. Speziell das Beispiel Heron's $\sqrt{720}$ ergiebt nach der zweiten Form des Ausdruckes:

$$\sqrt{27^2-9} = 27 - \frac{9}{54} = 27 - \frac{1}{6} = 26\frac{5}{6},$$

aber gerade aus diesem Beispiele ist klar, dass selbst bei so nahe liegender Anwendung der zweiten Form der obigen Regel doch die erste gewählt wurde. Sie ergiebt hier die Wurzel sofort in der gewünschten Form von Stammbrüchen zu $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. Dass das als nächstes zu wählende Quadrat nicht jedesmal das einer ganzen Zahl zu sein brauchte, liegt in der Bemerkung am Ende der Anweisung, man solle, um grössere Annäherung zu finden, mit dem gefundenen Werte $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ so weiter verfahren, wie vorher mit 27. So ist es z. B. klar, dass $\sqrt{3}$ näher an 2 als an 1 liegen muss, und eine kurze Überlegung zeigt, dass $\sqrt{3} \sim \frac{5}{3}$ eine gar nicht schlechte Annäherung ist; aus ihr folgt aber:

$$\sqrt{3} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} + \frac{9}{5}\right) = \frac{26}{15},$$

der Wert Heron's; und weiter:

$$\sqrt{3} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{26}{15} + \frac{45}{26}\right) = \frac{1351}{780},$$

der eine Wert des Archimedes.

Dieselbe Methode, wie die des Heron, finden wir in den beiden Briefen des Nicolaus Rhabdas auseinandergesetzt, welche Paul Tannery 1886 herausgab,* mit dem einzigen Unterschiede, dass Rhabdas die erste Annäherung nach der zweiten Form der aus der Heron'schen Anleitung folgenden Formel sucht. Er hat also nicht gesehen, dass seine zweite Annäherung sich genau so finden lassen würde wie seine erste. Dass, sobald Brüche in Frage kommen, das Heron'sche Verfahren bequemer ist als die abgeleitete Form, ist offenbar. Dieselbe Methode finden wir später in der *Summa* des Luca Paciuolo, wir finden sie bei Cataldi, wir finden sie bei Cardan und Tartaglia und, wissenschaftlich begründet, als die von Günther sogenannte zweite Methode Buzengeiger's.** Diese Methode, welche von Günther a. a. O. als versteckter Kettenbruchalgorithmus aufgedeckt ist, ist also sicher den alten Griechen bekannt gewesen, und es lassen sich mit demselben alle von Tannery*** als echt Heronisch bezeichneten Wurzeln mit Leichtigkeit ableiten. So ist z. B.:

---

* *Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas (Text grec et traduction) par M.* Paul Tannery. Paris 1886. p. 40—41 und 68—75.

** Man sehe darüber: Dr. S. Günther, *Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden* (Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Heft 4, S. 1—134) § 11, S. 76—79 und § 13, S. 83—87.

*** P. Tannery, *l'arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie* (Mémoires de la Société des sciences phys. et nat. de Bordeaux. 2e Sér. T. IV).

$$\sqrt{58\frac{7}{16}} \sim \frac{1}{2}\left(7\frac{1}{2} + 7\frac{19}{24}\right) = 7\frac{31}{48} \sim 7\frac{2}{3};$$

$$\sqrt{444\frac{4}{9}} \sim \frac{1}{2}\left(20 + 22\frac{2}{9}\right) = 21\frac{1}{9} \sim \frac{1}{2}\left(21\frac{1}{9} + 21\frac{1}{19}\right) = 21\frac{14}{171} \sim 21\frac{1}{12};$$

$$\sqrt{3400} \sim \frac{1}{2}\left(58 + 58\frac{18}{29}\right) = 58\frac{9}{29} \sim 58\frac{1}{3};$$

$$\sqrt{135} \sim \frac{1}{2}\left(11\frac{2}{3} + 11\frac{4}{7}\right) = 11\frac{13}{21};$$

$$\sqrt{6300} \sim \frac{1}{2}\left(79\frac{1}{3} + 79\frac{49}{119}\right) = 79\frac{19}{51};$$

$$\sqrt{43\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\left(6\frac{1}{2} + 6\frac{19}{26}\right) = 6\frac{8}{13};$$

$$\sqrt{1575} \sim \frac{1}{2}\left(39\frac{2}{3} + 39\frac{12}{17}\right) = 39\frac{35}{51};$$

$$\sqrt{216} \sim \frac{1}{2}\left(14\frac{2}{3} + 14\frac{8}{11}\right) = 14\frac{23}{33};$$

$$\sqrt{356} \sim \frac{1}{2}\left(18\frac{3}{4} + 18\frac{74}{75}\right) = 18\frac{521}{600} \sim 18\frac{7}{8};$$

$$\sqrt{8\frac{7}{16}} \sim \frac{1}{2}\left(2\frac{2}{3} + 3\frac{21}{128}\right) = 2\frac{703}{768} \sim 2\frac{11}{12};$$

$$\sqrt{885\frac{15}{16}} \sim \frac{1}{2}\left(29\frac{3}{4} + 29\frac{371}{476}\right) = 29\frac{13}{17};$$

$$\sqrt{108} \sim \frac{1}{2}\left(10 + 10\frac{4}{5}\right) = 10\frac{2}{5}.$$

Dass die Archimedischen Quadratwurzeln nicht nach dieser Methode entwickelt sein können, ist schon längst erkannt. Ob folgende Erwägung nicht beachtenswert sein dürfte, möchte ich anheimstellen. Richtet man z. B. in

$$\sqrt{1373943\frac{33}{64}}$$

einfach die gemischte Zahl ein, und zieht dann, nur die Ganzen der Wurzel berücksichtigend, aus Zähler und Nenner die Wurzel, so entsteht $\frac{9377}{8} = 1172\frac{1}{8}$; ebensolches Verfahren mit $\sqrt{5472132\frac{1}{16}}$ giebt ohne weiteres $\frac{9357}{4} = 2339\frac{1}{4}$. Multipliziert man in $\sqrt{349450}$ den Radikand mit 64, so ist die ganze Wurzel 4729, was durch 8 dividiert $591\frac{1}{8}$ liefert, den ausser von Bobynin sonst nie gefundenen Archimedischen Wert. Ein gleiches Verfahren auf $\sqrt{3380929}$ angewendet giebt, nach Erweiterung mit $11^2$, $\frac{20227}{11} = 1838\frac{9}{11}$, wobei man, da Archimedes eine zu grosse Wurzel verlangt, freilich das nächst grössere Quadrat benutzen muss. Im ganzen Mittelalter findet man für die näherungsweise Quadratwurzelberechnung stets die Anwendung der Formel:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{bc}\sqrt{abc^2} \quad \text{resp.} \quad \sqrt{a} = \frac{1}{b}\sqrt{ab^2}$$

angeordnet, wobei ausdrücklich gesagt wird, es sollen nur aus dem neuen Radikanden die Ganzen ausgezogen werden und der Rest weggelassen. Auch solle man sich nicht scheuen, wenn das nächste Quadrat nur um weniges grösser sei, dieses zu nehmen. Ob eben diese Anweisung nicht gleichfalls aus dem Altertume stammt, möchte ich der Erwägung anheimgeben. Sie giebt auch alle sonstigen Archimedischen Wurzelwerte direkt ohne jede Zwischenrechnung, sie liefert aber auch die beiden von Tannery* als nicht direkt ausgewertet bezeichneten Heron'schen Wurzeln $\sqrt{2460\frac{15}{16}}$ und $\sqrt{615\frac{15}{64}}$ sofort zu $\frac{10120}{204} = 49\frac{31}{51}$ und zu $\frac{10120}{408} = 24\frac{41}{51}$.

Ich komme zum zweiten Abschnitte der *Μετρικά* Heron's, der Kubikwurzelausziehung. Zunächst der Text desselben.

*Codex Constantinopolitanus palatii veteris 1, fol. 108r.*

1 ὡς δὲ δεῖ λαβεῖν τῶν ρ̄ μονά-
δων κυβικὴν πλευρὰν, νῦν ἐροῦμεν.
λάβε τὸν ἔγγιστα κύβον τοῦ
ρ̄ τόν τε ὑπερβάλλοντα καὶ τὸν
5 ἐλλείποντα· ἔστι δὲ ὁ ρκε καὶ ὁ
ξδ· καὶ ὅσα μὲν ὑπερβάλλει, μονά-
δες κε· ὅσα δὲ ἐλλείπει, μονάδες
λς· καὶ ποίησον τὰ ε̄ ἐπὶ τὰ λς·
γίγνεται ρπ· καὶ τὰ ρ̄· γίγνεται
10 σπ· ⟨καὶ παράβαλε τὰ ρπ παρὰ τὰ
σπ·⟩ γίγνεται θ ιδ. πρόσβαλε τῇ
[κατὰ] τοῦ ἐλάσσονος κύβου πλευρᾷ,
τουτέστι τῷ δ̄. γίγνεται μονάδες δ̄
καὶ θ ιδ. τοσούτων ἔσται ἡ τῶν ρ̄
15 μονάδων κυβικὴ πλευρὰ ὡς ἔγγιστα.

Wie aber die Kubikwurzel aus 100 Einheiten zu finden ist, wollen wir jetzt sagen.

Nimm die beiden 100 am nächsten kommenden Kubi, den grösseren und kleineren; es sind dies 125 und 64; und auch, um wieviel der erste grösser ist, d. i. 25, und um wieviel der andere kleiner, d. i. 36. Dann multipliziere 36 mit 5; es entsteht 180. Dazu die 100 addiert, giebt 280, ⟨und dividiere 180 durch 280,⟩ so entsteht $\frac{9}{14}$. Füge dies zu der Wurzel des kleineren Kubus hinzu, das ist zu 4, so entsteht $4\frac{9}{14}$. So gross ist die Kubikwurzel aus 100 Einheiten so genau als möglich.

1. τὸν die Hs. — 8. καὶ beginnt fol. 108v. — 10—11. ⟨καὶ ... σπ⟩ ist ergänzt. — 12. κατὰ ist von späterer Hand getilgt. — 13. τὸ von erster Hand, ω hat eine spätere Hand übergeschrieben. — Zeile 10 hat eine jüngere Hand nach σπ das Zeichen ·/. beigeschrieben; dieses Zeichen ist am Rande wiederholt und dazu geschrieben: ·/. καὶ παραβεβλήσθω ταῦτα παρὰ τὰ ρπ. Diese offenbar auf Konjektur

* Tannery, a. a. O., S. 22 des Separatabzuges.

beruhende Ergänzung der im Texte bemerkbaren Lücke trifft jedoch im Ausdruck nicht das Richtige. Heron gebraucht nämlich παραβάλλειν παρὰ für „dividieren durch"; so sagt er z. B. wenige Zeilen vor dem ausgehobenen Abschnitt: τὰ $\overline{ρκε}$ ἐπὶ τὸν $\overline{δ}$· γίγνεται $\overline{φ}$· παράβαλε παρὰ τὸν $\overline{ε}$· γίγνεται $\overline{ρ}$ und ähnlich öfter in den *Μετρικά*. Mithin ist nach $\overline{σκ}$ auf Zeile 10 einzuschieben: ⟨καὶ παράβαλε τὰ ρκ παρὰ τὰ $\overline{σκ}$·⟩. Nunmehr erklärt sich auch die Entstehung der Lücke aufs einfachste: offenbar ist das Auge des Schreibers von dem ersten $\overline{σκ}$ der Vorlage auf das zweite abgeirrt, und auf diese Weise sind die dazwischen stehenden Worte verloren gegangen.

Wenn in dem obigen Abschnitte 5 die Kubikwurzel aus 125 sein sollte, so würde die Bestimmung der Differenz 25 vollständig überflüssig sein; es kann daher 5 nur die Quadratwurzel aus 25 bedeuten sollen. In der obigen Anweisung liegt dann folgende Regel verborgen:

$$A = p^3 - a = q^3 + b;$$

$$\sqrt[3]{A} = q + \frac{b\sqrt{a}}{A + b\sqrt{a}} = q + \frac{(A - q^3)\sqrt{p^3 - A}}{A + (A - q^3)\sqrt{p^3 - A}}.$$

Die gefundene Wurzel $\sqrt[3]{100} = 4\frac{9}{14}$ ist merkwürdig genau. Ihre dritte Potenz ist gleich

$$100\frac{225}{2744} \sim 100\frac{1}{12}.$$

In Stammbrüche nach Heron's sonstiger Art umgesetzt ist

$$4\frac{9}{14} = 4\frac{1}{2}\frac{1}{7} = 4{,}6\dot{4}2857\dot{1},$$

während $\sqrt[3]{100} = 4{,}6415888\ldots$ ist. $4\frac{1}{2}\frac{1}{6}$ wäre $= 4{,}6\dot{6}$ und $4\frac{1}{2}\frac{1}{8} = 4{,}625$, sodass $4\frac{1}{2}\frac{1}{7}$ wirklich dem wahren Werte näher kommt als irgend ein in Stammbrüchen ausgedrückter Nachbarwert.*

Wie Heron auf dieses Verfahren gekommen ist, dürfte kaum zu ergründen sein. Bei anderen Zahlen giebt es meist einen bei weitem ungenaueren Wert. Von Interesse war es, für $\sqrt[3]{300}$ dasselbe zu prüfen, da bekanntlich das Verhältnis:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt[3]{\frac{300}{216}}$$

dasjenige der babylonischen zur hellenischen Elle darstellt, welches die Griechen zu $\frac{10}{9}$ annahmen.** Nun ist:

$$300 = 7^3 - 43 = 6^3 + 84,$$

also $a = 43$, $b = 84$. Es ist aber:

$$\sqrt{43} = \frac{1}{2}\left(6 + 7\frac{1}{6}\right) = 6\frac{7}{12},$$

also:

---

* Hierauf machte mich mein verehrter Freund, Herr Hofrat Cantor, aufmerksam.

** Man sehe: S. Günther, *Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik* (Abhandlungen der Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Neue Folge, 9. Band) S. 40 des Sonderabzuges.

$$b \cdot \sqrt{a} = 6\frac{7}{12} \cdot 84 = 553;$$

es folgt also:

$$\sqrt[3]{300} \sim 6\frac{553}{853} = 6{,}648 \cdots \sim 6{,}65.$$

Das Verhältnis 6,65 : 6 ist aber so nahe gleich 10 : 9, dass diese Verwechselung unbedenklich angenommen werden darf. Unmöglich wäre also diese Berechnung der $\sqrt[3]{300}$ auf dem Heron'schen Wege nicht.

Während so das Problem der Heron'schen Berechnung der Quadratwurzeln aus Nichtquadratzahlen praktisch und theoretisch längst bekannt und vielfach geübt ist, und jedenfalls viel schneller als das gewöhnliche Verfahren ohne Hilfe der Logarithmen zu sehr genauen Werten führt, auch bei weitem schneller als das Verfahren durch die gewöhnlichen Kettenbrüche, giebt die Anweisung unseres Verfassers zur Bestimmung der Kubikwurzeln ein neues Problem auf: *Wie ist* Heron *auf diesen eigentümlichen Weg gelangt?* Dass derselbe nicht nur für $\sqrt[3]{100}$ einen annehmbaren Wert liefert, habe ich oben dargethan. Wo ist der Oedipus, der dies Rätsel löst?

Thorn, 22. Januar 1897.

---

## Die Schlussaufgabe in Diophants Schrift über Polygonalzahlen.

Von

G. Wertheim.

---

In der Einleitung zu seiner Schrift über Polygonalzahlen giebt Diophant in ganz bestimmter Weise an, was er in der Schrift zu behandeln gedenkt. Er will nach Herleitung der erforderlichen Hilfssätze beweisen, dass man immer eine Quadratzahl erhält, wenn man das 8fache einer Polygonalzahl mit der um 2 verminderten Anzahl der Ecken multipliziert und zum Produkt das Quadrat der um 4 verminderten Anzahl der Ecken addiert. Vermittelst dieses Satzes will er dann zeigen, wie man aus der Seite und der Zahl der Ecken die zugehörige Polygonalzahl, und wie man umgekehrt, wenn die Polygonalzahl und die Zahl der Ecken gegeben sind, die zugehörige Seite findet.

Nachdem er alles dieses in völlig zufriedenstellender Weise geleistet hat, beginnt er eine Aufgabe, die zwar nicht ausdrücklich in der Einleitung angekündigt worden ist, aber doch so nahe liegt, dass ein Mathematiker bei Behandlung des Gegenstandes wohl kaum umhin konnte, sie in Angriff zu nehmen. Er will bestimmen: „auf wie viele Arten eine gegebene Zahl Polygonalzahl sein könne“. Wäre die Lösung dieser Aufgabe beendet, so würde sie sicherlich von niemand für einen fremden Zusatz zum Diophant erklärt worden sein; denn in der Darstellung unterscheidet sie sich in nichts von dem Vorhergehenden. Aber die Lösung bricht in der Mitte ab, eine Ergänzung schien schwierig, und da war es ein naheliegendes Mittel, die Aufgabe abzuthun, dass man sie überhaupt für unecht erklärte. So radikal sind freilich nicht alle Schriftsteller verfahren, die sich mit der Sache beschäftigt haben.

Bachet (S. 26) sagt in seinem Zusatz zu dem Bruchstück bloss, „dass vieles fehle, was er nicht erraten könne, und dass ihm das Ziel Diophants nicht hinlänglich klar sei.“ Er giebt dann den Gang der Lösung, soweit sie vorliegt, kurz und klar wieder und behandelt (S. 38) die Aufgabe selbständig in einer Weise, die mit dem Bruch-

stück in keinem Zusammenhang steht und hier um so eher übergangen werden kann, als sie von Nesselmann in seiner „Algebra der Griechen“ (S. 469) allgemein dargestellt worden ist.

Fermat äussert sich über die Aufgabe folgendermaßen: „Die Frage, die mich beschäftigt hat, ohne dass ich bis jetzt eine Lösung habe finden können, ist die letzte in Diophants Schrift über Polygonalzahlen: Zu bestimmen, auf wie viele Arten eine gegebene Zahl Polygonalzahl sein könne.

Da der Text Diophants korrumpiert ist, so können wir seine Methode nicht erraten. Bachets Methode gefällt mir nicht und ist für grosse Zahlen zu schwierig. Ich habe freilich eine bessere gefunden, aber sie befriedigt mich noch nicht.“

Im Anschluss hieran, fährt er fort, müsse man die Lösung der Aufgabe suchen:

„Eine Zahl zu finden, welche auf so viele und nicht auf mehr Arten, als verlangt wird, Polygonalzahl sei, und von den Zahlen, die dieses leisten, die kleinste anzugeben.“ — Oeuvres de Fermat, II, S. 435.

Über das Bruchstück selbst sagt Nesselmann: „Wie Diophant die Aufgabe gelöst habe, lässt sich aus dem Bruchstück nicht entnehmen; wenigstens ist es mir nicht gelungen, in dem Vorhandenen einen sicheren Fingerzeig auf das verloren gegangene Ziel des Weges zu entdecken.“

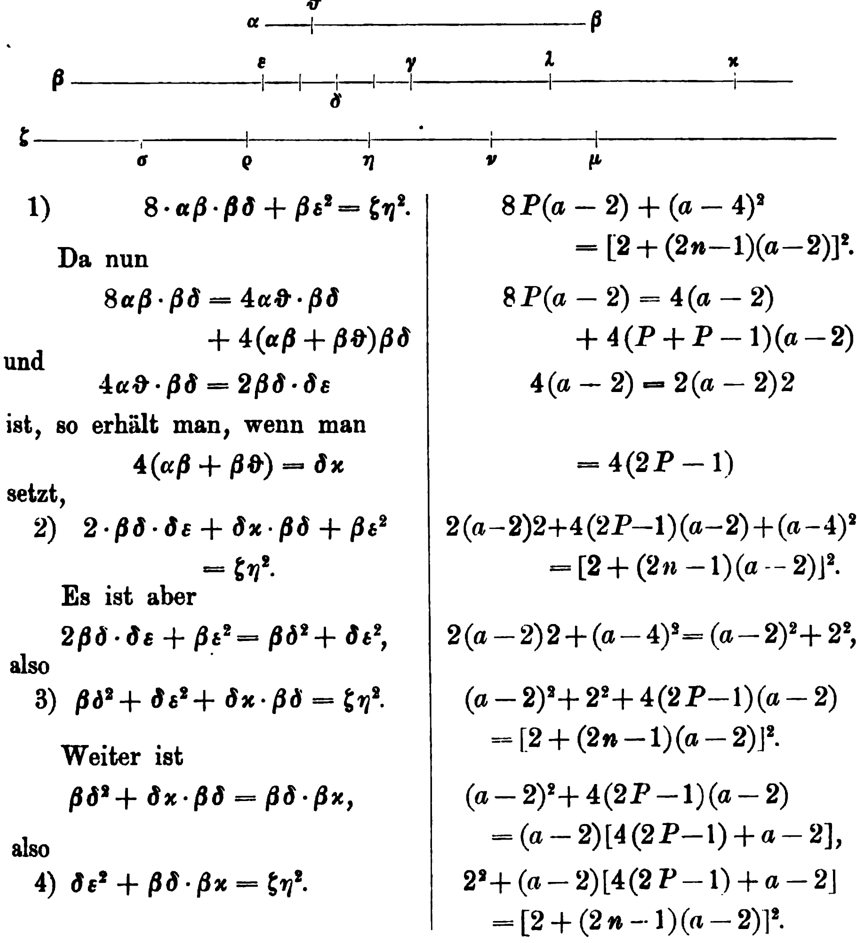
Ihm schliesst sich Cantor an (Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. I, S. 455). Nachdem er den Wortlaut der Aufgabe gegeben und den Sinn derselben erläutert hat, bemerkt er: „Leider ist die Antwort auf diese Frage nicht so verständlich wie die Frage selbst. Sie bricht in der Mitte ab, ohne dass es bisher gelungen wäre, das Bruckstück dem Sinne entsprechend zu ergänzen.“

Dagegen sagt Otto Schulz auf S. 619 seiner Diophant-Übersetzung: „Das Bruchstück hat ganz das Ansehen eines fremdartigen Zusatzes, der ohne Beeinträchtigung des Ganzen weggelassen werden könnte“, und Herr Paul Tannery nennt es S. 477 des ersten Bandes seiner Diophant-Ausgabe „einen misslungenen Versuch eines Kommentators.“

Ich werde jetzt im folgenden zu zeigen versuchen, dass man ohne Künstelei und nur mit Anwendung von Sätzen und Operationen, die Diophant zweifellos geläufig waren, die in dem Bruchstück begonnene Lösung der Aufgabe zu Ende führen kann. Damit glaube ich dann den Beweis erbracht zu haben, dass die Aufgabe wirklich zu der Schrift über Polygonalzahlen, wie sie Diophant abgefasst hat, gehört, und dass vielleicht nur die Länge und die Schwierigkeit der Lösung dem Abschreiber die Hoffnung geraubt haben, sich durchzuarbeiten, sodass er mitten in der Arbeit entmutigt den Griffel niederlegte.

**Diophant** wendet in seiner Schrift über Polygonalzahlen die lineare Methode **Euklids** an, nach welcher Zahlen durch Linien dargestellt und die geforderten Operationen an diesen Linien ausgeführt werden. Die Vorsicht erheischt es, diese Methode auch hier beizubehalten; denn dadurch werden unzulässige Schlüsse am leichtesten vermieden. Doch soll zur Erleichterung des Verständnisses die moderne Bezeichnung neben die alte gestellt werden.

Es soll also bestimmt werden, auf wie viele Arten die gegebene Zahl $\alpha\beta$ Polygonalzahl sein könne. Es wird $\alpha\vartheta = 1$, $\beta\gamma =$ Zahl der Ecken, das ist $a$, $\varepsilon\delta = \delta\gamma = 2$ angenommen. Dann ist nach dem der Lösung zu Grunde gelegten Satze:




1) $$8\cdot\alpha\beta\cdot\beta\delta + \beta\varepsilon^2 = \zeta\eta^2.$$ $$8P(a-2) + (a-4)^2 = [2 + (2n-1)(a-2)]^2.$$

Da nun
$$8\alpha\beta\cdot\beta\delta = 4\alpha\vartheta\cdot\beta\delta + 4(\alpha\beta + \beta\vartheta)\beta\delta$$ $$8P(a-2) = 4(a-2) + 4(P+P-1)(a-2)$$
und
$$4\alpha\vartheta\cdot\beta\delta = 2\beta\delta\cdot\delta\varepsilon$$ $$4(a-2) = 2(a-2)2$$
ist, so erhält man, wenn man
$$4(\alpha\beta + \beta\vartheta) = \delta\varkappa$$ $$= 4(2P-1)$$
setzt,

2) $$2\cdot\beta\delta\cdot\delta\varepsilon + \delta\varkappa\cdot\beta\delta + \beta\varepsilon^2 = \zeta\eta^2.$$ $$2(a-2)2+4(2P-1)(a-2)+(a-4)^2 = [2+(2n-1)(a-2)]^2.$$

Es ist aber
$$2\beta\delta\cdot\delta\varepsilon + \beta\varepsilon^2 = \beta\delta^2 + \delta\varepsilon^2,$$ $$2(a-2)2+(a-4)^2 = (a-2)^2+2^2,$$
also

3) $$\beta\delta^2 + \delta\varepsilon^2 + \delta\varkappa\cdot\beta\delta = \zeta\eta^2.$$ $$(a-2)^2+2^2+4(2P-1)(a-2) = [2+(2n-1)(a-2)]^2.$$

Weiter ist
$$\beta\delta^2 + \delta\varkappa\cdot\beta\delta = \beta\delta\cdot\beta\varkappa,$$ $$(a-2)^2+4(2P-1)(a-2) = (a-2)[4(2P-1)+a-2],$$
also

4) $$\delta\varepsilon^2 + \beta\delta\cdot\beta\varkappa = \zeta\eta^2.$$ $$2^2+(a-2)[4(2P-1)+a-2] = [2+(2n-1)(a-2)]^2.$$

Nun sei $\lambda$ die Mitte von $\delta\varkappa$, also
$$\delta\lambda = \lambda\varkappa$$ $$= 2(2P-1)$$
$$\beta\lambda = \beta\delta + \delta\lambda.$$ $$= a-2+2(2P-1).$$

Dann giebt die Anwendung der Formel

$$x(x+y)=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2:$$

$$\beta\delta\cdot\beta\varkappa=\beta\lambda^2-\delta\lambda^2 \qquad\qquad (a-2)[4(2P-1)+a-2]=[a-2+2(2P-1)]^2-[2(2P-1)]^2.$$

Es ist also

5) $$\delta\varepsilon^2+\beta\lambda^2-\delta\lambda^2=\zeta\eta^2, \qquad\qquad 2^2+[a-2+2(2P-1)]^2-[2(2P-1)]^2=[2+(2n-1)(a-2)]^2$$

oder

6) $$\beta\lambda^2-\zeta\eta^2=\delta\lambda^2-\delta\varepsilon^2. \qquad\qquad [a-2+2(2P-1)]^2-[2+(2n-1)(a-2)]^2=[2(2P-1)]^2-2^2.$$

Nun ist nach der Formel $x^2=(x+2)(x-2)+2^2$:

$$\delta\lambda^2=\varepsilon\lambda\cdot\gamma\lambda+\gamma\delta^2, \qquad\qquad [2(2P-1)]^2=4P(4P-4)+2^2$$

und da $\gamma\delta=\delta\varepsilon$ ist, so erhalten wir

7) $$\beta\lambda^2-\zeta\eta^2=\varepsilon\lambda\cdot\gamma\lambda. \qquad\qquad [a-2+2(2P-1)]^2-[2+(2n-1)(a-2)]^2=4P(4P-4).$$

Wir machen jetzt

$$\zeta\mu=\beta\lambda. \qquad\qquad =a-2+2(2P-1).$$

Da sich nun leicht

$$\varepsilon\lambda=\varepsilon\delta+\delta\lambda=2\alpha\vartheta+\frac{1}{2}\delta\varkappa=2\alpha\vartheta+2(\alpha\beta+\beta\vartheta)=4\alpha\beta \qquad\qquad \varepsilon\lambda=4P$$

und

$$\gamma\lambda=\delta\lambda-2\alpha\vartheta=4\beta\vartheta \qquad\qquad \gamma\lambda=4(P-1)$$

ergiebt, so folgt

8) $$\zeta\mu^2-\zeta\eta^2=16\alpha\beta\cdot\beta\vartheta. \qquad\qquad [a-2+2(2P-1)]^2-[2+(2n-1)(a-2)]^2=16P(P-1).$$

Nun ist

$$\zeta\mu=\zeta\eta+\eta\mu,$$

folglich

$$\zeta\mu^2-\zeta\eta^2=2\cdot\zeta\eta\cdot\eta\mu+\eta\mu^2,$$

wir erhalten somit

9) $$2\cdot\zeta\eta\cdot\eta\mu+\eta\mu^2=16\cdot\alpha\beta\cdot\beta\vartheta \qquad\qquad \begin{cases}2[2+(2n-1)(a-2)][2(2P-2)\\-2(a-2)(n-1)]+[2(2P-2)\\-2(a-2)(n-1)]^2=16P(P-1).\end{cases}$$

Diese Gleichung lehrt, dass $\eta\mu$ eine gerade Zahl, also $\eta\mu^2$ durch 4 teilbar ist.

Wir nehmen an, $\nu$ sei die Mitte von $\eta\mu$, also

$$\eta\nu = \nu\mu. \qquad\Big|\qquad = 2(P-1) - (a-2)(n-1).$$

So weit reicht das Bruchstück. Um die Lösung zu beenden, dividiere ich die Gleichung 9) durch 4 und erhalte

10) $$\zeta\eta\cdot\eta\nu + \eta\nu^2 = 4\alpha\beta\cdot\beta\vartheta, \qquad\Bigg|\qquad \left\{\begin{aligned} &[2+(2n-1)(a-2)]\times\\ &[2(P-1)-(a-2)(n-1)]\\ &+[2(P-1)-(a-2)(n-1)]^2\\ &=4P(P-1),\end{aligned}\right.$$

oder

11) $$\zeta\nu\cdot\eta\nu = 4\alpha\beta\cdot\beta\vartheta. \qquad\Bigg|\qquad \left\{\begin{aligned} &[2P+n(a-2)][2(P-1)\\ &-(a-2)(n-1)] = 4P(P-1).\end{aligned}\right.$$

Wird jetzt $\zeta\varrho = 2\alpha\beta$ und $\varrho\sigma = \eta\nu$, also $\eta\sigma = \varrho\nu$ angenommen, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} \zeta\sigma &= \zeta\varrho - \varrho\sigma = 2\alpha\beta - \varrho\sigma, &&\Big|\quad = 2+(a-2)(n-1),\\ \zeta\nu &= \zeta\varrho + \varrho\nu = 2\alpha\beta + \varrho\nu, &&\Big|\quad = 2P + n(a-2),\\ \eta\nu &= \varrho\sigma = 2\alpha\beta - \zeta\sigma, &&\Big|\quad = 2(P-1)-(a-2)(n-1),\end{aligned}$$

und die Gleichung 11) geht über in

12) $$(2\alpha\beta+\varrho\nu)(2\alpha\beta-\zeta\sigma) = 4\alpha\beta\cdot\beta\vartheta \qquad\Bigg|\qquad \left\{\begin{aligned} &[2P+n(a-2)]\times\\ &[2P-2-(a-2)(n-1)]\\ &\quad=4P(P-1).\end{aligned}\right.$$

oder

13) $$4\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta(\zeta\sigma-\varrho\nu) - \varrho\nu\cdot\zeta\sigma = 4\alpha\beta^2 - 4\alpha\beta\cdot\alpha\vartheta. \qquad\Bigg|\qquad \begin{aligned} &4P^2-2P[(a-2)(n-1)+2-n(a-2)]\\ &-n(a-2)[(a-2)(n-1)+2]\\ &=4P^2-4P.\end{aligned}$$

Es muss also

14) $$2\alpha\beta(\zeta\sigma-\varrho\nu)+\varrho\nu\cdot\zeta\sigma = 4\alpha\beta\cdot\alpha\vartheta, \qquad\Bigg|\qquad \begin{aligned} &2P[(a-2)(n-1)+2-n(a-2)]\\ &+n(a-2)[(a-2)(n-1)+2]\\ &=4P,\end{aligned}$$

oder

15) $$2\alpha\beta(2\alpha\vartheta+\varrho\nu-\zeta\sigma) = \varrho\nu\cdot\zeta\sigma \qquad\Bigg|\qquad \begin{aligned} &2P(a-2)\\ &=n(a-2)[(a-2)(n-1)+2]\end{aligned}$$

sein. Nun ist aber

$$\begin{aligned} \varrho\nu &= \zeta\nu - \zeta\varrho = \zeta\mu - \nu\mu - \zeta\varrho = \zeta\mu - \tfrac{1}{2}\eta\mu - \zeta\varrho\\ &= \beta\lambda - \tfrac{1}{2}\eta\mu - 2\alpha\beta = \beta\delta + \tfrac{1}{2}\delta\varkappa - \tfrac{1}{2}\eta\mu - 2\alpha\beta\\ &= \beta\delta + 2\alpha\beta + 2\beta\vartheta - \tfrac{1}{2}\eta\mu - 2\alpha\beta = \beta\delta + 2\beta\vartheta - \tfrac{1}{2}\eta\mu\end{aligned}$$

und

$$\zeta\sigma = \zeta\varrho - \varrho\sigma = 2\alpha\beta - \tfrac{1}{2}\eta\mu,$$

also

$$\varrho\nu - \zeta\sigma = \beta\delta + 2\beta\vartheta - 2\alpha\beta = \beta\delta - 2\alpha\vartheta$$

und

$$\varrho\nu - \zeta\sigma + 2\alpha\vartheta = \beta\delta.$$

Weiter ergiebt sich

$$\begin{aligned}\varrho\nu &= \beta\delta + 2\beta\vartheta - \tfrac{1}{2}\eta\mu = \beta\delta + 2\beta\vartheta - \tfrac{1}{2}\beta\lambda + \tfrac{1}{2}\zeta\eta \\ &= \beta\delta + 2\beta\vartheta - \tfrac{1}{2}\beta\delta - \tfrac{1}{2}\delta\lambda + \tfrac{1}{2}\zeta\eta = \tfrac{1}{2}\beta\delta + 2\beta\vartheta - \tfrac{1}{2}\delta\lambda + \tfrac{1}{2}\zeta\eta \\ &= \tfrac{1}{2}\beta\delta + 2\beta\vartheta - (\alpha\beta + \beta\vartheta) + \tfrac{1}{2}\zeta\eta = \tfrac{1}{2}\beta\delta + \beta\vartheta - \alpha\beta + \tfrac{1}{2}\zeta\eta \\ &= \tfrac{1}{2}\beta\delta - \alpha\vartheta + \tfrac{1}{2}\zeta\eta = \tfrac{1}{2}(\beta\delta + \zeta\eta - 2\alpha\vartheta).\end{aligned}$$

Nach dem Satze IX (S. 310 meiner Übersetzung) ist aber

$$\zeta\eta = \beta\delta(2n-1) + 2,$$

also

$$\zeta\eta + \beta\delta = \beta\delta\cdot 2n + 2$$

und

$$\zeta\eta + \beta\delta - 2\alpha\vartheta = \beta\delta\cdot 2n,$$

also

$$\varrho\nu = \beta\delta\cdot n.$$

Die Gleichung 15) geht somit über in

16) $2\alpha\beta\cdot\beta\delta = \beta\delta\cdot n\cdot\zeta\sigma,$ | $\begin{cases} 2P(a-2) = (a-2)n \times \\ \quad [(a-2)(n-1)+2], \end{cases}$

oder

17) $2\alpha\beta = n\cdot\zeta\sigma.$ | $2P = n[(a-2)(n-1)+2]$

Es muss also das Doppelte einer Polygonalzahl durch die Seite teilbar sein, und der Quotient ist das um 2 vermehrte Produkt aus der um 1 verminderten Seite in die um 2 verminderte Zahl der Ecken.

Dieser Quotient $\zeta\sigma$ ist bei den Dreieckzahlen gleich der um 1 vergrösserten Seite $(n+1)$, also grösser als die Seite. Da derselbe nun um $n-1$ wächst, wenn die Zahl der Ecken um 1 zunimmt, so ist er immer grösser als die Seite; wir werden daher mit Hilfe von 17) auf folgende Weise finden, wie oft eine gegebene Zahl $\alpha\beta$ Polygonalzahl sein kann:

Wir zerlegen das Doppelte der gegebenen Zahl, also $2\alpha\beta$, auf alle möglichen Arten in je zwei ungleiche Faktoren, wobei die Zerlegung $1\cdot 2\alpha\beta$ ausgeschlossen bleibt. Den kleineren Faktor nehmen wir als Seite $(n)$ an, den grösseren als $\zeta\sigma$. Darauf vermindern wir den grösseren Faktor um 2 und dividieren den Rest durch die um 1 verringerte Seite $(n-1)$. Wenn diese Division aufgeht, so ist die betrachtete Zerlegung brauchbar, und der Quotient, vermehrt um 2, ist gleich der Zahl der Ecken $(a)$. Geht aber die Division nicht auf, so ist die betrachtete Zerlegung unbrauchbar. Eine Zahl $\alpha\beta$ ist also so oft Polygonalzahl, als es brauchbare Zerlegungen der Zahl $2\cdot\alpha\beta$ in je zwei ungleiche Faktoren giebt.

Eine brauchbare Zerlegung ist immer vorhanden, nämlich die in 2 und $\alpha\beta$; diese liefert das selbstverständliche Resultat, dass $\alpha\beta$ die zweite $(\alpha\beta)$-Eckzahl ist.

Frankfurt a. M., Februar 1897.

# Rezensionen.

## Entgegnung.

In diesem Bande dieser Zeitschrift befindet sich eine Besprechung des ersten Bandes meines Werkes über doppeltperiodische Funktionen seitens des Herrn Fricke. In derselben werden mir Absichten untergelegt, die ich, wie aus der Einleitung zu dem Werke hervorgeht, gar nicht gehabt habe und auf Grund derselben werden eine Reihe von Einwendungen gegen meine Darstellung gemacht. Ich greife die folgenden heraus:

1. Fehlen der Weierstrassschen Funktionen,
2. Zurücktreten der funktionentheoretischen Überlegungen gegenüber analytischen Rechnungen,
3. Fehlen geometrischer Betrachtungen.

Daneben benutzt Herr Fricke die Gelegenheit, um die Bedeutung der Theorie der Modulfunktionen für die Transformationstheorie klarzulegen. Da ein jeder Autor beanspruchen darf, nach seinen Absichten beurteilt zu werden, so bin ich in dem Vorworte zum zweiten Bande ausführlicher auf die genannten Dinge eingegangen. Ich würde mich hiermit begnügt haben, wenn nicht einerseits der Leserkreis dieser Zeitschrift ein anderer wie der meines Werkes wäre und, wenn es sich nicht um Fragen handelte, die von allgemeiner Bedeutung sind — insbesondere um die Frage, ob in der Mathematik in grossen Fragen nur ein überlegener Standpunkt vorhanden ist, von dem aus alle anderen zu verwerfen sind.

Unter solchen Umständen erlaube ich mir mit liebenswürdiger Erlaubnis der Redaktion einen Teil der Einleitung zum zweiten Bande hier nochmals abdrucken zu lassen.

„Der zweite Band meines Werkes über doppeltperiodische Funktionen, welcher hiermit der Öffentlichkeit übergeben wird, zerfällt in drei Teile, von denen der erste die Anfänge der Transformationstheorie auf der Grundlage von Additionstheoremen zwischen Thetafunktionen mit verschiedenen Moduln, der zweite die Entwickelung der doppeltperiodischen Funktionen, insbesondere zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen, der dritte endlich die mannigfaltigen Differentialgleichungen behandelt, denen die Funktionen zweiter Art Genüge leisten. Diese Theorien sind wohl bisher in keinem Werk vereinigt worden. Ursprünglich war es meine Absicht, dieselben allein mit denjenigen zu veröffentlichen, die sich im vierten Ab-

schnitt und einigen Paragraphen der vorangehenden Abschnitte des ersten Bandes befinden. Durch die Natur des behandelten Gegenstandes sah ich mich aber veranlasst, von meinem ursprünglichen Plane abzugehen und die schon vielfach behandelten elliptischen Funktionen mit in den Kreis der Betrachtungen hineinzuziehen. Der Zusammenhang zwischen den gewöhnlichen elliptischen Funktionen und den Funktionen zweiter und dritter Art ist nämlich ein so enger, dass die gesonderte Betrachtung der letzteren eines natürlichen Rahmens, sowie eines einheitlichen Gesichtspunktes entbehren würde und zu mannigfachen Übelständen geführt hätte. Wie ich aber schon in der Vorrede zum ersten Bande bemerkt habe und nochmals ausdrücklich hervorheben möchte, ist es keineswegs meine Absicht gewesen, eine alles umfassende Theorie der elliptischen Funktionen zu geben. Es sind im wesentlichen nur diejenigen allgemeinen und bekannten Untersuchungen hineingezogen worden, welche die Grundlage und die Gesichtspunkte für das ganze Werk abgeben und zum Verständnis der Theorie der Funktionen zweiter und dritter Art notwendig sind — diese letzteren bilden den eigentlichen Schwerpunkt meines Werkes.

Ich habe nun, nachdem im ersten Bande auf funktionentheoretische Grundlage hin die Thetafunktionen sich als Elementarfunktionen ergeben hatten, die weiteren Betrachtungen im Wesentlichen auf dem Hermiteschen Transformationsprinzip aufgebaut. Zu dieser Darstellung bin ich nach genauer Vergleichung der verschiedenen in der Theorie der periodischen Funktionen üblichen Methoden als der einfachsten und durchsichtigsten gelangt. Zwar ist es nicht zu verkennen, dass mit ihr gewisse Übelstände verbunden sind. Die Darstellung hat mehrfach etwas scheinbar Zufälliges, es ist nicht immer ersichtlich, warum gerade der oder jener Ansatz gemacht wird, daneben entspricht sie nicht der historischen Entwickelung. In der That ist in der Mehrzahl der Fälle das Prinzip erst angewandt worden, nachdem die betreffenden Formeln auf anderem Wege schon gefunden waren. Diese Übelstände aber — wenn die letztere Thatsache überhaupt als ein solcher bezeichnet werden darf — werden auf der andern Seite durch gewisse Vorteile bedeutend überwogen, die der von mir eingeschlagene Weg darbietet.

In dem Hermiteschen Transformationsprinzip konzentriert sich thatsächlich der überwiegende Teil der Theorie der doppeltperiodischen Funktionen, und findet in ihm seinen klarsten, einfachsten und allgemeinsten Ausdruck. Durch eine Modifikation der Fragestellung ergeben sich aus ihm der Reihe nach die einzelnen Sätze der Theorie in systematischer und folgerichtiger Weise.

In dieser meiner Auffassungsweise liegt es u. a. begründet, dass ich von der Einführung der Weierstrassschen Funktionen abgesehen habe. Die $\sigma$-Funktionen folgen nicht gleich den $\vartheta$-Funktionen dem Transformationsprinzip — ihre ausführliche gesonderte Betrachtung würde mich auch nach anderer Richtung hin von dem vorgesetzten Ziele abgelenkt haben. Es möge bei dieser Gelegenheit auf eine Bemerkung von Herrn Scheibner

(Sitzungsbericht der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften 1888 S. 276) über das Verhältnis der $\sigma$-Funktionen zu den $\vartheta$-Funktionen hingewiesen werden, die den richtigen Gesichtspunkt für die Vergleichung derselben geben dürfte:

„Es ist ja an sich leicht erklärlich, dass das Studium der Sigmafunktionen, deren Einführung in die Analysis durch Weierstrass in so vielen Beziehungen sich als wichtig und fruchtbar erwiesen, seit dasselbe den Mathematikern in grösseren Kreisen zugänglich geworden und ihr Interesse in Anspruch genommen hat, eine Zeit lang auf Kosten der länger bekannten Jacobi-Abelschen Thetafunktionen in den Vordergrund getreten ist. Im umgekehrten Falle würde es sich vermutlich gerade umgekehrt verhalten haben, während wir doch froh sein dürfen, dass für die Erfordernisse der Theorie wie der Praxis dem Mathematiker nach doppelter Richtung so interessante Funktionen zu Gebote stehen."

Um zur Hauptsache zurückzukommen: Der eigentümliche und im ganzen einheitliche Gang meines Werkes bringt es mit sich, dass in demselben nur die $\vartheta$-Funktionen, nicht aber die $\sigma$-Funktionen berücksichtigt sind. Ebenso erklärt sich aus dem einheitlichen Gange meiner Darstellung das Fehlen mancherlei weitergehender funktionentheoretischer Sätze. An Stelle jener Sätze tritt eben das genannte Transformationsprinzip als das eigentlich Primäre, und jene Sätze kommen im wesentlichen nur so weit und nur in solcher Ausdehnung in Betracht, als sie sich aus diesem Prinzip als Folgerungen ergeben. Allerdings können dabei Rechnungen nicht vermieden werden. Wenn man heutzutage hin und wieder die Rechnung als „unmodern" bezeichnet und womöglich allen Arbeiten einen und denselben „modernen" Zuschnitt aufdrängen möchte, so scheint mir das doch einigermaßen unbillig.

Dass man im allgemeinen, wo es angeht, beschwerliche Rechnungen gern vermeiden wird, versteht sich wohl von selber und bedarf also kaum noch der Erwähnung. Oder hätten vielleicht die Mathematiker früherer Jahrhunderte oder Jahrtausende hierüber anders gedacht?

Aber häufig, namentlich beim Hineingehen in neue, noch unerforschte Gebiete oder auch bei der Eröffnung neuer Wege in schon bekannten Gebieten werden Fälle eintreten, in denen man die Rechnung nicht entbehren kann. Auch ist zu beachten, dass nicht zu weit getriebene Rechnungen manches anziehende Moment und eine gewisse pädagogische Kraft besitzen, die durch blosses Angeben von Ideen nicht erreicht wird, und dass überhaupt die Rechnung stets mit einer gewissen Notwendigkeit in Funktion treten wird, sobald es sich darum handelt, die Grösse und Mannigfaltigkeit eines Gedankens oder eines Prinzips nach allen Seiten hin klar zu legen.

Endlich erklärt sich aus dem einheitlichen Gange meines Werkes z. B. auch das Fehlen geometrischer Betrachtungen. Wenn ich auch, als Dozent einer technischen Hochschule, ausserordentlich geneigt bin, den geometrischen Betrachtungen die allergrösste Bedeutung beizulegen und meine hiesigen Vorlesungen über höhere Analysis auf durchaus geometrischer

Grundlage aufbaue, so folgt hieraus doch noch keineswegs die Notwendigkeit, in allen Teilen der so weit verzweigten Mathematik und unter allen Umständen stets das Geometrische zu bevorzugen. Vielmehr wird nach meiner Ansicht die Analysis auch in ihrer reinen Form neben der Geometrie stets ihre volle Berechtigung behalten. Die Vermischung geometrischer und analytischer Methoden, wie sie z. B. in den Arbeiten des Herrn F. Klein anzutreffen ist, wird vielfach zweckmässig sein. Sie als allgemeine und obligatorische Norm hinstellen zu wollen — daran wird doch wohl niemand denken.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen sei es mir gestattet, auf den ersten Abschnitt des zweiten hier vorliegenden Bandes etwas näher einzugehen. Der Zweck desselben ist es, die Anfänge einer Transformationstheorie auf der Grundlage von Additionstheoremen zwischen Thetafunktionen mit verschiedenen Moduln in elementarer Weise zu entwickeln. Ich lege hierbei das Hauptgewicht auf das Prinzip selber, nicht aber auf seine hier vorliegende Durchführung, die noch sehr der Ergänzung und Erweiterung bedarf. Der Ausgangspunkt für meine Anschauungsweise ist in meinen Arbeiten über die hyperelliptischen Funktionen gelegen. Ich versuchte dort die Methoden, wie sie für die elliptischen Funktionen maßgebend waren, auf die hyperelliptischen erster Ordnung zu übertragen, um eine Transformationstheorie derselben zu erhalten. Es gelang mir, die verschiedenen Arten von Transformationsgleichungen zu definieren und ihre Haupteigenschaften zu entwickeln — meine Versuche dagegen nach jenen früheren Methoden, Transformationsgleichungen wirklich zu bilden, stiessen auf die grössten Schwierigkeiten und führten mich zu keinem bemerkenswerten Resultate. So sah ich mich denn veranlasst, für die elliptischen Funktionen nach neuen Methoden zu suchen, nach solchen, die sich leicht übertragen liessen. Ein Teil der hierbei gefundenen Resultate findet sich im ersten Bande dieses Werkes angegeben, insbesondere in den §§ 59, 60, 61, 75 etc. Die Übertragung derselben auf die hyperelliptischen Funktionen ermöglichte die Darstellung von Transformationsgleichungen in besonders einfachen Fällen. Ich musste mich aber bald davon überzeugen, dass auch diese Methoden keine weitreichenden und befriedigenden seien — so interessant die einzelnen gewonnenen Resultate auch an sich waren —, und kam auf diesem Wege im Anschluss an die bekannten Schröterschen Arbeiten zu der Aufstellung meiner Additionstheoreme und zu der Anschauungsweise, die in dem vorliegenden zweiten Bande dargelegt wird. Bei derselben ist das eigentliche Ziel: die wirkliche Aufstellung von Transformationsgleichungen und damit diejenige Aufgabe, welche als das eigentliche Transformationsproblem zu bezeichnen ist und seit längerer Zeit die Kräfte einer Reihe von Mathematikern in Anspruch genommen hat.

Als charakterisch sind bei dem von mir eingeschlagenen Wege folgende Punkte hervorzuheben.

Erstens können die Transformationsgleichungen, die sich für die elliptischen Funktionen ergeben, ohne Schwierigkeit auf die hyperelliptischen

schen übertragen werden. Man kommt dabei zu einer Fülle von Transformationsgleichungen, die auf anderem Wege nur schwer dürften herzustellen sein.

Zweitens wird die allgemeine Transformationstheorie in enge Verbindung gebracht mit der speziellen Transformationstheorie, nämlich mit der Entwickelung der Konstantenrelationen. Ich habe es stets als unnatürlich empfunden, dass die Modular- und Multiplikatorbeziehungen in fremdartiger Weise, unter Heranziehung völlig neuer Prinzipien, und auf ganz anderem Wege als die gewöhnlichen Thetarelationen abgeleitet werden, obgleich sie doch im Grunde genommen nichts anderes als Thetarelationen sind, nur bezogen auf spezielle Werte der Argumente. Es erschien mir daher höchst wünschenswert, diese Konstantenrelationen durch Spezialisierung der Argumente aus allgemeinen Thetarelationen abzuleiten, sie also dem Hermiteschen Prinzip unterzuordnen und zu zeigen, dass auch für die spezielle Theorie das letztere von grösstem Nutzen ist.

Mit den soeben entwickelten Anschauungen befinde ich mich im Widerspruch mit den Anschauungen, wie sie in einer neuerdings erschienenen Besprechung des ersten Bandes dieses Werkes von Herrn Fricke enthalten sind. Legt dieselbe einerseits von einer in der Mathematik ungewöhnlichen Wertschätzung der eigenen Anschauungen des Herrn Fricke Zeugnis ab, so ist es anderseits doch zweifellos, dass die in derselben vertretenen Ansichten von einer grösseren Anzahl von Mathematikern geteilt werden, als deren Wortführer Herr Fricke anzusehen ist. Unter solchen Umständen habe ich geglaubt, mich hier in der Einleitung über meine Anschauungen etwas ausführlicher aussprechen zu müssen, als es sonst wohl geschehen wäre."

Martin Krause.

---

**Leitfaden der Physik mit Einschluss der einfachsten Lehren der mathematischen Geographie** nach der Lehr- und Prüfungsordnung von 1893 für Gymnasien. Von William Abendroth. I. Band. Kursus der Unter- und Obersekunda. Zweite Auflage. Mit 155 Holzschnitten. Verlag 1895. Verlag von S. Hirzel. — 222 Seiten. Preis 3,60 Mark.

Die neu aufgestellten Lehrpläne waren, wie in vielen anderen Fällen, so auch hier die Veranlassung zur Umarbeitung der vor zehn Jahren erschienenen ersten Auflage. Nach der sächsischen Studienordnung sind die Grundbegriffe der Chemie mit denen der Mineralogie zu verbinden und in Obertertia zu behandeln. Aus diesem Grunde konnte der früher erforderliche Abschnitt über Chemie zum Fortfall kommen. In betreff der Meteorologie wurden nur die physikalischen Grundgesetze zahlreicher atmosphärischer Vorgänge an den betreffenden Stellen hervorgehoben, sodass die Folgerungen hieraus, sowie das durch die Statistik bearbeitete Material der physischen Geographie zugewiesen werden mussten. — Neben der rein äusserlichen Ursache zur Herausgabe einer Neuauflage tritt noch der innere, wesent-

lichere Grund hinzu, dass die Physik infolge der bedeutenden Fortschritte in den letzten Jahren in einem ganz anderen Zusammenhang vorgetragen werden muss. Dies macht sich schon in dem ersten Unterricht geltend, indem die enorme Wichtigkeit des Prinzips von der Erhaltung der Energie schärfer hervorzuheben ist. Eine Folge davon ist die Einführung des absoluten Maßsystems, das nicht früh genug dem Schüler beigebracht werden kann.

Ferner ist der Versuch gemacht worden, den Begriff des Potentials verständlich zu machen, damit die Elektrizitätslehre in präziserer Fassung durchgenommen werden kann. — Da der Verfasser nach seinem Vorwort bestrebt ist, dem Schüler über dasjenige, was im täglichen Leben auf Schritt und Tritt ihm begegnet, Aufschluss zu geben, wie Bogenlicht, Glühlicht, Dynamomaschinen, Telephon, Mikrophon etc., so wird es auch angezeigt sein, die in alten Physikbüchern vorhandene, allmählich aber wieder ausgemerzte Döbereiner Lampe aufzunehmen, welche das Fundament für das heute wichtige Gas- bezw. Spiritusglühlicht bildet.

In Figur 83 Seite 129 ist die Verbindung der Drahtenden mit der Zink- und Kupferplatte nicht derart, dass der Apparat in der gezeichneten Lage schwimmt, vielmehr wird ein Neigen zur Seite stattfinden.

Die Ausstattung des Buches ist recht gut, insbesondere tragen die fettgedruckten Stichwörter wesentlich zur Übersicht bei.

B. Nebel.

---

**Die Fortschritte der Physik im Jahre 1893.** Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 49. Jahrgang. Erste Abteilung. Enthaltend: Physik der Materie. Redigiert von Richard Börnstein. Braunschweig 1895. Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn. — 562 Seiten. Preis 20 Mark.

Mit Freuden begrüssen wir diesen neuen Band der Fortschritte der Physik, welche für den praktisch arbeitenden Physiker und Chemiker von ungeheuerem Werte ist. Der energischen Thatkraft der neuen Redaktion ist es gelungen, dieses Sammelwerk derart zu fördern, dass es gleichen Schritt mit dem laufenden Jahrgang hält. Die Lücke infolge einer früheren Stockung vermindert sich zusehends dank der Umsicht von Redaktion und Verleger, so dass in kurzem ein zusammenhängendes Werk vorliegt, welches der Physik auch ausserhalb Deutschlands zum grössten Vorteil gereicht.

B. Nebel.

---

**Physikalische Aufgaben für die oberen Klassen höherer Lehranstalten.** Aus den bei Entlassungsprüfungen gestellten Aufgaben ausgewählt und mit Hinzufügung der Lösungen zu einem Übungsbuche vereinigt von Wilhelm Budde. Zweite, unter Berücksichtigung der neuen Prüfungsordnungen abgeänderte und vermehrte Auflage.

Braunschweig 1894. Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn. 149 Seiten. Preis Mark 2.50.

Bei der Herausgabe dieser zweiten Auflage wurden die neuen Prüfungsordnungen für die Reallehranstalten vom Jahre 1892 berücksichtigt. Infolge der Einführung des absoluten Maßsystems wurden die früheren Maße in der Elektrizitätslehre überflüssig, es musste daher auf diesem Gebiete eine gründliche Umarbeitung stattfinden. Wenige Aufgaben wurden durch andere ersetzt, dagegen kamen viele neue hinzu, sodass deren Zahl von solchen mit Lösungen und von solchen, die Abhandlungen, Beschreibungen etc. betreffen, von 170 auf 563 gestiegen ist. Schon bei der Besprechung der ersten Auflage haben wir auf den ausserordentlichen Nutzen eines solchen Buches hingewiesen, das dem Schüler als Prüfstein dient, ob er das Abiturientenexamen in der Physik mit Erfolg bestehen kann oder nicht. Das Buch sei daher allen zur Einführung empfohlen, die das Studium der Physik ernst und nicht als Unterhaltungsgegenstand betreiben wollen.

B. Nebel.

---

**Gesammelte Werke** von Heinrich Hertz. Band 3. Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt. Herausgegeben von Ph. Lenard. Mit einem Vorworte von H. von Helmholtz. Leipzig 1894. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). 312 Seiten. Preis geheftet 9 Mark — gebunden Mark 10.15.

Auch dieses letzte Werk von Hertz, welches als dritter Band der gesammelten Werke erscheint und die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange darstellt, giebt ein beredtes Zeugnis, welch' ungeheurer Verlust der Wissenschaft durch das allzu frühe Hinscheiden dieses genialen Mannes zu teil geworden ist. Kein geringerer als Helmholtz, der frühere Lehrer des noch jungen Gelehrten, fühlte sich veranlasst, das Vorwort zu diesem gleichsam nachgeborenen Buche zu schreiben, ein Vorwort, wie es wohl einzig in seiner Art dastehen dürfte. Es enthält ein Stück Geschichte der Physik, indem der Stand derselben bis zum Beginn der Hertzschen Thätigkeit klar gekennzeichnet wird. Dann folgt die Schilderung, an welchen Punkten Hertz die Arbeit aufgenommen, und in welch' grossartiger und scharfsinniger Weise er durch das Experiment die Entscheidung zwischen den herrschenden Theorien gegeben hat. Dieses Vorwort ist ein herrliches Denkmal, welches der Meister seinem bedeutendsten Schüler gesetzt hat. Ergreifend ist dabei auch der Schmerz des Meisters, dessen Hoffnung und Freude, den Erben seiner wissenschaftlichen Thätigkeit in dem so talentvollen Manne gefunden zu haben, entgegen dem natürlichen Lauf der Dinge durch das Schicksal grausam zerstört worden sind. — Hertz giebt in seiner ausgedehnten Einleitung mit grossem Scharfsinn die Gründe an, welche ihn veranlasst haben, die Prinzipien der Mechanik von einem Gesichtspunkt aus zu behandeln; er gestattet uns dabei einen Einblick in seine geistige Werkstätte, wie er das vorgesteckte Ziel auf dreifache Weise für erreichbar

hielt. Wir erfahren dabei, welche Gründe für und wider ihn bestimmt haben, die beiden ersten Geistesbilder aufzugeben und seine ganze Kraft der Durchführung des dritten Bildes zu widmen. Bei diesem wird von nur drei unabhängigen Grundvorstellungen, der Zeit, des Raumes und der Masse ausgegangen. Ein vierter Begriff, wie derjenige der Kraft oder der Energie, der den beiden ersten Bildern noch eigen war, kommt als selbständige Grundvorstellung nicht mehr in Betracht. Indessen erfordert die Mannigfaltigkeit der uns umgebenden Erscheinungen, dass noch eine Hypothese aufgestellt wird, damit sich alle Bewegungen der Körper auf einfache und durchsichtige Regeln zurückführen lassen. Dies lässt sich dadurch erreichen, dass die sichtbare Welt durch den unsichtbaren Teil ergänzt wird, um ein abgerundetes, in sich geschlossenes, gesetzmässiges Weltbild zu erhalten. Dieses verborgene Etwas, was sich als Kraft und Energie zu erkennen giebt, kann wiederum als Bewegung und Masse aufgefasst werden, und zwar als solche, welche sich von der sichtbaren an sich nicht unterscheidet, sondern nur in Bezug auf uns und auf unsere gewöhnlichen Mittel der Wahrnehmung. In diesem Hinzudenken einer unsichtbaren Bewegung und Masse liegt die Hertzsche Hypothese, welche ihn befähigt, dem ganzen Weltall den Charakter des einheitlich Gesetzmässigen zu verleihen. Die Begriffe Kraft und Energie sind dann nichts weiter als eine Wirkung von Masse und Bewegung, welche beide aber nicht immer als grobsinnlich aufzufassen sind. — Der Inhalt selbst, welcher den Aufbau der Mechanik nach diesem neuen Gesichtspunkt behandelt, zerfällt in zwei Bücher, deren erstes die Geometrie und Kinematik der materiellen Systeme behandelt, wobei die Überlegungen sich nicht auf die Erfahrung stützen. Das zweite Buch, die Mechanik der materiellen Systeme, betrachtet unter Zeiten, Räumen, Massen, Zeichen für Gegenstände der äusseren Erfahrung, die aber mit den Grössen des ersten Buches hinsichtlich ihrer Eigenschaften nicht im Widerspruch stehen. — Besonders hervorzuheben ist, dass dieses Werk zur Zeit nicht als Einführung in die Mechanik für die studierende Jugend benützt werden kann, sondern dass es für denjenigen bestimmt ist, welcher die bisherigen Anschauungen der Mechanik vollständig beherrscht; ihn soll es anregen, die gestellten Probleme auf Grund dieser neuen Basis zu lösen, und dadurch dieser zur Entscheidung ihrer Berechtigung oder Nichtberechtigung zu verhelfen. Leider ist dem Erbauer dieses Fundaments die Errichtung des darauf ruhenden Gebäudes nicht vergönnt gewesen, er, der der berufendste gewesen wäre, in kürzester Zeit die Entscheidung selbst herbeizuführen. Hertz, der vermöge seines scharfen Geistes, verstand, den Schleier der Natur zu lüften, durfte nicht weiter vorrücken; denn das Schicksal trat ihn entgegen mit der unabänderlichen Lösung: Alles bleibt Stückwerk hienieden.

B. Nebel.

---

**Die Gesetze der Überkaltung und Gefrierpunktserniedrigung.** Zwei Abhandlungen von Sir Charles Blagden (1788). Herausgegeben von A. J. von Öttingen. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissen-

schaften, Nr. 56.) Leipzig 1894. Verlag von Wilhelm Engelmann. 49 Seiten. Preis 80 Pfg.

**Abhandlungen über Thermometrie von Fahrenheit, Réaumur, Celsius** (1724, 1730—1733, 1742). Herausgegeben von A. J. von Öttingen. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 57.) Leipzig 1894. Verlag von Wilhelm Engelmann. 140 Seiten. Preis Mark 2.40.

**Otto von Guericke's Neue „Magdeburigische" Versuche über den leeren Raum** (1672). Mit 15 Textfiguren. Aus dem Lateinischen und mit Anmerkungen herausgegeben von Friedrich Dannemann. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 59.) Leipzig 1894. Verlag von Wilhelm Engelmann. 116 Seiten. Preis Mark 2.—.

Auch bei diesen drei weiteren Bändchen sind am Schluss Anmerkungen hinzugefügt worden, welche über Stellen im Text, bezw. über angeführte Personennamen näheren Aufschluss geben. Im Übrigen können wir auf frühere Besprechungen verweisen. — Hinsichtlich Nr. 56 sei besonders darauf aufmerksam gemacht, dass das landläufig genannte Celsiusthermometer nicht mit der von Celsius getroffenen Einteilung übereinstimmt; denn sein Nullpunkt bezw. Siedepunkt stimmt mit unserem Siedepunkt bezw. Nullpunkt überein.

B. Nebel.

---

**Grundzüge der mathematischen Chemie.** Energetik der chemischen Erscheinungen. Von Georg Helm. Mit 17 Figuren im Text. Leipzig 1894. Verlag von Wilhelm Engelmann. 138 Seiten. Preis Mark 3.—.

Wiederholt wurde bei der Betrachtung der Physik und Chemie in theoretischer Hinsicht der grosse Nutzen hervorgehoben, welcher der ersteren durch die Anwendung der Mathematik zu teil wurde. Durch die zahlreichen, äusserst wichtigen Arbeiten der letzten Jahre auf dem Grenzgebiet der beiden Wissenschaften, nämlich der physikalischen Chemie, ist auch die Mathematik endlich zu ihrem Recht gelangt. Zunächst können wir deren Erfolge in der Chemie selbst als erst im Anfangsstadium stehend bezeichnen, zumal die Mehrzahl aller Chemiker einen horror vor allem Rechnen, geschweige denn vor der höheren Mathematik hat. Wie aber das Energieprinzip das Fundament der heutigen Physik bildet, so muss es auch dasjenige der Chemie sein. Es ist daher ein verdienstvolles Unternehmen des Verfassers, dieses Prinzip auch auf die chemischen Vorgänge zur Anwendung zu bringen. Im ersten Teil wird das Wesen des Energieprinzipes auseinandergesetzt und auf die verschiedenen Formen der Energie hingewiesen. Einige Beispiele dienen zur weiteren Erläuterung. Der zweite Teil, die Entropie betitelt, enthält im wesentlichen einen Auszug der mechanischen Wärmetheorie, dem die Beziehungen zwischen Wärme und elektrischer Energie als Anhang beigefügt sind. Die chemische Intensität, wie der Titel des dritten Teiles lautet, umfasst auch die Errungenschaften der physikalischen Chemie, die wesentlich durch van't Hoff, Arrhenius, Nernst, Ostwald und

andere gefördert worden ist. Der vierte, letzte und kürzeste Teil des Buches hat die Stufe der Mannigfaltigkeit oder Freiheit der chemischen Erscheinungen zum Gegenstand; es ist dies eigentlich der erste Schritt in die Chemie selbst. Ausgehend von der Phasenregel und dem Gleichgewicht der Phasen gelangte man noch zu einer kurzen Betrachtung der chemischen Reaktionen, die von mehreren Parametern abhängen. Das kleine Buch eignet sich sehr gut, den jungen Chemiker auch zur mathematischen Behandlung seiner Wissenschaft anzuregen.

Das international festgesetzte und auch angenommene elektrische Strommaß lautet Ampère und nicht Amper. Man muss diese nachträglich von einem deutschen Physiker eingeführte Kürzung schon deshalb zurückweisen, weil die beiden Worte im deutschen ganz verschieden ausgesprochen werden. Mit demselben Recht könnte man auch Om statt Ohm und Wat statt Watt schreiben. Auch hier zeigt sich der von den fremden Nationen so oft schon gerügte Fehler der Deutschen, dass jeder etwas besonderes will und sich dadurch gegen das allgemeine Interesse auflehnt. Eine Nation kann nicht gross auftreten, wenn sie den Fehler der Kleinlichkeit nicht ablegt.

B. Nebel.

---

**Über die Methode der kleinsten Quadrate.** Von Richard Henke. Zweite unveränderte Auflage. Nebst Zusätzen. Leipzig 1894. Verlag von B. G. Teubner. 77 Seiten.

Diese zweite Auflage ist ein ungeänderter Abdruck der im Jahre 1868 als Doktordissertation erschienenen Schrift. Verfasser hat absichtlich Änderungen unterlassen, damit der ursprüngliche Charakter nicht gestört wird. Der erste Teil umfasst eine Darstellung und Kritik der verschiedenen Begründungsweisen der Methode der kleinsten Quadrate, während in den beiden anderen eine allgemeine Auffassung der Methode der kleinsten Quadrate gegeben und begründet wird.

Als neu hat der Verfasser zwei Zusätze beigefügt, nämlich die Methode der kleinsten Quadrate und das Gausssche Fehlergesetz, sowie weitere litterarische Bemerkungen über Begründung und Bedeutung der Methode der kleinsten Quadrate. Die vorliegende Schrift trägt wesentlich dazu bei, die theoretischen Fundamente der in der Praxis allgemein verbreiteten Methode der kleinsten Quadrate auf ihre Festigkeit zu prüfen und durch eine allgemeinere Auffassung zu stützen. Der letzte Zusatz zeigt, wie emsig auch auf diesem Gebiet seit dem Erscheinen der ersten Auflage, die nicht in den Buchhandel gekommen war, gearbeitet worden ist.

B. Nebel.

---

**An elementary treatise on theoretical mechanics** by Alexander Ziwet. Part II: Introduction to dynamics; statics. 1893. 183 Seiten. Preis 8/6. Part III: Kinetics. 1894. 236 Seiten. Preis 8/6. New-York und London. Verlag von Macmillan and Co.

Der zweite Band wurde gleichzeitig mit dem ersten besprochen, weshalb hier nur darauf verwiesen wird. Der dritte Band führt den Titel:

Kinetics. Die erste Hälfte desselben beschränkt sich auf die Kinetik eines Teilchens, während der Rest diejenige eines starren Körpers umfasst und die wichtigsten Prinzipien der Kinetik eines Systems einer eingehenden Diskussion unterzieht. Zwischen dem Text eingestreut finden sich Aufgaben, deren Lösungen am Schluss des Buches zusammengestellt sind. Der Charakter des vorliegenden Bandes ist mit demjenigen der beiden früheren übereinstimmend. In dieser Beziehung sei auf die frühere Besprechung verwiesen. Die äussere Ausstattung ist sehr sorgfältig und könnte manchem Verleger in Deutschland zum Vorbild dienen. B. Nebel.

---

**Eine neue Berechnung der mittleren Tiefen der Oceane** nebst einer vergleichenden Kritik der verschiedenen Berechnungsmethoden. Von der philosophischen Fakultät der Christian-Albrecht-Universität in Kiel mit dem neuschassischen Preise gekrönte Schrift. Von Karl Karstens. Kiel und Leipzig 1894. Verlag von Lipsius und Tischer. 32 Seiten und 27 Tabellen. Preis 2 Mark.

In dem ersten Abschnitt findet sich eine Zusammenstellung der bisher vorgenommenen Ermittelungen der mittleren Meerestiefen, die hinsichtlich der benützten Methoden für die Berechnung in dem zweiten Abschnitt einer näheren Kritik unterzogen werden. Von den drei in Frage kommenden Methoden: 1. Der planimetrischen, d. h. derjenigen, welche von der Arealvermessung der Tiefenstufen ausgehen. 2. Der Profilmethode. 3. Der Feldermethode wird die letztere der neuen Berechnung zu Grunde gelegt, weil sie nicht nur das sicherste Resultat für alle gut ausgeloteten Meere liefert, sondern auch den äusserst wichtigen Vorteil besitzt, jederzeit Nachträge und Änderungen zu gestatten, ohne eine Wiederholung der ganzen Arbeit zu veranlassen. In dem dritten Abschnitt und den dazu gehörigen Tabellen sind die Berechnungen, die sich auf die einzelnen Meere beziehen, zusammengestellt. Als Resultat aus sämtlichen Berechnungen ergiebt sich als mittlere Meerestiefe nach Karstens 3,496 km, eine Zahl, welche mit den besten der früheren Arbeiten hinreichend übereinstimmt. Für Geographen und Seeleute ist das Büchlein von grossem Wert. B. Nebel.

---

**Hydrodynamics.** By Horace Lamb. Cambridge 1895. At the University press. 604 Seiten. Preis 20/.

Im Grunde genommen ist dieses Buch als die zweite Auflage des im Jahre 1879 unter dem Titel: Treatise on the mathematical theory of the motion of fluids erschienenen Werkes, welches auch ins Deutsche übersetzt worden war, anzusehen. Indessen wurde dasselbe in solcher Weise durch Änderungen und Erweiterungen umgestaltet, dass sich der Verfasser auch veranlasst sah, den Titel zu ändern.

Trotz der Vermehrung des Inhalts hat der Verfasser solche lange analytische Untersuchungen ausgeschlossen, deren Resultate sich nicht interpretieren lassen und war bei der Auswahl bemüht, dem physikalischen Interesse möglichst Rechnung zu tragen, wobei auch die eigenen, diese Wissenschaft fördernden Arbeiten des Verfassers erwähnt seien. In historischer Hinsicht war der Verfasser bestrebt, den einzelnen Arbeiten den wahren Autornamen beizufügen. Es würde zu weit führen, wenn noch auf den reichhaltigen Inhalt näher eingegangen werden sollte; aufmerksam sei nur darauf gemacht, dass z. B. das Kapitel über Zählflüssigkeit eine ausgedehnte Bearbeitung erfahren hat. Dem inneren Gehalt entspricht auch vollkommen die äussere Ausstattung, sodass dieses Werk überall willkommen sein wird.

B. Nebel.

---

**Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in einem theoretischen Gase.** Bearbeitet auf Grund der dynamischen Gastheorie. Verlag von H. Dominicus (Th. Gruss). Prag 1894. 12 Seiten. Preis 50 Pfg.

Ausgehend von der Definition eines theoretischen Gases und der Rechtfertigung über die Einführung eines solchen, in Wirklichkeit nicht vorhandenen Gases in die Physik stellt der Verfasser die Vorwürfe zusammen, welche man auf Grund wirklicher Beobachtungen der dynamischen Gastheorie von Krönig und Clausius machen muss. Da sich aber in den Schlussfolgerungen Fehler nicht nachweisen lassen, so muss in der grundlegenden Annahme der Irrtum zu suchen sein. Der Verfasser setzt daher an Stelle der Krönig-Clausiusschen Annahme, wonach ein Drittel aller Moleküle sich in je einer der drei Hauptaxen des einschliessenden Würfels bewege und zwar senkrecht gegen die Begrenzungsebene mit der vollen Molekulargeschwindigkeit die folgende: „In derselben Zeit, in welcher ein Sechstel der Molküle gegen eine Grenzwand wirkt, wird auch gegen jede andere Grenzwand je ein Sechstel derselben wirken, jedoch nicht mit der vollen Molekulargeschwindigkeit senkrecht zur Grenzwand, sondern unter der noch nicht angetasteten Bedingung, dass alle Auftreffrichtungen möglich sind." Dazu kommt: „Zwei Körper sind nur dann gleich warm, wenn die Arbeit der in der Zeiteinheit beiderseits an die Flächeneinheit der Grenzwand gelangenden Moleküle gleich gross ist." Auf Grund dieser Annahmen führt der Verfasser die Betrachtungen über die Fortpflanzung des Schalles in theoretischen Gasen durch und gelangt zu dem Resultat, dass dieselben mit den Erscheinungen bei permanenten Gasen sowohl im Wesen als auch den Zahlwerten nach so vollkommen als möglich übereinstimmen.

B. Nebel.

---

**Essai de thermodynamique graphique** par René de Saussure. Extrait des Archives des Sciences physiques et naturelles. 3. Folge. Band 31. Mai 1894. Genf 1894. Verlag von Aubert-Schuchardt. 42 Seiten.

Setzt man voraus, dass ein Körper stets das gleiche Gewicht behält, so lässt sich der Zustand desselben in jedem Augenblick durch zwei Ele-

mente, nämlich die lebendige Kraft und die Dauer der Periode der Bewegung, bestimmen. Auf diese Weise hat Clausius gezeigt, wie man die Fundamentalprobleme der Thermodynamik auf die reine Mechanik zurückführen kann. Ein ähnlicher Vorgang spielt sich auch in der Vibrationstheorie ab, bei welcher es sich um die Feststellung des inneren Zustandes eines Körpers handelt, wenn seine Teile dem Einfluss der Wärme ausgesetzt sind. Es muss dabei die Natur der periodischen Bewegung der einzelnen Teile genau präzisiert werden, und dies ist ebenfalls durch zwei gegebene Grössen möglich, nämlich durch die Amplitude und durch die Dauer der Periode der Vibrations-Bewegung. Verfasser geht von diesen zwei Grössen als Koordinaten aus und stellt die Beziehung derselben mit der charakteristischen Oberflächengleichung: $F(P, V, T) = 0$ her, worin $P$ gleich der Druck, $V$ dem Volumen, $T$ der absoluten Temperatur des Körpers entsprechen. Die weiteren mathematischen Untersuchungen führen zu dem interessanten Resultat, dass sich die gleichen $F(P, V, T) = 0$ durch drei Gleichungen zwischen den Grössen $P$, $V$, $T$ und zwei Hilfskoordinaten $\Phi$ und $S$ ausdrücken lässt, welche direkt von der Amplitude und der Dauer der Periode der Vibrations-Bewegung abhängen. Auf diese Weise erhält man eine viel vollständigere charakteristische Funktion, weil sie den Wert jeder der zwei spezifischen Wärmen getrennt liefert und somit in jedem Augenblick den Zustand der Vibrations-Bewegung als Funktion der gegebenen experimentellen Grössen ermitteln lässt. — Es ist dies ein sehr interessanter Beitrag zur Behandlung der Thermodynamik auf graphischem Weg.

B. Nebel.

---

**Über eine räumliche Darstellung der Tonreihe und deren Ausnützung in einem Apparate als Lehrmittel im musiktheoretischen Unterrichte.** Von Anton Michalitschke. Separatabdruck der „Österreichischen Mittelschule“. 5. Jahrgang. 2. Heft. 1891. 15 Seiten.

**Eine räumliche Darstellung der Tonreihe und die Ausnützung derselben in einem Apparat als Lehrmittel im Musikunterricht.** Von Anton Michalitschke. Sonderabdruck aus „Lotos“. 1892. Neue Folge. 12. Band. 14 Seiten.

**Ein Monochord mit spiralförmigem Stege zur Darstellung der pythagoräischen, der physikalischen und der gleichschwebend temperierten Tonintervalle.** Von Anton Michalitschke. Sonderabdruck aus „Lotos“. 1894. Neue Folge. 14. Band. 56 Seiten und eine Figurentafel.

Der Inhalt der beiden ersten Schriftchen ist im wesentlichen derselbe, indem darin gezeigt wird, auf welche Weise sich die Tonreihen als eine logarithmische Spirallinie darstellen lassen. Die dritte Abhandlung benützt die beiden ersten als die theoretische Grundlage und wiederholt kurz den wesentlichen Teil derselben. Diese Darstellung der Tonreihen als logarithmische Spirallinie giebt die Veranlassung zum Bau eines Monochords mit

spiralförmigem Stege, welcher durch ein auf einer Holzscheibe befestigtes, in Spiralform aufgewickeltes Messingband dargestellt wird. Die gespannte, unveränderliche Saite selbst bildet den Radiusvektor, dessen Länge durch die Drehung der den Steg tragenden Scheibe bestimmt wird. Im weiteren werden die Untersuchungen mitgeteilt, die an diesem neuen Monochord mit dem Quint-Tonsystem und den verschiedenen Tonleitern angestellt worden sind. Die beigefügte Figurentafel dient zur Erläuterung der erlangten Ergebnisse.

B. Nebel.

---

**Streiflichter auf eine neue Weltanschauung in Bezug auf die Beleuchtung, Erwärmung und Bewohnbarkeit der Himmelskörper.** Eine astrophysisch-metaphysische Hypothese über das innere Walten der Natur und die sich daraus ergebenden Konsequenzen auf die Ethik und Religion nebst einer Plauderei über die Möglichkeit eines „Weltunterganges“ von Wilhelm Zenker. Siebente (1000) erweiterte Auflage mit einer Reihe offiziell wissenschaftlicher Zustimmungen. Braunschweig 1895. C. A. Schwetschke und Sohn. 88 Seiten. Preis 1 Mark.

Der grossartige vielversprechende Titel dieses Büchleins ist wohl die Ursache, dass es schon die 7. Auflage erleben durfte, denn der Inhalt bleibt hinter allen Erwartungen zurück. 43 Seiten hindurch werden die bestehenden Ansichten in abfälliger Weise besprochen, die auf Grund streng logischer Schlüsse mit Hilfe der Spektralanalyse zu Stande gekommen und zur Zeit allgemein anerkannte Anschauungen werden kurz abgefertigt durch Bezweifelung der Resultate, weil der greifbare Beweis fehle; — ein billiges Vergnügen. Die Spannung auf die Ansicht des Verfassers wird jäh zerstört durch die ganz willkürliche, in den Folgerungen logisch zusammenhanglose Annahme, dass die Sonne als grösserer und gewaltigerer Körper positiv auf die kleine, sich ihr negativ stellende Erde wirkt, wodurch der entstehende elektrische Strom in der Erdatmosphäre sich in Wärme umsetzt, während derselbe Strom sich in der Sonnenatmosphäre in Licht verwandelt. Grund, weil wir Menschen uns, wenn auch auf andere Weise elektrisch unser Dasein erhellen und behaglich machen können. Als Motto bei der Ansicht über den Weltuntergang diente wohl der Spruch: „Wasch' mir den Pelz, mach' ihn aber nicht nass.“ Das Ganze kennzeichnet sich als ein nutzloses, leeres Geschwätz.

B. Nebel.

---

**Das System der Übergewalt oder das analytisch-synthetische Prinzip der Natur.** Ein Beitrag zur Weltäther-, Stoff- und Kraftlehre und zur Lösung naturphilosophisch-kosmischer Probleme in elf Hauptthesen von Konrad Beyrich. Mit sieben Figuren. Berlin 1895. Verlag von Robert Oppenheim (Gust. Schmidt). 160 S. Preis Mk. 3.60.

Das Buch hat einen ausschliesslich philosophischen Charakter, weshalb seine Besprechung eigentlich den philosophischen Fachzeitschriften vorbehalten sein sollte. Sein naturwissenschaftlicher Inhalt hat aber auch

für alle Freunde der Naturwissenschaft Interesse. Der von der Physik hypothetisch eingeführte Äther wird verallgemeinert und hat demnach als Weltäther eine äusserst wichtige Rolle nicht nur in der gesamten Physik, sondern auch in der Chemie, Mineralogie, Astronomie, Medizin, Meteorologie, Mechanik, Physiologie etc. Auf Grund dieser Anschauung wird nachzuweisen gesucht, dass es kein absolutes Nichts giebt, also auch kein leerer Raum existieren kann.

B. Nebel.

# Bibliographie

vom 13. Mai bis 19. August 1897.

### Periodische Schriften.

Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 4. Bd. 1894—1895. Berlin, Reimer. 4. Enthaltend die Chronik der Vereinigung für die Jahre 1894 und 1895, kurze Berichte über die auf den Versammlungen in Wien und Lübeck geh. Vorträge, sowie einen ausführlichen Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper, von Dav. Hilbert. Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes v. A. Wangerin und A. Gutzmer. M. 16.

Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorologischen Instituts. Herausgegeben durch dessen Dir. Wilh. v. Bezold, Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung im Jahre 1896, zugleich deutsches meteorolog. Jahrbuch für 1896. Beobachtungssystem des Königreichs Preussen und benachb. Staaten. 2. Heft. Berlin, Asher & Co. M. 3.

—— Dasselbe. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1895. Ebenda. M. 8.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches. Jahrg. 1895. Meteorol. Beobachtungen in Württemberg im Jahre 1895. Mitteilungen der mit dem königl. statist. Landesamt verbund. meteorol. Zentralstation. Bearbeitet von Dr. L. Meyer unter Mitwirkung von Prof. Dr. Mack. Stuttgart, Metzler. M. 4. 50.

Berichte, mathem. und naturw., aus Ungarn. 13. Bd. 2. Hälfte. Budapest, Verlagsbureau der Ungar. Akademie der Wissenschaften. M. 4.

Fortschritte, die, d. Physik im Jahre 1891. Dargest. von d. physikal. Gesellschaft zu Berlin. 47. Jahrg. 3. Abt. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 3. Kosmische Physik. Red. von Rich. Assmann. M. 25.

Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 5. Bd. 1896. 1. Heft. Enthaltend die Chronik der Vereinigung für die Jahre 1896, sowie kurze Berichte über die auf der Versammlung in Frankfurt a. M. geh. Vorträge. Herausg. von A. Wangerin u. A. Gutzmer. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2. 80.

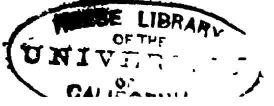
Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorol. Instituts. Ergebnisse d. magnet. Beobachtungen im Jahre 1894. 2. Heft. Berlin, Asher & Co. M. 3. 50.

—— Dasselbe im Jahre 1895. 2. Heft. Ebenda. M. 3. 50.

—— Dasselbe. Ergebnisse der Niederschlags-Beobachtungen im Jahre 1894. Ebenda. M. 10.

Berichte der sächs. Gesellsch. der Wissensch. Mathem.-physik. Klasse. 1897. I. und II. Leipzig, Hirzel. à M. 1.

Nachrichten von der königl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen. Mathem.-physik. Klasse, nebst geschäftl. Mitteil. 1897. Göttingen, Horstmann. M. 5.



Sitzungsberichte, Münchner. Mathem. Klasse. 1896. 4. Heft. München, Franz. M. 1. 20.

—— Wiener. Mathem.-naturw. Klasse. 1. Abteilung. 105. Bd. 8.—10. Heft. Wien, Gerolds Sohn. M. 5.

Beobachtung des Tifliser physik. Observatoriums im Jahre 1895 (russisch und deutsch). Tiflis. (St. Petersburg, Eggers & Co.) M. 10.

Jahresbericht des Zentralbureaus für Meteorologie und Hydrographie im Grossherzogtum Baden, mit den Ergebnissen der meteorolog. Beobachtungen und der Wasserstandsaufzeichnungen am Rhein und an seinen grösseren Nebenflüssen für das Jahr 1896. Mit einem Anhang betr. die Hochwasserkatastrophe vom März 1896. Karlsruhe, Braun. M. 6.

Publikation der astronom. Gesellsch. XXI. Gyldén, Hugo, Hilfstafeln zur Berechnung der Hauptungleichheiten in den absoluten Bewegungstheorien der kleinen Planeten. Unter Mitwirkung von Dr. Oppenheim herausgegeben. Leipzig, Engelmann. M. 30.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von Emil Lampe. 26. Bd. Jahrg. 1895 (in 3 Heften). 1. Heft. Berlin, Reimer M. 13. 50.

Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. 3. Bd. 7. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. M. 1.

Beobachtungsergebnisse d. königl. Sternwarte zu Berlin. 7. Heft. Marcuse, Adf., Photographische Bestimmungen der Polhöhe. Berlin, Dümmler. M. 3.

## Geschichte der Mathematik und Physik.

Obenrauch, Ferd. Jos., Geschichte der darstellenden und projektiven Geometrie. Brünn, C. Winiker. M. 9.

Bois-Reymond, Emil du, Hermann von Helmholtz. Gedächtnisrede. Leipzig, Veit & Co. M. 2.

Goldbeck, Ernst, Die Gravitationshypothese bei Galilei und Borelli. Programm. Berlin, Gärtner. M. 1.

Mach, Ernst, Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt (internationale wissenschaftl. Bibliothek, Bd. 59). 3. Aufl. Leipzig, Brockhaus. M. 8.

Abhandl. der kaiserl. Leopoldin.-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher, 71. Bd. Nr. 1—3.

1. Braunmühl, A. v., Beiträge z. Geschichte d. Trigonometrie Leipzig, Engelmann. M. 1. 50.
2. —— Nassîr Eddîn Țûsi und Regimontan. Ebenda M. 2.
3. Kutta, W. M., Zur Geschichte d. Geometrie mit konstanter Zirkelöffnung. Ebenda. M. 2. 50.

Poggendorff's Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. 3. Bd. 8. und 9. Lieferung. Leipzig, Barth. à M. 3.

## Reine Mathematik.

Puchberger, Eman., Eine allgemeinere Integration der Differentialgleichungen. V. (Supp.-) Heft. Wien, Gerolds Sohn. M. 1. 60.

Burkhardt, Heinr., Funktionentheoretische Vorlesungen. 1. Th. Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Leipzig, Veit & Co. M. 6.

RICHTER, OTTO, Die Berührungskegelschnitte d. ebenen Kurven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten. Progr. Leipzig, Heinrichs' Sortiment. M. 1. 20.

BIGLER, U., Ein Beitr. z. Theorie d. arithm Reihen. Aarau, Sauerländer & Co. M. 1.

Produktentafel, kleine. Herausgegeben von der trigonometrische Abteilung der königl. preuss. Landesaufnahme. Berlin, Mittler & Sohn. M. —. 15.

Taschentafel, 4 stellige, logarithm. Hrsg. von der trigonom. Abteilung d. königl. preuss. Landesaufnahme. Ebenda. M. —. 30.

WELTZIEN, CARL, Üb. Produkte u. Potenzen v. Determinanten (od. üb. Komposition von linearen Substitutionen). Programm. Berlin, Gärtner. M. 1.

BECKER, E., Logarithm.-trigonom. Handbuch auf fünf Dezimalen. 2. Ausg. Leipzig, Tauchnitz. M. 1. 20.

FRISCHAUF, JOHS., Vorlesungen über Kreis- und Kugel-Funktionenreihen. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2.

ISENKRAHE, C., Das Verfahren der Funktionswiederholung, seine geometr. Veranschaulichung u. algebr. Anwendung. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2. 80.

STURM, Ch., Lehrbuch der Analysis (Cours d'Analyse). Übers. von Privatdozent Dr. THDR. GROSS. 1. Bd. Berlin, Fischers technol. Verlag. M. 7. 50.

SCHMIDT, H. C., Zahlenbuch, Produkte aller Zahlen bis 1000 mal 1000. Entworfen von C. CARIO. Aschersleben, Bennewitz. geb. M. 10.

TENGLER, FRZ.. Konstruktion d. konjug. Durchmesser resp. Axen eines Kegelschn., der einem gegeb. polar rezipr. ist. Progr. Klagenfurt, v. Kleinmayr. M. 1.

KRAUSE, MART., Theorie d. doppeltperiod. Funktionen einer veränderl. Grösse. 2. (Schluss-)Bd. Leipzig, B. G. Teubner. M. 12.

KRONECKER'S, LEOP., Werke. Hrsg. von K. HENSEL. 2. Bd Ebenda. M. 36.

## Angewandte Mathematik.

SPITZER, SIM., Tabellen f. d. Zinseszinsen- u. Rentenrechn. m. Anwendung ders. auf Berechn. von Anlehen, Konstruktion von Amortisationsplänen u. s. w. 4. Aufl. Wien, Gerolds Sohn. M. 15.

KECK, WILH., Vorträge üb. Mechanik als Grundl. f. d Maschinenw. II. Tl. Mechanik elastisch-fester und flüssiger Körper. Hannover, Helwing. M. 12.

LEMKE, H., Über die Mars- u. Jupiterstörungen der kl. Planeten vom Hebe-Typus. Dissertation. Berlin, Mayer & Müller. M. 2.

HOLLEFREUND, KARL, Anwendungen des Gauss'schen Prinzipes vom kleinsten Zwange. Programm. Berlin, Gärtner. M. 1.

SCHWARZMANN, MAX, Reziproke Krystallformen und rezipr. Krystallprojektionen. Leipzig, Hirzel M. 3.

SINRAM, A., Fragmente zum kosm. Bewegungsgesetz (Incitationstheorie) u. zur Mechanik des Himmels. Hamburg, Gräfe & Sillem. M. 1.

GOLDSCHMIDT, LUDW., Die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Versuch einer Kritik. Hamburg, Voss. M. 7.

Handwörterbuch der Astronomie. 9. Lieferg. Breslau, Trewendt. M. 3. 60.

JORDAN, W., Handbuch d. Vermessungskunde. 2. Bd. Feld- u. Landmessung. 5. Aufl. (in 2 Lieferg). 1. Lieferung. Stuttgart, Metzler. M. 8.

ZEHNDER, L., Die Mechanik des Weltalls in ihren Grundzügen dargestellt. Freiburg i. B., Mohr. M. 3.

Ergebnisse, die, der Triangulation der Schweiz. Hrsg. d. d. topogr. Bureau. — Risultati della triangulatione della Svizzera 2. u 3. Lieferung, Bern, Schmid & Francke. à M. 4.

REINHARDT, KARL, Steuerungstabellen für Dampfmaschinen. Berlin, Springer. geb. M. 6.

KLEIN, F. und SOMMERFELD, A., Über die Theorie des Kreisels. 1. Heft. Die kinemat. und kinet. Grundlagen der Theorie. Leipzig, B. G. Teubner. M. 5. 60.

## Physik und Meteorologie.

HEINRICH, Ergebnisse der meteorol. Beobachtungen, angestellt auf der landwirtschaftlichen Versuchsstation zu Rostock im Jahre 1896. Güstrow, Opitz & Co. M. —. 50.

ALBRECHT, GUST., Die Elektrizität. Heilbronn, Schröder & Co. geb. M. 2.

WALLENSTEIN, IGN. G., Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen über elektrische Energieverhältnisse und unter Darstellung der den Anwendungen in der Elektrotechnik zu Grunde liegenden Prinzipien. Stuttgart, Enke. M. 8.

PLANCK, MAX, Vorlesungen üb. Thermodynamik. Leipzig, Veit & Co. kart. M. 7. 50.

TYNDALL, JOHN, Der Schall. Nach der 6. engl. Auflage des Originals bearb. von A. v. HELMHOLTZ u. CL. WIEDEMANN. 3. Aufl. Braunschw., Vieweg & Sohn. M. 10.

SERVUS, HERM., Neue Grundlagen der Meteorologie. Berlin, Gärtner. M. 1.

LÜDERS, J., Über den Kreisprozess der Gasmaschine. II. Kritische Würdigung der Abhandlung: Beiträge z. Theorie d. Gasmaschine von Prof. Dr. A. SLABY. Aachen, Mayer. M. 1. 20.

EBERT, H., Magnetische Kraftfelder. Die Erscheinungen des Magnetismus, Elektromagnetismus und der Induktion, dargestellt auf Grund des Kraftlinienbegriffes. 2. Teil. Leipzig, Barth. M. 10.

KERBER, ARTH., Beiträge zur Dioptrik. 3. Heft. Leipzig, Fock. M. —. 50.

COHN, EMIL, Elektrische Ströme. 10 Vorträge über die physikal. Grundlagen der Starkstromtechnik. Leipzig, Hirzel. M. 3. 60.

HARTL, HEINR., Meteorlog. u. magnet. Beobachtungen in Griechenland. 2. Bericht. (Aus: „Mitteilungen des k. und k. militär-geograph. Instituts".) Wien, Lechners Sortiment. M. 1.

FARADAY, MICH., Experimental-Untersuchungen über Elektrizität. (Aus den Philosoph. Transact.) Herausgeg. von A. J. v. ÖTTINGEN. III. bis V. Reihe. (1833). (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 86). Leipzig, Engelmann. M. 1. 60.

—— Dasselbe. VI. bis VIII. Reihe (1834). (Ostw. Klass. Nr. 87.) Ebenda. M. 2. 60.

CELLIER, LÉON, Leitungsvermögen der schwarzen Kohle für Wärme und Elektrizität (Dissertation). Zürich, Speidel. M. 3.

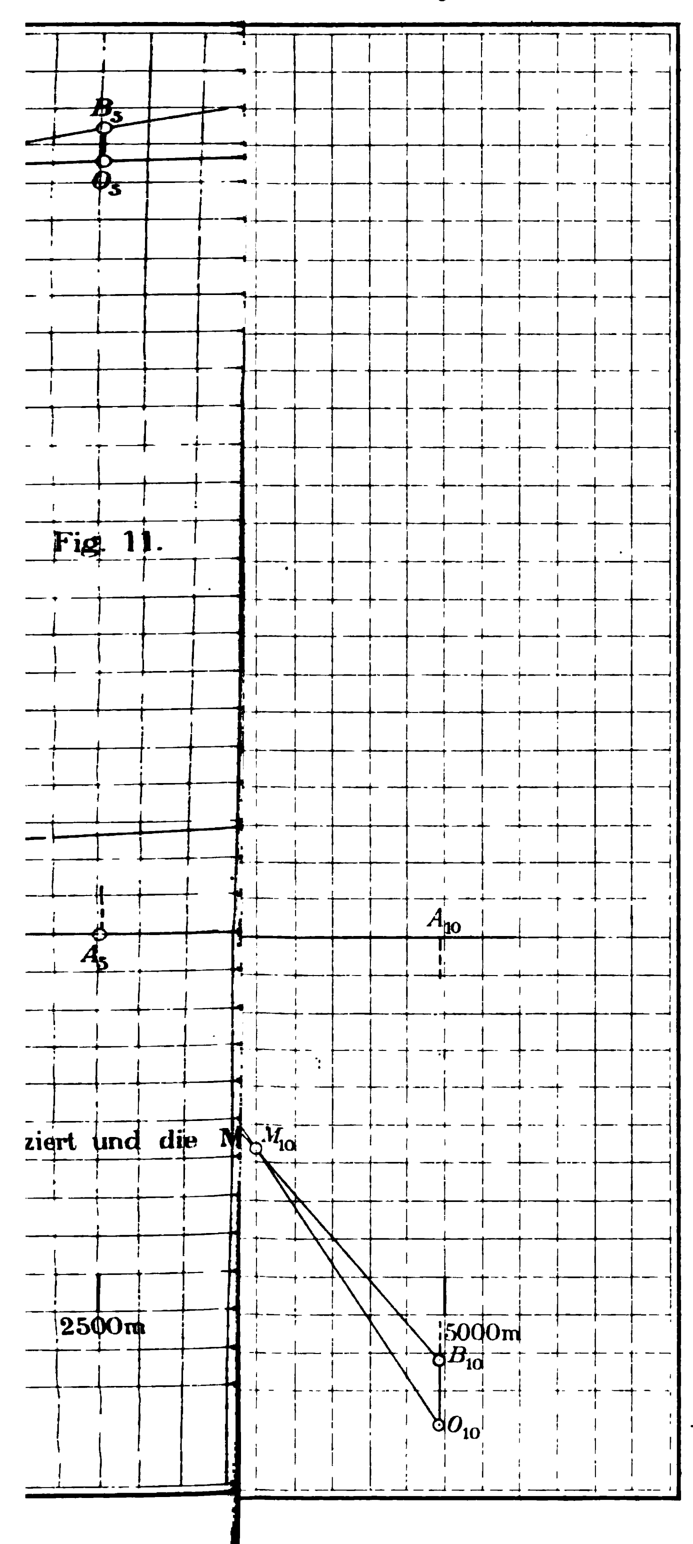
MÜLLER-POUILLETS, Lehrbuch d. Physik u. d. Meteorologie. 9. Aufl. von Prof. Dr. LEOP. PFAUNDLER unt. Mitwirk. des Prof. Dr. OTTO LUMMER (in 3 Bdn.). 2. Bd. 1. Abt. 3. (Schluss-)Lieferg. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 9. 50.

WEILER, W., Wörterbuch der Elektrizität und des Magnetismus (in ca. 16 Heften). 1. Heft. Leipzig, Schäfer. M. —. 75.

Anleitung zur Messung und Aufzeichnung der Niederschläge. Herausg. vom königl. preuss. meteorol. Institut. 3. Aufl. Berlin, Asher & Co. M —. 60.

JANUSCHKE, HANS, Das Prinzip der Erhaltung der Energie und seine Anwendung in der Naturlehre. Ein Hilfsbuch für den höheren Unterricht. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 12.

Tafel III.




REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF CALIFORNIA

# Historisch-litterarische Abteilung.

## Die Quadratwurzelformel des Heron bei den Arabern und bei Regiomontan und damit Zusammenhängendes.

Von

MAXIMILIAN CURTZE

in Thorn.

Der *Codex Vindobonensis Palatinus No. 5203 (Phil. 387)* dürfte eine höchst interessante Handschrift darstellen. Sie ist nämlich, wie mich eine Vergleichung mit den eigenhändigen Briefen des Regiomontan in der Stadtbibliothek zu Nürnberg unzweifelhaft gelehrt hat, von diesem Meister des XV. Jahrhunderts geschrieben worden. Randglossen, welche Schoners Handschrift zeigen, beweisen, dass sie einst von ihm, wenn nicht besessen, doch eingehend durchgearbeitet ist; und wenn nun in dieser Handschrift sowohl die „*Theoricae planetarum*“ Peurbachs enthalten sind: „*anno domini 1454*$^{to}$ *Wienne in Collegio Civium finite penultima mensis Augusti*“ genau mit der Regiomontanschen Ausgabe* bis auf die Figuren stimmend; wenn dann weiter darin die von Schoner** herausgegebenen Abhandlungen Regiomontans beziehungsweise Peurbachs „*De tabula sinus et chordarum*“ und „*Tractatus sinuum et chordarum*“, letztere, wie in der Ausgabe ohne die Tafel selbst, enthalten sind, ebenfalls bis auf die Figuren genau

* Die Ausgabe Regiomontans ist ohne jede Seitenzahl und ohne jede andere Notiz. Sie umfasst 20 Blatt, welche in zwei Quinionen gedruckt sind. Anfang (Blatt 1$^r$, Z. 1—4): THEORICAE NOVAE PLANETARVM GEORGII |PVRBACHII ASTRONOMI CELEBRATISSIMI | DE SOLE | Sol habet treſ orbes a ſe inuicem omniquaqꝫ diuiſos | u. s. w. — Schluss (Blatt 20$^v$, Z. 36—39): Hunc motum ſequū | tur omnes ſphęrę inferiores in motibus ſuis ita ut reſpectu hui⁹ eclipticę mo | bilis ſint auges deferentium & declinatōnes earum semꝑ inuariabiles; ¦ FINIS. — Die Seite hat 45 Zeilen.

** *Tractatus* G. Peurbachii *super propositiones Ptolemaei de sinibus et chordis.* ·*Item compositio tabularum sinuum per* Joannem de Regiomonte *Adiectae sunt et Tabulae sinuum duplices per eundem* Regiomontanum. *Omnia nunc primum in utilitatem Astronomie studiosorum impressa. Norimbergae apud* Joh. Petrejum 1541. Fol. — Wiederholt in der Santbechschen Ausgabe der Trigonometrie Regiomontans, Basileae s. a. (1561) S. 131—146.

übereinstimmend, wenn endlich der „*Algorithmus demonstratus*“ des Jordanus darin sich findet, welchen Schoner gleichfalls, wie er selbst sagt, aus einer Wiener Handschrift, welche von Regiomontan geschrieben war, edierte*, so dürfen wir wohl in dem vorliegenden Manuskripte dieses Schonersche erblicken. Leider war es mir der Engherzigkeit der Verwaltung der Bibliothek des Königl. Gymnasiums zu Thorn halber unmöglich, die mir aus Wien und Krakau gesendeten Handschriften vollständig ausnutzen zu können. Es wurde mir nur gestattet, der ich diese Bibliothek 18 Jahre selbst verwaltet hatte, wöchentlich darin vier, sage vier Stunden zu arbeiten. Erst im letzten Augenblicke hat ein Machtwort des Herrn Kultusministers, an welchen ich mich beschwerdeführend gewendet hatte, darin Wandel geschaffen, und habe ich wenigstens die wichtigste Handschrift, den Kommentar des An-Nairîzî zu den zehn ersten Büchern des Eukleides in der Übersetzung Gerhards von Cremona, vollständig abschreiben können.** Folgende mit sehr flüchtiger Schrift gemachte Notizen unserer Handschrift aber haben Beziehung zu der in der Überschrift genannten Formel und den von mir gegebenen Erläuterungen, und möchte ich sie deshalb hier als eine nicht uninteressante Ergänzung ebenfalls bekannt geben.

1. (Blatt 168r): Radicem de 10 in integris non habes nisi 3. Si viciniorem velis, 3 in se duc, fiunt 9, deficit 1, quod divide per duplum radicis in integris, scilicet 6. Est ergo prima radix vicina $3\frac{1}{6}$. Si secundam viciniorem velis, duc hanc primam in se, fiunt $10\frac{1}{36}$. Id superhabundat in $\frac{1}{36}$. Nunc dupla primam radicem vicinam, scilicet $3\frac{1}{6}$, fiunt $6\frac{1}{3}$. Hoc multiplica per 36, fit 228, divisor. Hunc iterum multiplica per $\frac{1}{6}$, exeunt 38; auffer 1, manent 37, numerator. Est ergo secunda vicina radix $3\frac{37}{228}$. Quam si in se ducis, exeunt $10\frac{1}{51984}$. Si iterum viciniorem cupis, multiplica 51984 per duplum radicis secunde vicine, scilicet per $6\frac{74}{228}$, fiunt 328776. Quod iterum multiplica per fractionem aput radicem, scilicet $\frac{37}{228}$, fiunt 53354. Ab hoc 1 minue, et fit tercia radix vicina 3 et $\frac{53353}{328776}$. Hec si in se ducis, provenient $10\frac{1}{108093658176}$.

---

* Seite 4 der Vorrede sagt Schoner: *Incidi nuper in libellum . . . exaratum max. et doctiss. viri* Regiomontani *divina manu, quem in Vienensi quapiam bibliotheca audio asservari hoc titulo: Algorithmus demonstratus incerti autoris, unde suspicor hoc exemplum fuisse descriptum.*

** Das arabische Original der sechs ersten Bücher geben Besthorn und Heiberg arabisch und lateinisch heraus.

| 10 | 10 | $10\frac{1}{36}$ | $10\frac{1}{51984}$ | $10\frac{1}{108093658176}$ | quadrata |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | $\frac{9}{1}$ | $3\frac{1}{6}$ | $3\frac{37}{228}$ | $3\frac{53353}{328776}$ | radices |

Sic de 12 integris radix vicinior est 3; in fractionibus prima vicinior est $3\frac{1}{2}$. Hec in se fit $12\frac{1}{4}$. Secunda vicinior est $3\frac{13}{28}$; hec in se fit $12\frac{1}{784}$. Tercia vicina est $3\frac{2521}{5432}$.

| 8 | 4 | $8\frac{1}{1}$ | $8\frac{1}{36}$ | $8\frac{1}{41616}$ | quadrata |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | $2\frac{1}{1}$ | $2\frac{5}{6}$ | $2\frac{169}{204}$ | radices |

Dass wir es hier mit der Heronschen Formel zu thun haben, ergiebt sich aus folgenden Betrachtungen. Regiomontan findet zunächst:

$$\sqrt{a^2+b} \sim a + \frac{b}{2a};$$

das Quadrat davon ist:

$$a^2 + b + \frac{b^2}{4a^2}.$$

In allen von ihm benutzten Beispielen ist $b = 1$. Nun lässt er folgendes ausführen: Er multipliziert $2a + \frac{b}{a}$ mit $4a^2$ und erhält dadurch als Nenner seines neuen Bruches $8a^3 + 4ab$. Dies multipliziert er wieder mit $\frac{b}{2a}$ und subtrahiert von dem Produkte $b^2$, bei ihm 1, und erhält so als Zähler seines neuen Bruches $4a^2b + b^2$. Der neue Wurzelwert ist also:

$$\sqrt{a^2+b} \sim a + \frac{4a^2b+b^2}{8a^3+4ab}.$$

Heron lässt dagegen folgendes ausführen.* Mit seinem ersten Näherungswerte $a + \frac{b}{2a}$ dividiert er in die gegebene Zahl; so erhält er:

$$\frac{(a^2+b)\,2a}{2a^2+b}.$$

Dazu addiert er den gefundenen Näherungswert und nimmt von der Summe die Hälfte als zweiten Näherungswert, und erhält so:

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b^2+4a^2b}{8a^3+4ab}.$$

Das ist aber die Formel Regiomontans. Letzterer hat seine Kenntnis dieser Formel jedenfalls aus arabischer Quelle erhalten. Denn Alkasâdî giebt genau seine Anweisung.** Es ist daher gar nicht

* Vergleiche meinen Aufsatz in Heft 4 dieses Jahrgangs, S. 113—120.

** Günther, *Die Quadratischen Irrationalitäten der Alten und ihre Entwickelungsmethoden.* (Abhandl. zur Gesch. der Mathem. IV) S. 45.

nötig, wie Günther annimmt,* dass Alkasâdî seine Formel durch Aufwickelung des Kettenbruchs:

$$\sqrt{a^2+b} \sim a + \cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a}}} = a + \frac{4a^2b+b^2}{8a^3+4ab}$$

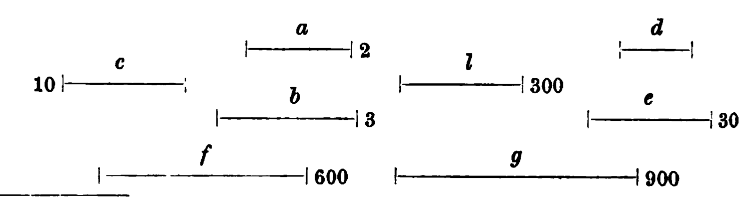
gefunden hat. Auch der Zweifel, welchen derselbe Gelehrte ausspricht,** es hätten die Griechen gefundene Näherungswerte nicht wieder bei Wiederholung derselben Näherungsrechnung benutzt, ist hinfällig; Heron hat so gethan und, seinem Vorbilde folgend, Regiomontan. Von Interesse dürfte wohl die schulgemässe Anordnung der gefundenen Resultate sein, sowie bei $\sqrt{8}$ die beiden Formen $2\frac{1}{1}$ und $8\frac{1}{1}$ statt 3 und 9, welche es ermöglichen, auch in diesem Falle die befolgte Methode zur Anwendung zu bringen. An derselben Stelle hat aber Regiomontan auch die Formel aufgestellt und bewiesen, von welcher ich annahm, dass Archimedes bei seinen Quadratwurzeln Gebrauch gemacht habe.*** Ich meine die Formeln:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{bc}\sqrt{abc^2} \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{1}{bc}\sqrt[3]{ab^2c^3}.$$

Auch diese beiden Abschnitte erlaube ich mir mitzuteilen. Ohne den Beweis der Richtigkeit findet man sie in fast allen mittelalterlichen Anweisungen zum Rechnen.

2. (Blatt 167′): Radix minutie vulgaris quadrata propinqua, si ipsa minutia non sit quadrata, sic precipitur inveniri. Prepone numeri alium quemcumque, qui quanto maior erit, tanto precisiorem habebis radicem. Quem multiplica per denominatorem minutie date, et productum constitue denominatorem radicis inveniende. Postea numerum prepositum multiplica in se quadrate, et productum in denominatorem minutie proposite, et quod exit, duc in numeratorem eiusdem minutie. Tocius radicem quadratam viciniorem pone pro numeratore radicis.

*Racio.* Sit minutia proposita $a \cdot b$, numerus prepositus $c$. Ex $c$ in $b$ fiat $e$, quem ponemus denominatorem radicis. Ex $e$ in se fiat $g$. Ex $c$ in se et producto post hoc in $b$ fiat $l$; ex $a$ in $l$ fiat $f$: dico primo minutiam $f \cdot g$ esse eandem cum minutia $a \cdot b$ data. Igitur, cum radix $g$ fit $e$, extrahatur etiam radix de $f$, que sit $d$: habebitur radix $d \cdot e$ minor minutie $a \cdot b$ date.




* A. a. O., S. 58.

** A. a. O., S. 83 am Schlusse der Anmerkung.

*** Vergleiche meinen oben erwähnten Aufsatz in Heft 4 1897.

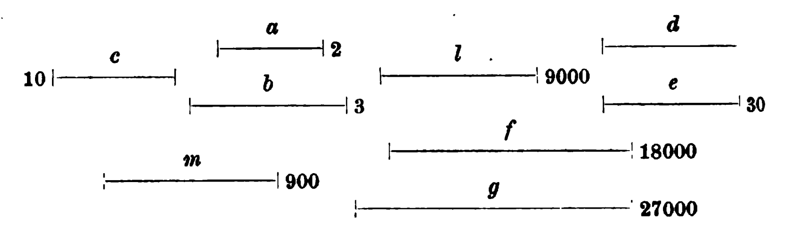
Quod autem minutia $f \cdot g$ sit eadem cum minutia $a \cdot b$, sic declaratur. Ex $a$ in $l$ fit $f$ ex ypothesi, sed ex $b$ in $l$ fit $g$, ut probabo: igitur $f \cdot g$ minutia est eadem cum minutia $a \cdot b$. Sed quod ex $b$ in $l$ fiat $g$, sic ostenditur.[†] Nam ex $c$ numero in $b$ alium fit $e$, in quam $e$ ducitur tercius, scilicet $e$, et fit $g$: igitur $g$ est equale ei, quod producitur altero duorum $c$ et $b$ multiplicato in tociens multiplicem reliqui, quot sunt unitates in tercio, scilicet $e$, $l$ autem est tociens multiplex ad $c$, quot sunt unitates in $e$, quia ex $c$ in $c$ et post in $b$ fit $l$, quod tantum est, sicut $c$ in $b$ et productum iterum in $c$ multiplicatum: habes igitur propositum.

Eadem racio foret, si numerum prepositum diviserimus in numeratorem, et productum constituerimus numeratorem radicis. Deinde numerum prepositum in se et postea in numeratorem numeri dati et deinde in denominatorem, et producti radicem constituemus denominatorem radicis. Sic extrahere poteris radices vicinas artificialiter quotcumque unitates in numeratore aut denominatore ad placitum constituendo.

†) *Vel. sic.* Ex $c$ in se et postea in $b$ tantum est, sicut ex $c$ in $b$ et postea in $c$. Igitur, ex $c$ in $b$ quia fit $e$, ex $c$ in $e$ fiet $l$. Igitur $l$ ad $e$ sicut $e$ ad $b$, ergo $e$ in se tantum facit, siut $b$ in $l$: igitur $b$ in $l$ producit $g$.

3. Radix minutie vulgaris cubica propinqua, si ipsa non sit cubica, sic precipitur inveniri. Prepone quodvis numerum, qui, quanto maior erit, tanto precisiorem habebis radicem. Quam multiplica per denominatorem date minutie, productum constituens denominatorem radicis. Deinde numerum prepositum duc in se cubice, et quod provenit, in denominatorem minutie, et quod provenit, iterum in denominatorem minutie, et ultimum productum in numeratorem, et tocius radix cubica propinqua constituatur numerator radicis.

*Racio.* Sit minutia proposita $a \cdot b$, numerus prepositus $c$. Ex $c$ in $b$ fiat $e$; ex $e$ in se cubice fiat $g$; $c$ autem in se cubice et post in $b$, et productum in $b$ faciet $l$, in quod $a$ ductum faciet $f$: dico, quod minutia $f \cdot g$ sit equalis vel eadem cum minutia $a \cdot b$. Ideo radix cubica de $g$ sit $c$, sit et $d$ radix cubica de $f$: erit $d \cdot e$ minutia radix cubica vicina minutie date Si probatur, |168ʳ| quod ex $b$ in $l$ fiat $g$, habebitur intentum. $e$ in se faciat $m$; quia igitur ex $c$ in se cubice et deinde in $b$ et iterum in $b$ tantum fit, sicut ex $c$ in $b$ et deinde in $c$ et postea in $b$ et ultimo in $c$, ergo $c$ in se cubice et deinde productum in $b$ et iterum productum in $b$ tantum facit sicut $c$ in $e$ et productum in $b$ et ultimum productum in $e$. Sed $c$ in $e$ et productum in $b$ tantum facit sicut $e$ in id, quod fit ex $c$ in $b$, hoc est tantum facit sicut $e$ in se: ergo quod fit ex cubo ipsius $c$ in quadratum ipsius $b$, est equale ei, quod fit ex $c$ in quadratum ipsius $e$. Igitur ex $c$ in $m$ fit $l$; sed ex $c$ in $b$ fit $e$, ergo $l$ ad $m$ sicut $e$ ad $b$. Igitur, quod fit ex $b$ in $l$, est equale ei, quod fit ex $e$ in $m$. Sed ex $e$ in $m$ fit $g$: igitur ex $b$ in $l$ fit $g$, quod fuit probandum.




Similis racio esset, si numerum prepositum diviserimus in numeratorem et productum constituemus numeratorem radicis. Deinde numerum prepositum in se cubice, et cubum in quadratum numeratoris fractionis date et productum in denominatorem, et provenientis radicem cubicam viciniorem poneres denominatorem. Sic poteris igitur radices artificialiter extrahere, quidque placet pro numeratore vel denominatore ponendo.

Ausser den oben erwähnten Formeln kennt also Regiomontan auch noch folgende anderen:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{ac}{\sqrt{abc^2}} \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{ac}{\sqrt[3]{a^3bc^3}}.$$

Die $\sqrt{10}$ spielt bekanntlich bei den Indern als Näherungswert von $\pi$ eine wichtige Rolle. Wir finden diesen Wert z. B. in der oben erwähnten Arbeit Peurbachs *Tractatus sinuum et chordarum* angeführt. Von anderen Beziehungen der Linien am Kreise wird sonst stets unter Angabe der indischen Quelle im Mittelalter die Seite des regulären Siebenecks im Kreise als Hälfte der Seite des regulären Dreiecks bezeichnet. Auch zu dieser Bemerkung findet sich in unserer Handschrift eine Notiz des Regiomontan, welche fast gleichlautend auch bei Jordanus sich erhalten hat. Da sie zugleich eine Näherungsrechnung für die Seiten aller regulärer Vielecke darzustellen behauptet, so lasse ich sie ebenfalls hier folgen, und gebe in Anmerkung die Stelle des Jordanus, welche ihr entspricht.*

4. (Blatt 128′): Philosophi Indorum artem communem et subtilem tradiderunt, qua potuerimus invenire, quantum sit cuiuslibet figure

* „Hec est questio Indorum dicens de inscriptione cuiusvis figurarum equalium laterum cadentis in circulo, et plurimum quidem positionis Indorum non est nisi credulitas sola absque demonstratione et in eo propinquitas, inter quam et veritatem non est quantitas sensibilis, et hec est operatio, quam nunc dicam. Duc medietatem diametri in se semper, demum quod aggregatur duc in 18 semper et semper serva aggregatum. Deinde prohice ex numero laterum figure, cuius quantitatem vis extrahere, unum laterum eius semel semper, et accipe medietatem eius, quod remanet, et duc eam in numerum laterum figure et adiunge ad illud, quod aggregatum est, tria semper, et quod egredietur est quadratum lateris. Quando ergo sic operatus fueris, super quod exigitur demonstratio, exibit ad hunc numerum. Et scias, quod ipsi ponunt latus eptagoni cadentis in circulo per equalitatem medietatis lateris trianguli cadentis in eo, et non est in manibus eorum super illud demonstratio plus quam inventio: intelligite ergo etc.

poligonie equilatere circulo inscripte latus, et inter artem illorum et Ptolomei non est differentia nisi in latere decagoni. Et est ingenium istorum istud. Multiplica quadratum dyametri circuli per 4 et dimidium, productum serva. Deinde auffer unum a numero laterum talis figure, et reliquum multiplica per medietatem numeri laterum quesite figure et adde 3, et per ipsum, quod provenit, divide servatum, et exeuntis radix erit latus talis figure poligonie equilatere. Ut posita dyametro 60 partium more Sarrazenorum erit quadratum eius 3600, quod multiplicatum per 4 cum dimidio est 16200; serva. Deinde si volo reperire latus trigoni, auffero 1 a lateribus, manent duo; que multiplico per $\frac{3}{2}$, erunt 3; quibus addo 3, sunt 6; per que divido servatum, et provenit 2700, quorum radix quadrata est latus trigoni posita dyametro 60 pedum. Item volo reperire latus eptagoni. A 7 demo 1, remanent 6; que multiplico per $\frac{7}{2}$, provenient 21; quibus addo 3, sunt 24; per que divido servatum, provenient 675, quorum latus est latus eptagoni, et sic de aliis.

Die sich hieraus ergebende Formel der Inder zur Auffindung einer beliebigen regulären Polygonseite ist also die folgende:

$$s_n = \sqrt{\frac{4\frac{1}{2}d^2}{(n-1)\frac{n}{2}+3}} = \frac{3d}{\sqrt{n(n-1)+6}} = \frac{6r}{\sqrt{n(n-1)+6}}.$$

Für $n = 3; 4; 6$ ergeben sich daraus die genau richtigen Formeln:

$$s_3 = r \cdot \sqrt{3}; \quad s_4 = r\sqrt{2}; \quad s_6 = r.$$

Für $s_7$ aber erhält man $\frac{r}{2}\sqrt{3}$, das heisst genau die Hälfte der Dreieckseite, und damit ist die Entstehung dieses Näherungswertes wohl klargelegt. Es ist ja auch $675 = \frac{2700}{4}$. Während sich zunächst die Frage aufdrängt, woher haben die Inder den Faktor $4\frac{1}{2}$ hergenommen, kommt die viel wichtigere hinzu, auf welchem Wege Regiomontan zur Kenntnis der obigen Formel gelangt sein wird. Dass er Jordanus *de triangulis* gekannt hat, ist möglich, jedoch ist die Darstellung bei diesen abweichend: es bleibt wohl die einfachste Antwort, er habe sie in Italien aus arabischer Überlieferung kennen gelernt, vielleicht gleichzeitig mit der Formel Heron-Alkasâdî für die Quadratwurzelausziehung. Regiomontan kannte aber auch die falschen Inhaltsformeln für die regulären Polygone, welche eigentlich die Polygonalzahlen geben, die aber im ganzen Mittelalter von den Gromatikern an stets für die oder neben den wirklichen Werten gebraucht wurden. Er ist sich aber ihrer Unrichtigkeit bewusst und beweist dieselbe in einem konkreten Falle. Die betreffende Notiz lautet:

5. (Blatt 131′): Pentagoni equilateri aream reperire. Duc unum latus in se et productum in ternarium, et a summa unum latus aufferatur; residui medietas est area quesita.

Exagoni autem lateris unius quadratum ducatur quater et a summa latus unum bis aufferatur, et residui medietas est ipsa area. Eptagoni vero quadratum lateris unius ducatur quinquies, et a summa ipsum latus unum ter dematur, et remanentis medietas est, quod queritur; et sic in aliis secundum naturalem ordinem numerorum.

Adverte, quod hec rationes debiles sunt in geometria. Veritatem enim certitudinis eius habent tantum in arismetricis, ut dicit Boetius de trigono hisopleuro, quod unum latus per se multiplicatur, et producto quantitas unius lateris adiungatur, et summe medietas erit area talis trigoni, quod tantum certitudinem habet in arismetricis de numero triangulari, nisi velles etiam capere pedes non quadratos superficiales, sed partes pedum pro integris. Patet, quod non sic, de exagono. Ponamus enim exagonum equilaterum circulo inscriptum. Hic resolubilis est in sex trigonos equilateros ductis lineis a centro circuli ad omnes angulos exagoni. Inveniemus igitur quantitatem unius trigoni talis. Pono, quod latus unum sit 4 pedum, tunc medietas unius erit duorum. Erit igitur kathetus talis trigoni radix de 12, que ducta per 2 erit radix de 48, et tanta est area unius sex triangulorum. Et erit area exagoni talis 41 fere. Secundum autem modum Boetii exagonus talis esset 28 pedum tantum.

Man sieht, Regiomontan führt hier genau die nämlichen Gründe für die Unrichtigkeit an, wie sie in dem bekannten Briefe Gerberts an Adelbold enthalten sind.*

Zum Schlusse noch die Bemerkung, dass die Behauptung Dr. Nagls,** dass erst mit dem Anfange des XVI. Jahrhunderts die Form X für vier durch die jetzt gebräuchliche 4 verdrängt sei, nur für Deutschland, und auch für dieses nur teilweise, richtig ist. Regiomontan schreibt z. B. nie anders als 4, und habe ich in in Süddeutschland geschriebenen und auf italienische Beziehungen hinweisenden Handschriften sehr häufig die letztere Form und fast nie die erstere gefunden. Das bleibt freilich richtig: Der Gebrauch der Form X hört mit dem XVI. Jahrhundert absolut auf. Handschriften mit dieser Form müssen also spätestens im XV. Jahrhundert entstanden sein. Der umgekehrte Schluss aber ist unrichtig.

---

* Vergleiche die Ausgabe in den *Oeuvres de* Gerbert ed. Olleris p. 477—478.

** Dr. A. Nagl, *Über eine Algorismusschrift des XII. Jahrhunderts* (Zeitschrift für Mathematik, 34., Hist.-litt. Abt.) S. 134 — 135.

Thorn, 1. Juli 1897.

# Rezensionen.

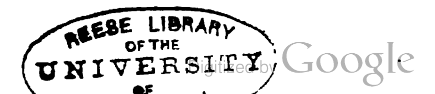
**Magnetismus und Hypnotismus.** (Elektrotechnische Bibliothek. Band 35. Zweite Auflage.) Eine Darstellung dieses Gebietes mit besonderer Berücksichtigung der Beziehungen zwischen dem mineralischen Magnetismus, dem sogenannten tierischen Magnetismus und dem Hypnotismus. Von G. W. Gessmann. Mit 53 Abbildungen und 19 Tafeln. Zweite revidierte und ergänzte Auflage. Wien, Pest, Leipzig 1895. A. Hartlebens Verlag. 205 Seiten. Preis Mk. 3.

Dem in drei Hauptstücke eingeteilten Buche geht eine orientierende Einleitung voraus, in welcher die Wandlung des Hypnotismus hervorgehoben wird, welche dieser seit dem Auftreten Hansens durchgemacht hat. In dem ersten Hauptstück wird der Einfluss des mineralischen Magnetismus auf den menschlichen Körper besprochen, was den Anlass zu einem geschichtlichen Überblick giebt. In dem zweiten Hauptstück wird zunächst die Frage: „Wer ist hypnotisierbar?“ gelöst, und sodann erläutert, weshalb die sogenannten Hypnoskope, d. h. diejenigen Instrumente, welche die leicht zu hypnotisierenden Individuen ermitteln lassen, nicht in allen Fällen mit Sicherheit zu gebrauchen sind. Nach Mitteilung der verschiedenen Methoden, um Hypnotismus zu erzeugen, wird eine Einteilung der Hypnose hinsichtlich der verschiedenartigen Erscheinungen aufgestellt. Das dritte Hauptstück kommt bei der Beobachtung der Bewegungserscheinungen zu dem Schluss, dass im wesentlichen drei verschiedene Zustände zu unterscheiden sind. Sodann werden die Beobachtungen erwähnt, die durch den hypnotischen Zustand an den fünf Sinnen wahrgenommen worden sind. Den Schluss bilden die äusserst rätselhaften Phänomene des Somnambulismus. — Das Buch hat das reiche Material der Beobachtungen auf diesem wunderbaren Gebiete des Hypnotismus systematisch geordnet, wobei namentlich die Wahrnehmungen solcher Personen eingehend angeführt sind, welche dem ärztlichen Berufe angehören. Auf diese Weise ist der Schein des Schwindelhaften ferngehalten. Das Buch mag jedem, der sich für den Hypnotismus interessiert, bestens empfohlen sein, zumal durch die Angabe der Litteratur das Quellenstudium erleichtert wird.

B. Nebel.

---

**Nicola Teslas Untersuchungen über Mehrphasenströme und über Wechselströme hoher Spannung und Frequenz.** Mit besonderer Berücksichtigung seiner Arbeiten auf den Gebieten der Mehrphasenstrommotoren und der Hochspannungsbeleuchtung, zusammengestellt von Thomas Commerford Martin. Autorisierte deutsche Ausgabe von



H. MASER. Mit 313 Abbildungen. Halle 1895. Verlag von Wilhelm Knapp. 508 Seiten.

Seitdem die ganz eigenartigen Licht- und sonstigen Erscheinungen Teslas, welche ihre Entstehung Wechselströmen von hoher Spannung und hoher Frequenz verdanken, in Deutschland bekannt und nachgemacht worden sind, ist auch von deutscher Seite aus den Arbeiten dieses genialen Mannes ein reges Interesse entgegengebracht worden. Seine Ideen bilden das Fundament, auf welchem eine wesentliche Vereinfachung der praktischen Elektrotechnik in Zukunft aufgebaut werden wird. Der Wechselstrom, welcher ursprünglich der Bogenlichtbeleuchtung den Eingang verschafft hat, später aber gänzlich vernachlässigt worden ist, ist nun wieder zur Herrschaft gelangt. — Jeder Elektrotechniker hat daher ein grosses Interesse, die gesamte Thätigkeit Teslas, wie sie in dem vorliegenden Buche geschildert ist, eingehend studieren zu können; denn diese Arbeiten bilden die Basis für die künftige Entwickelung der Elektrotechnik. Durch die eigentümliche Wahrnehmung, dass die Ströme hoher Frequenz dem menschlichen Körper keineswegs schädlich sind, während diejenigen niederer Frequenz direkt das Leben gefährden, wird auch das Interesse des Physikers, des Mediziners und insbesondere des Physiologen geweckt. Das Buch zerfällt in drei Abschnitte. Der erste behandelt in 24 Kapiteln die Mehrphasenströme und ihre Verwendung in der Elektrotechnik, wobei die Eigentümlichkeiten der einzelnen Motoren je nach ihrer Konstruktion erläutert werden. In dem zweiten Abschnitt werden die drei Vorträge mitgeteilt, welche Tesla über die von ihm entdeckten Erscheinungen bei Strömen von hoher Frequenz und hoher Spannung gehalten hat. Der dritte Abschnitt umfasst verschiedene sonstige Erfindungen und Schriften Teslas. Als Anhang ist der vierte Abschnitt zu betrachten, welcher Teslas erste Phasenmotoren und seinen mechanischen und elektrischen Oscillator zum Gegenstand hat. Das Buch sei namentlich denjenigen bestens empfohlen, welche auf diesem Gebiet forschend weiter zu arbeiten beabsichtigen. Dem Inhalt und Druck des Buches entsprechend möge der Verleger bei einer Neuauflage der Herstellung sorgfältigerer Figuren seine Aufmerksamkeit zuwenden; denn das jetzige Machwerk ist dieses Buches keineswegs würdig.

B. NEBEL.

---

**A treatise on the measurement of electrical resistance** by WILLIAM ARTHUR PRICE. Oxford 1894. At the Clarendon press. 199 Seiten. Preis 14/.

Wie die Gewichtsbestimmung in der Chemie, die Winkelbestimmung in der Geodäsie eine Hauptrolle spielt, so ist bei den elektrischen Messungen die Widerstandsbestimmung die wichtigste. Längeres Arbeiten auf diesem Gebiete veranlasste den Verfasser, eine systematische Zusammenstellung der gebräuchlichen Widerstandsmeßmethoden herauszugeben, wobei jedesmal angegeben wird, unter welchen Umständen der eine oder der andere Apparat vorzuziehen ist. Dabei ist auch darauf hingewiesen, wie sehr sich die

elektrische Widerstandsbestimmung der reinsten Metalle zu thermometrischen Zwecken eignet, da die Angaben bis zu dem absoluten Nullpunkt der Temperatur reichen. Bei einem solchen Spezialwerk wäre es doch wünschenswert gewesen, wenn der Verfasser die Litteratur vollständiger benützt hätte, insbesondere vermissen wir die Durchsicht der deutschen Litteratur, in welcher sich die Arbeiten von Frölich, Heinrich Weber, der Physikalisch-technischen Reichsanstalt u. s. w. befinden. Die wenigen deutschen Forschernamen verdankt der Verfasser zum Teil dem Umstand, dass die betreffenden Herren entweder in England Vorträge hielten, z. B. Lindeck über Manganin, oder in englischen Zeitschriften publizierten. Der internationale Charakter der Wissenschaft wird auf die oben angegebene Weise nicht gewahrt. In Deutschland wird sehr darauf gesehen, dass neben der einheimischen Litteratur auch die fremde gebührend berücksichtigt wird.

B. Nebel.

---

**Magnetische Beobachtungen an der deutschen Bucht der Nordsee**, angestellt im Jahre 1894 von A. Schück, Hamburg, und **Elemente des Erdmagnetismus an festen Stationen Europas** in den Jahren 1885, 1890 und 1893 von A. Schück. Hamburg 1895. Selbstverlag des Verfassers. 22 Seiten.

Die Beobachtungen an der deutschen Bucht der Nordsee hat Verfasser mit Unterstützung zahlreicher Hamburger Firmen ausgeführt. Den zweiten Teil bildet eine Zusammenstellung der sogenannten Elemente des Erdmagnetismus nach neueren Beobachtungen an festen Stationen Europas. Der Zweck dieser Beobachtungen hat wesentlich nautischen Charakter.

B. Nebel.

---

**Die Lehre von der Elektrizität und deren praktische Verwendung.** Von Th. Schwartze. Mit 153 in den Text gedruckten Abbildungen. Leipzig 1895. Verlag von J. J. Weber. 548 Seiten. Preis Mk. 10.

Durch die bahnbrechenden experimentellen Arbeiten von Hertz hat die elektro-magnetische Lichttheorie sich allenthalben Bahn gebrochen, weshalb ein jeder das Gefühl hat, dass künftighin die Darstellungsweise in der Physik eine wesentliche Änderung gegenüber der bisherigen erfahren müsse. Der Verfasser hat in dem vorliegenden Werk einen Versuch gemacht, die bisherigen Anschauungen in eine neue umzugestalten. Dieses Übergangswerk geht zunächst von den dem absoluten Maßsystem zu Grunde liegenden Grössen, der Masse, der Länge und der Zeit aus und zeigt, in welcher Form die physikalischen Grössen auftreten, wenn man nur eine Grösse, die Kraft, als Ausgangspunkt der daraus abzuleitenden physikalischen Maße aufstellt. Um über das Neue und Ungewohnte dieser Behandlungsweise leichter hinwegzukommen, behandelt der Verfasser zunächst die allgemeinen physikalischen Grundprinzipien und geht erst dann zu den elektrischen und magnetischen Vorgängen über. Die dritte Abteilung „Elektrotechnisches" umfaßt die elektrischen Meßmethoden nebst den dazu gehörigen Instrumenten. — Je mehr Mitarbeiter bei dieser Umwälzung

gewonnen werden, um so kürzer wird das immer unangenehme Übergangsstadium werden. Es ist daher der Verbreitung dieses Buches Vorschub zu leisten. — Namen sind nicht zu verdeutschen, auch kann man es nicht „offiziell“ nennen, wenn jemand seine Liebhaberei, Amper statt Ampère zu setzen, entgegen einer internationalen Verständigung bei seinen Untergebenen einführt. Was würde denn der Verfasser sagen, wenn in englischen Werken „Om“ statt „Ohm“, in französischen „Wat“ statt „Watt“ stünde, d. h. wenn jeder sein Steckenpferd reiten wollte? Übrigens käme man mit der weiteren Verdeutschung auch auf recht zweideutige Ausdrücke, z. B. das verdeutschte, abgekürzte Coulomb. Im Interesse der Allgemeinheit hat sich jeder der international angenommenen Bezeichnungen zu bedienen und auf seine Lokalwünsche Verzicht zu leisten.

B. Nebel.

---

**Elektrizität und Licht.** Einführung in die messende Elektrizitätslehre und Photometrie. Von O. Lehmann. Mit 220 Holzstichen und 3 Tafeln. Braunschweig 1895. Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn. 390 Seiten. Preis 7 M.

Der physikalische Unterricht wird erst fruchtbringend, wenn auch die quantitative Behandlung des Stoffes zu ihrem Recht kommt. Dies ist der Grund, weshalb von vielen die Experimentalphysik in wesentlich anderer Art, als dies früher der Fall war, vorgetragen wird. In der Mechanik war auch früher die quantitative Seite hervorgetreten, sobald aber die Lehre vom Magnetismus und der Elektrizität an die Reihe kam, trat sie nur noch rudimentär auf. Mit Einführung des absoluten Maßsystems war der erste Schritt zur Besserung angebahnt. Der Zweck dieses Buches ist, den Schüler schon frühzeitig mit den elektrischen und magnetischen Messungen vertraut zu machen, wobei alles Überflüssige hinweggelassen worden ist, und nur die praktische Nutzanwendung ausschlaggebend war. Das Buch verdankt seine Entstehung der Herausgabe der sechsten Auflage von Fricks physikalischer Technik durch den Verfasser, in welcher es auch teilweise zum Abdruck kam. Daß sich der Verfasser streng an die in der Praxis als bewährt gefundenen Apparate hält, giebt sich speziell in der Photometrie deutlich zu erkennen zum Unterschied gegenüber einigen neueren Lehrbüchern der Physik, in welchen die Verfasser sich von ihren Jugenderinnerungen nicht trennen können und dabei die heutige Photometrie, wie sie in der Praxis gehandhabt wird, ganz übergehen. Das Buch wird sich infolgedessen rasch einbürgern und kann nur bestens empfohlen werden. — Bei einer Neuauflage möchte die Verlagsbuchhandlung durch eine andere Wahl des Papieres das Durchschlagen des Drucks von der Rückseite vermeiden.

B. Nebel.

---

**Dr. J. Fricks Physikalische Technik** speziell Anleitung zur Ausführung physikalischer Demonstrationen und zur Herstellung von physikalischen Demonstrationsapparaten mit möglichst einfachen Mitteln. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Von Otto Lehmann.

In zwei Bänden. Zweiter Band. Mit 1016 eingedruckten Holzstichen und 3 Tafeln. Braunschweig 1895. Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn. 1054 Seiten. Preis 20 M.

Mit diesem zweiten Band ist ein Werk zum Abschluss gekommen, welches für Lehrer und Schüler an Hoch- und Mittelschulen von ungeheurem Werte ist. Die Physik ist kein Unterhaltungsmittel mehr, sondern eine Wissenschaft, deren jüngstes Kind, die Elektrotechnik, den Nutzen in Mark und Pfennig auszurechnen gestattet. Will man die Physik richtig erfassen, so genügt es nicht, sich Experimente vormachen zu lassen, sondern selbst Hand anzulegen; erst dann lernt man, mit welchen Schwierigkeiten das Gelingen eines Experimentes verbunden ist, und von welchen Kleinigkeiten sein Zustandekommen abhängt. Die praktische Thätigkeit lehrt alle Einzelheiten, selbst die unscheinbarsten, zu berücksichtigen, schärft somit die Geistesarbeit in angeregter Weise, da Einseitigkeit vollkommen ausgeschlossen ist. Diese Neubearbeitung von Fricks Physikalischer Technik hätte von niemand besser durchgeführt werden können, als von dem in allen praktischen Arbeiten durchaus erfahrenen Verfasser. Es ist eine wahre Freude, nach diesem Buche zu arbeiten, weil es in seiner beratenden Weise alle Umstände sorgfältig berücksichtigt, damit der Experimentator Herr der Situation und unabhängig von dem Zufall wird. Alles, was sich nicht bewährt hat und was heute nicht mehr im Gebrauch ist, ist als überflüssiger Ballast ausgeschieden. — Der reiche Inhalt dieses zweiten Bandes umfasst die Elektrizität, den Magnetismus, die Optik und die Akustik. Das Buch empfiehlt sich von selbst und wird dies durch seine weite Verbreitung beweisen. Die Verlagsbuchhandlung möge bei einer Neuauflage berücksichtigen, dass das Durchschlagen des Druckes von der Rückseite vermieden wird, und dass ein Teil der Figuren auf ihre Reinheit geprüft wird.

B. Nebel.

---

**Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke.** Im Auftrage der Nachkommen herausgegeben von C. Schilling. Erster Band: Gesammelte Werke. Mit dem Bildnis Wilhelm Olbers'. Berlin 1894. Verlag von Julius Springer. 704 Seiten. Preis 16 M.

Es ist ein schöner Zug unserer auch in der Wissenschaft hastig dahineilenden Zeit, dass sie sich ihrer grossen Bahnbrecher mit Stolz erinnert und bestrebt ist, durch Herausgabe ihrer, zum Teil sehr zerstreuten Werke den heutigen Forschern das Quellenstudium zu erleichtern. Nach dem Erscheinen der Werke von Faraday, Gauss, Wilhelm Weber, Ohm ist es mit Freuden zu begrüssen, dass die Nachkommen Olbers auch dessen Werke gesammelt der Nachwelt überliefern. Olbers' Verdienst auf dem Gebiete der Astronomie war namentlich für Bessel von bahnbrechender Natur. Gleichzeitig wird jeder Leser den Eindruck erhalten, dass Olbers eine ganz bedeutende Arbeitskraft besass, um sich neben seinem ärztlichen Beruf so erfolgreich dem gestirnten Himmel widmen zu können. — Der vorliegende erste Band des auf drei Bände berechneten Werkes enthält

Olbers' Thätigkeit als Astronom. Der zweite Band soll den Briefwechsel zwischen Gauss und Olbers bringen, soweit er zur Entwickelung der Wissenschaft beiträgt, während der dritte Band durch die Veröffentlichung zahlreicher Briefe zwischen Olbers und seinen Zeitgenossen ein getreues Bild von Olbers und seinem wissenschaftlichen, sowie privaten Leben geben soll. Sowohl Astronomen als auch Freunde der Astronomie werden sicherlich mit grossem Interesse der Herausgabe dieses Werkes folgen, da es in vieler Hinsicht von grossem Nutzen ist.

B. Nebel.

---

**Astronomische Chronologie.** Ein Hilfsbuch für Historiker, Archäologen und Astronomen. Von Walter F. Wislicenus. Leipzig 1895. Verlag von B. G. Teubner. 163 Seiten.

In erster Linie ist das vorliegende Buch für Historiker und Archäologen bestimmt, sodann soll es aber auch dem Astronomen als ein weiteres Hilfsmittel dienen. Um nun dem Nichtastronomen den Gebrauch desselben zu erleichtern, werden in dem ersten Teil die astronomischen Grundbegriffe erläutert, die zum Verständnis der in dem zweiten Teil enthaltenen Berechnungsmethoden erforderlich sind. Diese letzteren sind in übersichtlicher Weise zusammengestellt und deren Handhabung an praktischen Beispielen durchgeführt, wodurch die Benützung ungemein erleichtert wird. Alle, welche auf diesem Grenzgebiet der Astronomie, Geschichtsforschung und Altertumskunde arbeiten, werden dieses Hilfsbuch mit Freuden begrüssen, da es die oft zeitraubende Thätigkeit wesentlich abzukürzen vermag. Die äussere Ausstattung des Buches lässt nichts zu wünschen übrig.

B. Nebel.

---

**Mathematische Vorschule der Atronomie** in Bezug auf die scheinbare Bewegung des Fixsternhimmels. Eine pädagogische Skizze. Mit 18 Figuren auf 3 Tafeln. Von Adalbert Breuer. Wien 1895. Im Selbstverlage des Verfassers. 24 Seiten. Preis 60 Kr. = 1 M.

Vorliegendes Büchelchen enthält eine Studie des Verfassers, wie er glaubt, dass die mathematische Astronomie in den Mittelschulen behandelt werden soll. Zunächst sagt er selbst, dass der Stoff dasjenige Unterrichtsmaß weit überschreite, welches daselbst innegehalten werden soll, indessen beabsichtige er zunächst, den Lehrer mit seiner Idee der Behandlung vertraut zu machen. Die Vorteile der von dem Verfasser angegebenen Methode sollen darin beruhen, dass sie von der sphärischen Trigonometrie vollständig unabhängig ist und doch dieselben mathematischen Formeln wie die letztere liefert. Ob diese Methode vorteilhaft ist, wird wohl vielfach bezweifelt werden, natürlich ist sie jedenfalls nicht.

B. Nebel.

---

**Astronomische Beobachtungen und Resultate aus den Jahren 1893 und 1894.** Neue Beiträge zur Begründung einer modernen Selenographie und Selenologie, gesammelt auf seiner Privatsternwarte zu

Kaiserslautern von PHIL. FAUTH. II. Mit einem Atlas, enthaltend 25 topographische Spezialkarten des Mondes in Lichtdruck. Leipzig 1895. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). 66 Seiten 4°. Preis 15 M.

Die unter erschwerenden Umständen mit grossem Fleiss hergestellten Mondkarten sind in grösserem Maßstab durchgeführt, als dies zur Zeit der Fall ist. Verfasser war bestrebt, alle Einzelheiten, die er beobachten konnte, aufzunehmen, um den Wert der Karten hinsichtlich der Beurteilung etwaiger Veränderungen auf dem Mond zu erhöhen. Wenn auch zunächst ein scharfer Gegner die vermeintlichen Früchte einer emsigen Thätigkeit als wertlos bezeichnet, so wirkt das nicht gerade erhebend, gleichwohl wird der Erfolg nicht ausbleiben, sofern das Streben, das wirklich Beobachtete der Wahrheit gemäss festzuhalten, nicht erlahmt. Um das Unterlaufen von Irrtümern auszuschliessen, würde sich die Annäherung an vorurteilslose Männer der Astronomie empfehlen. Die Polemik macht erbittert und stört die Gemütsruhe, welche bei scharfen Beobachtungen unerlässlich ist. Schon die Gewinnung eines anerkannt tüchtigen Verlegers muss doch ermunternd wirken.

B. NEBEL.

---

**Die tiefen Temperaturen**, ihre künstliche Erzeugung, ihre Einwirkung auf Tiere, Pflanzen, Mikroorganismen, chemische Prozesse, physikalische Vorgänge etc., sowie ihre Anwendung in der Industrie. Nach den neuesten Untersuchungen bearbeitet für Chemiker, Physiker, Mediziner, Bakteriologen, Lehrer der Naturwissenschaften, sowie für sämtliche Interessenten der Kälteindustrie. Von ADOLF WELTER. Crefeld 1895. Verlag von J. Greven. 84 Seiten.

Die vorliegende, Professor Pictet gewidmete Brochüre verdankt ihre Entstehung zwei Vorträgen des Verfassers. Ausgehend von den Methoden und den Instrumenten zur Messung tiefer Temperaturen werden die drei Arten der künstlichen Erzeugung tiefer Temperaturen eingehend behandelt, nämlich durch Auflösen fester Körper, durch freiwillige Verdampfung von Flüssigkeiten und durch Expansion gasförmiger Körper. Ungemein interessant sind die Versuche, welche grösstenteils von Pictet und seinem Berliner Laboratorium herrühren. Bei — 125° hört z. B. jede chemische Reaktion auf; auch in physikalischer Hinsicht ist der Einfluss tiefer Temperaturen sehr bemerkenswert, so zeigen die Metalle wider Erwarten eine viel grössere Zähigkeit und Festigkeit. Den Schluss bilden die Untersuchungen bei Tieren und Pflanzen, die namentlich bei den kaltblütigen Tieren schon äusserlich sehr frappant sind, während bei den warmblütigen sogar Heilversuche festgestellt wurden. — Wegen der knappen, inhaltsreichen Darstellung wird diese Brochüre für jeden Freund der naturwissenschaftlichen Forschung, der die Litteratur nicht selbst verfolgen kann, ebenso wertvoll sein, wie für den auf diesem Gebiet arbeitenden Gelehrten wegen der zahlreichen Litteraturhinweise.

B. NEBEL.

MAGGI. **Principii della teoria matematica del movimento dei corpi. Corso di meccanica razionale.** Milano. Stoepli. 1896. XI u. 503. 8⁰.

Das vorliegende Lehrbuch der Mechanik ist besonders ausgezeichnet durch eine originelle und sehr sorgfältige Behandlung der Grundbegriffe der Mechanik, die Referent deshalb zunächst etwas ausführlicher darlegen möchte.

Statt wie gewöhnlich mit dem materiellen Punkt und den Kräften zwischen materiellen Punkten zu beginnen, stellt Maggi an die Spitze Hypothesen über die materiellen Figuren. Materielle Figuren sind begrenzte, mit Materie erfüllte Teile des Raums, die hypothetisch mit denjenigen Eigenschaften begabt sind, die wir den homogen mit Masse erfüllten Körpern zuschreiben. Um sie aufzuzählen, wollen wir als mittlere Beschleunigung einer materiellen Figur den Vector $\frac{1}{\tau}\int \varrho\, d\tau$ definieren, wo $\tau$ das Volum der Figur, $d\tau$ ein Volumelement, $\varrho$ die Beschleunigung in einem Punkte dieses Elements ist, und das Integral sich über die ganze Figur erstreckt. Es sollen dann folgende Gesetze gelten:

1) Sind $F_1$ und $F_3$ zwei materielle Figuren, $\varrho_1$ und $\varrho_3$ die mittleren Beschleunigungen, wenn die beiden Figuren miteinander isoliert sind, so ist für jede Zeit $\varrho_1 = -q_{13}\varrho_3$, wo $q_{13}$ eine von der Zeit unabhängige positive Konstante sein soll, die nur von den beiden Figuren abhängt.
2) Hat man drei materielle Figuren, $F_1$, $F_2$, $F_3$, liefern $F_1$ und $F_3$ isoliert die Konstante $q_{13}$, $F_2$ und $F_3$ isoliert die Konstante $q_{23}$, so liefern $F_1$ und $F_2$ isoliert die Konstante $q_{13}/q_{23}$. Diese Eigenschaft erlaubt jeder materiellen Figur eine bestimmte, mit der Zeit nicht veränderliche Masse beizulegen, und, wenn $m_1$, $m_3$ die Massen von $F_1$ und $F_3$ sind, die Eigenschaft 1) zu schreiben $m_1\varrho_1 = -m_3\varrho_3$.
3) Hat eine materielle Figur $F$ mit andern $F_1$, $F_2$ ... der Reihe nach isoliert die mittleren Beschleunigungen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ so hat sie die mittlere Beschleunigung $\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots$, wenn sie mit allen isoliert ist.
4) Jeder Teil einer materiellen Figur ist wieder eine materielle Figur.

Aus diesen Annahmen folgt, dass die Masse dem Volumen einer materiellen Figur proportional ist, womit sich der Begriff der Dichte ergiebt. Die Begriffe der mittleren Beschleunigung und der Masse sind leicht auszudehnen auf Systeme von materiellen Figuren und dabei zeigt sich, dass die Eigenschaften 2) und 3) für solche Systeme ebenfalls gelten, selbst wenn deren Glieder verschiedene Dichten haben.

Nun wird die Annahme gemacht, dass die natürlichen Körper sich verhalten entweder wie ein System von materiellen Figuren, oder wie die Grenze, der sich ein solches System nähert, wenn die einzelnen Figuren unendlich klein werden. Nach dem früheren kann man dann von der mittleren Beschleunigung eines natürlichen Körpers sprechen, von seiner Masse, und von der Dichte in einem seiner Punkte. Das Parallelogrammgesetz wird ergänzt durch die Annahme, dass, wenn zwei miteinander isolierte natürliche Körper sich in ihrem natürlichen Zustande befinden,

oder mit mehreren physikalischen Agentien beladen sind (Schwere, Elektrizität u. s. w.), die mittlere Beschleunigung eines jeden Körpers sich berechnet als die Summe der mittleren Beschleunigungen, welche die natürlichen Zustände oder diese Agentien einzeln hervorbringen würden.

Ist nun in einem Punkte eines Körpers $\varrho$ die Beschleunigung, $k$ die Dichte, so heisst der Vektor $k\varrho$ in entgegengesetzter Richtung genommen, also $-k\varrho$, die spezifische Trägheitskraft im betreffenden Punkte und $\int \varrho k d\tau$ die bewegende Kraft des Körpers. Für die bewegenden Kräfte von zwei isolierten Körpern ergiebt sich aus den Hypothesen und Theoremen das Gesetz, dass sie entgegengesetzt gleich sind; und bei einem Körper, der mit mehreren andern isoliert ist, folgt für die bewegende Kraft das Parallelogrammgesetz.

Sind zwei Körper, die sich im natürlichen oder einem bestimmten physikalischen Zustand befinden, isoliert, ist die bewegende Kraft des einen durch den Vektor $r$ gegeben, und sind $m, m'$ die beiden Massen, so nähert sich, wie als Postulat angenommen wird, $\frac{r}{m m'}$ einer bestimmten Grenze $\varrho$, wenn die beiden Körper sich auf ihre Schwerpunkte zusammenziehen. Lässt man diesen Punkten die beliebigen Massen $\mu, \mu'$ entsprechen, so heisst $\mu\mu'\varrho$ die Elementarkraft, welche dem gegebenen physikalischen Agens zukommt und an einem der gegebenen Punkte wirkt. Die bewegende Kraft eines Körpers, der mit einem oder mehreren andern isoliert ist, drückt sich dann durch ein Integral von der Form $\int kR d\tau$ aus, das sich über den Körper erstreckt. Der Vektor $R$, der die beschleunigende Kraft in einem Punkte heisst, erscheint selbst als die Summe von zwei Integralen von Elementarkräften, von denen das eine sich auf den Körper selbst, das andere auf die übrigen Körper bezieht. Die Bewegungsgleichungen für einen einzelnen Punkt eines Körpers lassen sich dann aufstellen. Als zweites Postulat für die Elementarkraft wird angenommen, dass sie eine symmetrische Funktion der beiden Punkte ist, zwischen denen sie wirkt, und dass sie in die Richtung der Verbindungslinie fällt. Damit ergeben sich die sechs Bewegungsgleichungen, die aussagen, dass die Trägheitswiderstände den äusseren Kräften das Gleichgewicht halten würden, wenn der Körper starr wäre. Der Ausdruck materieller Punkt kommt nur hier und da als eine Abkürzung vor, die nirgend wesentlich ist.

Wenn man um einen Punkt eines Körpers herum ein unendlich kleines Stück herausschneidet, und dann die beschleunigende Kraft berechnet, die der übrige Körper auf jenen Punkt ausübt, bei Annahme einer bestimmten Elementarkraft, so ist die so berechnete Kraft die innere beschleunigende Grenzkraft, die jener Elementarkraft entspricht. Diese so definierte Kraft liefert bei jeder starren Bewegung des Körpers die Arbeit Null. Die im Innern eines Körpers herrschenden Drucke werden dann, genau wie in Kirchhoffs Mechanik, eingeführt durch die Bedingung, dass, für jeden

Teil des Körpers, die auf seine Oberfläche wirkenden Drucke, die inneren Grenzkräfte und die Trägheitskräfte sich das Gleichgewicht halten sollen, wenn der betrachtete Teil als starr angesehen wird.

Hiermit haben wir gezeigt, wie Maggi die Schwierigkeiten behandelt, die in den Grundbegriffen der Mechanik liegen. Die Strenge und Klarheit, die damit erreicht ist, hat freilich den pädagogischen Nachteil, dass man eine Reihe von trockenen Ausführungen durchmachen muss, bevor man im stande ist, einfache Aufgaben der Natur zu behandeln. Das Maggische Buch dürfte sich hiernach mehr für solche Studierende eignen, die einen weniger strengen Kursus der Mechanik schon absolviert haben.

Die Ausführungen der Theorie in Kinematik und Dynamik sind nicht wesentlich von denen anderer Lehrbücher, besonders von denen in Kirchhoffs Mechanik, verschieden. Nach einer kurzen mathematischen Einleitung wird auf etwa 100 Seiten die Kinematik mit den Unterabteilungen: Verrückungen (ohne Beziehung auf die Zeit), Bewegung (mit Rücksicht auf die Zeit), Geschwindigkeit, Beschleunigung behandelt. Die übrigen 340 Seiten sind der Dynamik gewidmet, deren erster Teil die Kapitel Masse und Kraft, allgemeine Eigenschaften der Bewegung, Schwere enthält, während der zweite die freien festen Körper, die Druckkräfte, die gefesselten festen Körper und die veränderlichen Körper betrachtet. Wie man sieht, bezieht sich der Hauptteil des Buches auf die festen Körper; doch sind die Grundgleichungen der Hydrodynamik und Elastizitätstheorie aufgestellt und auf eine Reihe von Aufgaben angewendet.

Die sehr sorgfältige und präzise Darstellung ist naturgemäss ziemlich ausführlich, und dementsprechend ist die Zahl der behandelten speziellen Aufgaben nicht so gross wie in anderen Lehrbüchern. Hervorzuheben ist noch die Aufmerksamkeit auf die Dimensionen der eingeführten Begriffe und dann vor allem eine Strenge der mathematischen Behandlung, wie ich sie bis jetzt in keinem Lehrbuche gefunden habe. Die Ausstattung des Buches nach Druck und Papier ist sehr gut.

J. Lüroth.

---

**Naturphilosophie als exakte Wissenschaft.** Mit besonderer Berücksichtigung der mathematischen Physik. Von O. Schmitz-Dumont. Mit vier Figurentafeln. Verlag von Duncker & Humblot. Leipzig 1895. Preis Mk. 12.

Wie schon aus dem Titel hervorgeht, behandelt dieses Werk nur zum Teil mathematische Gebiete. Seine Entstehung verdankt es allerdings geometrischen Betrachtungen, nämlich einer erkenntnistheoretischen Prüfung der Axiome. Was dasselbe von allen anderen Werken über diesen Gegenstand unterscheiden soll, ist die Behauptung, dass der Verfasser ohne jede Hypothesenbildung nicht nur in der Mathematik, sondern auch auf allen anderen Gebieten auskommen will, sodass z. B. der gewöhnlichen Mechanik eine logische Mechanik gegenübergestellt wird.

Der erste erkenntnistheoretische Abschnitt ist Topik der Begriffe benannt. „Darunter wird eine solche eindeutige Bestimmung aller im weiteren vorkommenden Begriffe verstanden, dass hinsichtlich der Bedeutung eines jeden einzelnen derselben ebensowenig eine Frage übrig bleibt, wie hinsichtlich aller Verhältnisse zwischen ihnen. Es wird hiermit für das allgemeine Begriffsgebiet die Aufgabe gestellt, welche beispielsweise für räumliche Gestaltungen durch die Grundbestimmungen der Geometrie als gelöst betrachtet werden kann. Sowie durch diese aus wenigen Bausteinen ein geschlossenes System aufgeführt wird, in welchem ein jedes räumliche Gebilde jedem anderen gegenüber bestimmt dasteht, so soll die Topik das Gleiche für das allgemeine Wissensgebiet leisten.“ Als Ausgangspunkt soll ein möglichst unbezweifelbarer Satz an die Spitze des Systems gestellt werden. Derselbe lautet: „Aussagen werden gemacht“, oder „Es wird gesprochen“. Hieraus wird geschlossen, dass allgemein eine formale Gliederung nach Subjekt und Objekt stattfinden muss. Diese Gliederung wird in den nächsten Abschnitten, in welchen einige Grundbegriffe der Erkenntnistheorie erklärt werden, durchzuführen versucht, so wird die Empfindung beispielsweise subjektiv als Gefühl, objektiv als Sinneseindruck bezeichnet. Das Denken ist die Thätigkeit, welche die Anordnung zwischen Subjekt und Objekt herstellt und die dem Empfinden eine Form giebt.

Auf dem logischen Gebiet ist das bestimmende Prinzip der Gegensatz. Das Setzen eines Begriffes erfordert gleichzeitig das Unterscheiden von allen übrigen. Es werden nun zwei Arten von Gegensatz unterschieden, der ausschliessende und der totale. Der ausschliessende tritt dann ein, wenn ein Begriff nur in zwei Unterbegriffe zerfällt: „Wenn die beiden Glieder des ausschliessenden Gegensatzes die weitere spezifische Bestimmung erhalten, dass sie durch Verbindung ihren beiderseitigen Inhalt aufheben, so wird ihr Verhältnis zu einander der aufhebende, volle, totale Gegensatz genannt.“ Dieser Begriff wird auch auf solche Fälle übertragen, in welcher der Gegensatz nicht ein rein logischer ist, sondern das gegenseitige Aufheben nur durch die Erfahrung gegeben wird. Nach ausschliessenden und totalen Gegensätzen soll die ganze Gliederung der Logik erfolgen. Das Mittel zur Erweiterung des Materials der Begriffe ist die logische Synthese, d. h. die Verbindung mehrerer Begriffe zu einem neuen und zwar werden hier zwei Formen unterschieden, die formale und die materiale Synthese. Die formale Synthese besteht in einer einfachen Aneinanderfügung der einzelnen Begriffe, wobei diese aber ihre Selbständigkeit behalten. Ein Beispiel hierfür bietet die Beschreibung eines Körpers durch Aufzählung seiner Eigenschaften. Die materiale Synthese ist die Verbindung zweier Begriffe zu einem vollständig neuen; auf welche Art eine solche Verbindung zu stande kommt und was für verschiedene Formen hierbei möglich sind, wird für ganz gleichgültig erklärt, weshalb auch eine Untersuchung über die verschiedenen Urteilsformen für überflüssig gehalten wird. Der Wert dieser Aufstellungen wird bei Besprechung des mathematischen Teiles zur Erscheinung kommen.

Die materiale Synthese wird durch die Formel $A = (a \cdot b)$, die formale durch $A = (a + b)$ bezeichnet, wobei die Klammern zum Zeichen der Synthese dienen. Diese Zeichen sind deshalb gewählt, weil der formalen Synthese in der Mathematik die Addition, der materialen die Multiplikation entsprechen soll. Aus diesen Formeln sollen die elementaren Begriffe des Denkens abgeleitet werden und zwar ist das erste Paar, welches hieraus erhalten wird „Verschiedenheit — Dieselbigkeit." Der Synthese wird die Analyse oder Beziehungssetzung gegenübergestellt, und diese entweder durch die Form:

$$a = A - b \quad \text{oder} \quad a = \frac{A}{b}$$

bezeichnet. Die abgeleiteten Kategorien, von denen je zwei unter einem Oberbegriff stehen, sind folgende:

| Oberbegriffe: | Unterbegriffe: |
|---|---|
| 1. Reiner Denkakt, | Setzung — Beziehung, |
| 2. Vergleichung, | Gleiches — Ungleiches, |
| 3. Zahl, | Einzelnes — Vieles, |
| 4. Maß, | Teil — Ganzes, |
| 5. Gegenstand. | Inhalt — Form. |

Auf diesen logischen Prinzipien soll nunmehr die gesamte Mathematik gegründet werden. Zunächst wird die mathematische Analysis behandelt. Ihren Ausgangspunkt bildet der Grössenbegriff. Die Grösse wird definiert als ein Ganzes von vielen gleichen Teilen. Es stecken in diesem Begriff die Kategorien: „Dieselbigkeit, Teilheit, Ganzheit, Vielheit." „Wird bei der Grösse von der qualitativen Bestimmung (Dieselbigkeit der gleichen Teile) abstrahiert, so ist jeder Teil ganz abstrakt als Einzelheit gesetzt (Einheit der Arithmetiker) und eine Vielheit solcher Einzelnen bildet die natürliche oder ganze Zahl." Die Sicherheit der Rechnungsoperationen beruht darauf, dass in denselben die logische Thätigkeit — die Bildung formaler und materialer Synthese — mit dem Zahl- resp. Grössenbegriff verbunden wird. „Die Vorzeichen sind Symbole für die Bildungsart der Synthese — Analyse, ob vorwärts oder rückwärts $+$, $-$ für die formale, $\times$, : für die materiale Synthese." Dementsprechend will der Verfasser auch nichts von negativen und irrationalen Grössen wissen. Es handelt sich nur um Operationszeichen, welche eine Anweisung geben, gewisse Thätigkeiten an den Grössendingen auszuüben. Überhaupt soll der Grössenbegriff nicht zur einzigen Grundlage der Mathematik genommen werden, um den logischen Schwierigkeiten, welche sich z. B. bei der Betrachtung imaginärer Potenzen ergeben, zu entgehen.

Neben der quantitativen auf Grössenbegriffen beruhenden soll eine qualitative Analyse eingeführt werden, welche auf der materialen Synthese beruht. Die Wahl des Grössenbegriffes als Grundlage ergiebt sich, wie der Verfasser selbst zugiebt, aus der Bestimmtheit der dadurch erhaltenen Definitionen; es wird also darauf ankommen, ob es gelingen wird, für die qualitative Betrachtungsweise dieselbe Bestimmtheit zu erlangen. Hierzu

soll der Verhältnisbegriff dienen, und eine Zahl als Verhältnis zu der Einheit definiert werden. Um auf diese Weise die Multiplikation unabhängig von der Addition abzuleiten, sagt er: „$x = 3 \cdot 5$ heisst: eine $x$ genannte Bestimmung soll gefunden werden, welche in sich die Eigenschaften der 3 und der 5 vereinigt.“ Eine solche Zahl zu finden ist aber in Wirklichkeit nicht möglich, denn was ist mit dem unbestimmten Worte die Eigenschaften der 3 gesagt. Es giebt ausser 3 keine Zahl, welche alle Eigenschaften der 3 in sich vereinigt. Was der Verfasser meint, ist ja leicht zu verstehen, die Zahl soll durch 3 und durch 5 und eben nur durch diese beiden teilbar sein. Diese Teilbarkeit soll durch den Verhältnisbegriff definiert werden, wobei aber der allgemein-logische Begriff Verhältnis = Beziehung mit dem mathematischen Verhältnis = Quotient verwechselt wird. Die Vieldeutigkeit eines Wortes hat also hier zu einem Irrtum Veranlassung gegeben. Es ist dies um so wunderbarer, als der Verfasser selbst oft vor solchen Fehlern warnt, die durch den Gebrauch von vieldeutigen Worten entstehen. Als Berechtigung für diese Betrachtungsweise wird auch darauf hingewiesen, dass ohne dieselbe physikalische Formeln, in denen verschiedenartige Grössen sich in einer Gleichung befinden, nicht verständlich wären; in Wirklichkeit handelt es sich auch hier nur um Vergleichungen von Zahlengrössen. Auf diese qualitative Analyse und das derselben zu Grunde liegende Schema soll auch die Potenzierung und deren Umkehrung zurückgeführt werden. Die Allgemeinform $A = (a \cdot b)$ geht in die Spezialform $A = a^b$ über und liefert als solche die drei Bestimmungen $A = a^b$ als Potenzausdruck, $a = \sqrt[b]{A}$ als Wurzel, $b = \log A$ als Logarithmus. Weil in dem logischen Schema nur zwei Operationen vorhanden sind, darum soll die Potenzierung nur eine eigentliche Umkehrung die Radizierung besitzen. Das Logarithmieren ist keine Rechenoperation, sondern der Logarithmus ist nur eine Stellziffer. Dieser Irrtum rührt von der gewählten Symbolik her. Es wird durch diese eine Verwechslung der logischen Analyse und der Umkehrung einer mathematischen Rechnungsart herbeigeführt. Die logische Analyse zerlegt ein Zusammengesetztes in seine einzelnen Bestandteile, die umgekehrte Rechnungsart ist dagegen eine neue Synthese; es soll eben zwischen den Ausdrücken $A$ und $b$ eine Verbindung hergestellt werden, die bestimmten Anforderungen entspricht, und es liegt gar kein Grund vor, die eine der beiden möglichen Verbindungen zu bevorzugen.

Für die imaginäre Grösse will der Verfasser eine neue Ableitungsweise geben, weil, wie er sagt, die Grössenlehre den Ausdruck $\sqrt{-1}$ in keiner Weise verständlich machen kann. Die logische Berechtigung der Einführung der imaginären Grösse kann hier ununtersucht bleiben, es kommt nur darauf an, ob der Verfasser an Stelle des von ihm Verworfenen etwas Besseres zu bieten vermag. Er geht von dem Begriff des Gegensatzes aus und zwar soll dieser Begriff mit dem anderen Begriff Gradreihe verbunden werden. Es soll eine Abstufung zwischen dem totalen Gegensatz:

$$\left(\frac{+1}{-1}\right)^1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{+1}{-1}\right)^0$$

der Aufhebung jenes Gegensatzes gebildet werden und als Gesetz der Abstufung dieses Gegensatzes wird die natürliche Zahlenreihe gewählt, sodass die eingeschobenen Glieder die Form:

$$\left(\frac{+1}{-1}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \left(\frac{+1}{-1}\right)^{\frac{2}{n}} \cdots$$

erhalten. Man kann unmöglich behaupten, dass auf diese Weise eine klare und brauchbare Definition der imaginären Grösse gegeben ist. Sehr bequem macht sich der Verfasser das Problem der Gleichungen. Er erklärt es einfach für sinnlos, von Gleichungen ohne Wurzeln zu reden, und darin liegt der logische Beweis, dass jede Gleichung eine Wurzel hat. Selbst wenn man sich auf diesen Standpunkt stellt, bleibt es doch ein berechtigtes Verlangen des Mathematikers, zu wissen, ob eine Gleichung, die in einem bestimmten Problem auftritt, zu den sogenannten sinnlosen oder vernünftigen gehört, und weil man dieses aus dem logischen Beweise nicht ersehen kann, so macht derselbe die mathematischen Wurzelbeweise keineswegs überflüssig. Eingehender werden die Gleichungen von der Form $x^m = B$ behandelt. Zur Kennzeichnung des Verfahrens wollen wir den Beweis, dass diese Gleichung $m$ Wurzeln hat, etwas ausführlicher angeben. „Das $x$ muss eine Bedeutung der Form $a + bi$ haben, wenn jenes eine Gleichung sein soll; also $x = a + bi$, kürzer $x \pm \alpha = 0$, ist das elementare Glied, aus dem jedwede andere $x$ enthaltende Gleichung hervorgehen muss. Sodann muss das $x^m$ aus $x$ durch irgend welche Operationen entstanden gedacht werden können, anderenfalls würde dem $x^m$ jede mögliche Bedeutsamkeit abgesprochen werden müssen. Es giebt nun keine andere Möglichkeit, das $x^m$ aus $x$ zu erzeugen, als durch $m$-fache Multiplikation des $x$ mit sich selbst. Demnach besteht jede Gleichung der Form $x^m = B$ oder $x^m - B = 0$ aus $m$ Faktoren der Form $x \pm \alpha$, in welchen $x$ überall dieselbe Bedeutung hat, während der Wert von $\alpha$ in jedem Faktor ein anderer sein kann; denn diese Verschiedenheit der Werte von $\alpha$ verhindert ja nicht, dass schliesslich ein $x^m$ zu stande kommt.“

Ebenso wird von diesem Standpunkte aus die Entwickelbarkeit jeder Funktion leicht bewiesen, denn andere Funktionen werden einfach für sinnlos erklärt. Bei der Ableitung der Differentialrechnung soll die Einführung von unendlich kleinen Grössen vermieden werden. Dieselbe soll vielmehr aus einem allgemeinen Prinzip hergeleitet werden. „Eine jede algebraische Form, sei sie nun entstanden durch Verbindung sogenannter Grössen mit Vorzeichen oder trete sie auf in weiteren Kombinationen als Summe, Differenz, Produkt, Quotient, Potenz oder sonstiges funktionales Verhältnis, giebt ausser ihrem möglichen quantitativen Werte als Zahl oder benannte Grösse auch eine spezifische Eigenschaft dieser Form an. Die systematische Auffindung und Klassifizierung dieser qualitativen Verschiedenheiten ist die eigentliche Aufgabe der Rechnung mit veränderlichen

Grössen, die von der Infinitesimalmethode unbewusst verfolgt wird." „Es handelt sich also darum, die gegenseitig bedingte Veränderung von $y$ und $x$ in den gewohnten Symbolen der Analysis so darzustellen, dass ihr Verhältnis zu einander als eine spezifische Eigenschaft, Charakter des Gebildes $A$, erscheine, und zwar in einer Form, die dem Algorithmus angepasst werden kann, sodass jene Eigenschaften zu benannten Grössen, Anzahlen von Einheiten bestimmter Qualität werden, als welche sie auch der quantitativen Vergleichung zugänglich sind." Die Ableitung wird nun nicht allgemein gegeben, sondern die Form $y = x^m$ zu Grunde gelegt und zur Verdeutlichung die entsprechende Kurve zu Hilfe genommen. Diese Gleichung soll nicht wie gewöhnlich die Kurve darstellen, sondern das von der Kurve und den Koordinaten begrenzte Flächenstück.

Bei dem Versuche, den Differentialquotienten abzuleiten, kommt der Verfasser auf die schon besprochene qualitative Analyse zurück. Wie schon gesagt, ist es ihm nicht gelungen, den Begriff des Quotienten unabhängig von dem Grössenbegriff zu definieren. Dasselbe trifft auch in Bezug auf den Differentialquotienten zu. Zur Erklärung dieser qualitativen Betrachtungsweise werden Eigenschaften der Kurve herangezogen, ohne dass aber eine strenge Ableitung derselben, unabhängig von Grössenbegriffen, gegeben wird. In der Integralrechnung soll die Auffassung des Integrals als eine Summe von unendlich vielen Gliedern vermieden werden. Es wird hervorgehoben, dass die Gleichung $y = f(x)$ selbst ein Flächenstück darstellt, daraus geht aber noch nicht hervor, weshalb $\int f(x)dx$ den Inhalt der Kurve $y = f(x)$ darstellt.

„In der Geometrie soll gezeigt werden, dass der Raumbegriff und die Grundbegriffe für Konstruktionen im Raume nicht nominal, sondern sachlich (den Inhalt der Begriffe darlegend) definiert werden können, sodass die wesentlichen Bestimmungen der Geometrie ebensogut wie die der Analysis aus dem einen allem Denken zu Grunde liegenden Satze ableitbar werden." Zunächst wird eine logische Definition des Begriffs Richtung gegeben. Als Gegensatz zu dem Begriff „diskret" wird der des „stetigen" aufgestellt, welcher aus der Empfindung besonders aus dem zeitlichen Verlauf der Vorstellungen abgeleitet wird. „Eine beliebige Anzahl in diskursiver Reihe zusammengestellter Setzungen $(a, b, c, d \ldots)$ heisst Punktreihe, wenn sie diskret, Linienreihe, wenn sie stetig gedacht werden soll," wobei es fraglich ist, wie man mit dem Vorhergehenden eine kontinuierliche Reihe vereinbaren kann. „Sind die Beziehungen zwischen allen aufeinander folgenden Elementen einander gleich, $a:b = b:c = c:d \ldots$, dann sind auch die Beziehungen $a:b = a:c = a:d$, denn die Grösse des Intervalls hat keinen Einfluss auf die Art der Beziehung, weil Grösse und Beziehung qualitativ verschiedene Begriffe sind. Diesen Fall, dass ein und dieselbe Beziehungsart alle Elemente der Reihe verbindet, benennt man gerade Reihe resp. gerade Linie." Die anfangs aufgestellte Behauptung ist insofern unklar, weil keine Definition der Beziehung gegeben wird, die unabhängig von der Grösse des Intervalls sein soll, was doch nicht bei

jeder Beziehung der Fall ist, und ausserdem ist dieselbe nicht im stande, eine Vorstellung der geraden Linie zu geben. Es werden nunmehr die von einem Punkt ausgehenden Richtungen untersucht, welche mit einer gegebenen den gleichen Richtungsunterschied haben. Es soll hierbei von der Raumanschauung ganz abgesehen werden und die Eigenschaften rein logisch aus dem Begriff einer Vielheit von Reihen mit gemeinsamen Ausgangspunkt entwickelt werden. Die Raumanschauung soll nur zur Verdeutlichung zu Hilfe genommen werden; das ist aber immerhin gefährlich, wenn eben geometrische Sätze unabhängig von derselben abgeleitet werden sollen. Der Richtungsunterschied, welchen die verschiedenen Linien zu der gegebenen haben, wird entsprechend der neuen Definition der imaginären Grösse mit $(-1)^{\frac{1}{n}}$ bezeichnet. Der Verfasser beweist nun, dass der Unterschied zweier solcher Richtungen nicht grösser als $(-1)^{\frac{2}{n}}$ sein kann und zwar auf folgende Weise: „$A\alpha : A\beta$ kann nie grösser werden als $(-1)^{2 \cdot \frac{1}{n}}$, denn dies Verhältnis muss der Bedingung:

$$A\alpha : Aa = Aa : A\beta = (-1)^{\frac{1}{n}}$$

genügen, d. h. in Bezug auf $Aa$ die Summe $(-1)^{\frac{2}{n}}$ geben“, und hieraus wird geschlossen, „dass zu jedem Richtungsunterschiede eine unbegrenzte Anzahl von verschiedenen Richtungen denkbar ist, die geometrisch dargestellt Kegelflächen bilden, deren gemeinsame Spitze in $A$ liegt; dass demnach alle denkmöglichen Richtungen von einem gemeinsamen Ausgangspunkte bestimmt werden durch Linien, welche die Punkte einer Kugelfläche mit deren Zentrum verbinden.“ Man sieht, welch' hervorragenden Anteil die Anschauung bei dieser Beweisführung hat. Es sollen nunmehr eine Reihe von geometrischen Axiomen aus den Definitionen abgeleitet werden.

1. „Die gerade Linie, die Bezeichnung einer Vielheit von Setzungen, deren Beziehungsart konstant bleibt, weshalb es die kürzeste sein soll.“ — Welcher logische Zusammenhang besteht zwischen konstanter Beziehung und kürzester Strecke?

2. „Die Ebene, d. h. das Gebilde, bestimmt durch den unmittelbaren Übergang einer Richtung in die andere, sodass drei beliebige Richtungen $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$ stets der Bedingung genügen $\frac{A\alpha}{A\beta} + \frac{A\beta}{A\gamma} = \frac{A\alpha}{A\gamma}$.“

3. „Die geschlossene Figur, d. h. vollständige Begrenzung eines Bereiches von Setzungen durch Linien. Eine solche Begrenzung ist nur möglich, wenn die begrenzenden Linien alle in der Ebene vorhandenen Richtungsunterschiede durchlaufen; deshalb besteht eine Figur mindestens aus drei geraden Linien, mit einer inneren Winkelsumme gleich dem Richtungsunterschiede des Totalgegensatzes. Dies ist der Beweis von der Summe der Dreieckswinkel $= 2R$, der nicht einmal des Parallelenbegriffs bedarf.“ Selbst wenn man diesen Argumentationen beistimmen würde, so

würde doch höchstens daraus folgen, dass die Winkelsumme mindestens $2R$ ist; es wäre aber nicht ausgeschlossen, dass sie $4R$ oder ein anderes beliebiges Vielfaches von $2R$ sei.

4. „Der Raum, d. h. die allseitige unbeschränkte Ausgedehntheit." Dieser Raum ist nicht eine beliebige ausgedehnte Mannigfaltigkeit, sondern „durch die Einführung des Totalgegensatzes sind die Richtungsreihen als eine spezifisch gestaltete Art solcher Mannigfaltigkeiten bestimmt. Diese spezifische Art der Beziehungen zwischen den Einzelsetzungen unserer Mannigfaltigkeit hat zur Folge, dass in ihr nur drei Richtungen zu einander den Richtungsunterschied $(-1)^{\frac{1}{2}}$ haben können, der Raum also in einem Punkte nur drei zu einander senkrechte Linien zulässt."

Sehr charakteristisch für die Ableitung geometrischer Sätze aus den logischen Grundprinzipien ist der Beweis von der Ausdrückbarkeit eines Flächeninhalts durch das Produkt zweier Längen. „Da das Gebilde $F$ ein einheitliches sein muss, nicht aus verschiedenartigen Teilen zusammengesetzt ist — in welchem Falle es der Bildungsweise $(a \cdot b)$ widersprechend eine formale Synthese wäre — so muss an jeder Stelle von $F$ sowohl die Bestimmung $a$ wie die von $b$ anzutreffen sein; an jeder von einem Punkte des $a$ bestimmten $F$ muss das ganze $b$, und an jedem von einem Punkte des $b$ bestimmten $F$ das ganze $a$ vorhanden sein. $F$ ist demnach ein Flächenintegral."

Die Absicht des Verfassers besteht darin, „den Raum, nicht wie bisher, als ein Gegebenes hinzunehmen, etwa wie ein Ding der Erfahrung, sondern als eindeutigen Begriff allseitiger Ausdehnung festzustellen," und hieraus seine Eigenschaften abzuleiten. Das Vorstehende wird wohl zur Genüge die Vergeblichkeit dieses Versuches gezeigt haben. Übrigens versteht es sich bei dieser Anschauungsweise von selbst, dass für metamathematische Spekulationen kein Raum ist.

Dasselbe Prinzip wie in der Geometrie wird auch in der Mechanik verfolgt, auch sie soll auf rein logischer Grundlage aufgebaut werden ohne Zuhilfenahme von Hypothesen. Deshalb kann sich der Verfasser nicht mit der Annahme verschiedener aus der Erfahrung entstandener Kräfte einverstanden erklären, noch weniger damit, dass man Axiome über dieselben aufstellt, wie z. B. das Kräfteparallelogramm. Sätze wie das Trägheitsgesetz und derjenige von der Erhaltung der Kraft sollen nicht aus der Erfahrung stammen, sondern werden als Denknotwendigkeit hingestellt. Der Kraftbegriff selbst wird aus der unmittelbar im Bewusstsein gegebenen Willenskraft abgeleitet und zunächst die Berechtigung bestritten, diesen Begriff auf tote Körper zu übertragen. Um die Mechanik zu einer ebenso rein deduktiven Disziplin wie die Geometrie zu gestalten, dürfen keine Elemente eingeführt werden, die nicht ebenso eindeutig bestimmt werden können wie die der Geometrie. Nicht Stoffe und Kräfte, sondern Zeit und Masse sind dafür am geeignetsten. Zur Erreichung einer vollständigen mathematischen Bestimmtheit ist die Zugrundelegung eines Systems von Punkten erforderlich.

Die Aufgabe der logischen Mechanik besteht darin, jeden Punkt des Systems mit jedem anderen in funktionale Verbindung zu setzen. Wenn überhaupt ein Kausalzusammenhang stattfinden soll, so muss die Anzahl der Punkte konstant sein, woraus dann allerdings ohne hinreichenden Grund geschlossen wird, dass auch die Summe aller auftretenden Veränderungen konstant sein muss.

„Alles was im Punktsystem geschehen kann, sind Veränderungen der Bewegungszustände und der Lage seiner Punkte.“ Zur Ableitung der Gesetze wird von einem System von zwei Punkten ausgegangen. Es soll rein logisch eine Beziehung zwischen der Geschwindigkeit und der Entfernung abgeleitet werden. Dafür, dass man die Leistung der Geschwindigkeit $= v^2$ setzt, wird folgendes angegeben: „Die doppelte Geschwindigkeit durchmisst die doppelte Raumstrecke in der gleichen Zeit der einfachen Geschwindigkeit, leistet das Doppelte in Bezug auf Ortsveränderung. Geschwindigkeiten sind aber nicht allein zu vergleichen nach dem, was sie thun, sondern wie sie es thun. Dasselbe Pensum in der halben Zeit vollendet ist eine doppelte Leistung. Die doppelte Strecke mit der doppelten Geschwindigkeit zurückgelegt ist demnach die vierfache Leistung.“ Die zweite Leistung der Geschwindigkeit folgt logisch aus der ersten; es ist deshalb kein Grund vorhanden, dieselbe bei der Aufstellung eines Maßes besonders zu berücksichtigen. Auch die Begründung dafür, dass $\frac{1}{r}$ als Maß der Gestaltsveränderung angenommen wird, ist nicht unbedingt überzeugend. „Bei der arithmetischen Auswertung der Gestalt, Bestimmung der Bedeutung einer Gestalt im mechanischen System nach einer Raumstreckeneinheit, hat man zu beachten, dass eine solche feste Streckeneinheit in jedem System eine andere Bedeutung hat, wenn die Gestalt sich um diese konstante Grösse ändert. In dem System $(a, b, 10)$ bewirkt die Veränderung 1 eine Veränderung der Gestalt um ein Zehntel, im System $(a, b, 5)$ die gleich grosse Streckeneinheit eine solche um ein Fünftel.“ Gemäss der vorerwähnten Behauptung, dass die Summe aller Veränderungen konstant ist, wird nun hieraus die Formel abgeleitet:

$$K = \frac{1}{r} + v^2,$$

die nach dem vorher Gesagten nicht als bewiesen betrachtet werden kann. Die Einführung von Kräften kann der Verfasser nicht entbehren. Aus der Formel $K = \frac{1}{r} + v^2$ wird geschlossen, dass, wenn die Geschwindigkeit grösser wird, auch die Entfernung sich vergrössert, also die Kräfte abstossend wirken. Am schärfsten kommt die Ansicht des Verfassers in folgendem Ausspruch zur Erscheinung. „Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen ist eine Konstruktion des Denkens, und zwar die einzig mögliche zur Herstellung einer allgemeinen Norm, die tauglich ist, Bewegungserscheinungen zu vergleichen, zu messen, allgemein zu beurteilen. Wir haben keine Furcht, dass je einmal eine Erfahrung gemacht werde, welche nicht dieser logischen Norm sich anbequemt.“

Auf der hier entwickelten Grundlage soll nun eine Theorie der gesamten Physik aufgebaut werden. Wenn dieselbe, wie aus dem Vorhergehenden folgt, nicht den Anspruch der absoluten Gewissheit erheben darf, sondern sich mit dem Titel der von dem Verfasser so sehr verabscheuten Hypothese begnügen muss, so würde sie ja darum noch nichts von ihrem Werte verlieren. Näher auf dieselbe einzugehen unterlassen wir deshalb, weil es an einer genügend mathematischen Beweisführung fehlt. Wenn sich nach dem Wunsche des Verfassers noch Generationen von Mathematikern mit der Ausarbeitung der Einzelheiten beschäftigen sollen, so müssen zunächst die Grundlagen unzweifelhaft festgelegt werden.

Der übrige Teil des Buches ist der Erörterung rein philosophischer Fragen gewidmet und fällt deshalb nicht in den Rahmen dieser Zeitschrift.

Max Meyer.

---

**Was ist Raum, Zeit, Bewegung, Masse? Was ist die Erscheinungswelt?** Von Julius von Olivier. Verlag von Louis Finsterlin. München 1895.

Die Einleitung der Arbeit bildet eine Bemerkung über die richtige Auslegung von Gleichungen, in welcher mit Recht hervorgehoben wird, dass bei allen Gleichungen zwischen ungleichartigen Grössen es sich nur um die Vergleichung von Zahlengrössen handelt. Hierauf folgt eine Darstellung einiger Sätze der Mechanik, welche die Wirkung der Anziehungskraft zur Grundlage nimmt. Den Ausgang bildet die Anziehung zweier Atome, welche als Anziehungselement bezeichnet wird. Wenn auch diese Abhandlung populär gehalten sein soll, und man daher an die Strenge der Beweise nicht zu grosse Anforderungen stellen darf, so hätten doch fehlerhafte und direkt irreführende Ausdrucksweisen vermieden werden können. So bemerkt der Verfasser: „Die Geschwindigkeit steht zur lebendigen Kraft in einem ähnlichen Verhältnisse wie eine Linie zu einem Körper." Es folgen Betrachtungen über die Bewegung der Planeten, Weltentstehung und Weltuntergang, bei denen der Phantasie grosser Spielraum gegeben ist. Nach einigen Bemerkungen über die Wirkung des Äthers und über das Prinzip von der Erhaltung der Kraft wird nun versucht, von den im Titel angegebenen Begriffen Erklärungen zu geben. In erster Linie steht der Begriff der Bewegung, seine Erklärung lautet: „Jede Veränderung der Kraft, in welcher Form sie auch auftreten mag, heisst Bewegung." Als eine wirkliche Definition kann man das wohl kaum bezeichnen, denn eine solche ist ohne Zuhilfenahme der Raumvorstellungen nicht zu geben. Hiermit hängt auch die von dem Verfasser gegebene Umformung des Beharrungsgesetzes zusammen. „Stehen die Kräfte, welche auf einen Körper wirken, fortlaufend im Gleichgewicht, so verharrt er in dem Zustande, in welchem er sich befindet; ist er in Ruhe, bleibt er in Ruhe, ist er in fortschreitender Bewegung, so ist diese geradlinig gleichförmig." „Das Wort Zeit vertritt die Stelle des unhandlichen Ausdrucks „das Fortschreiten der Bewegungen." Die Raumvorstellung wird in richtiger Weise in ihre zwei Grundelemente

zerlegt, in Entfernung und Richtung. Von der Entfernung wird aber im Grunde genommen weiter nichts gesagt, als dass sie eine Teilvorstellung der Kraft ist. Ebenso wird der Richtungsunterschied als Form der Wirkung mehrerer Kräfte definiert. Der Begriff der freien Kraft wird als Grundbegriff hingestellt. „Sie ist ununterbrochen bestrebt, sich selbst zu verkleinern, die Intensität der Kraft auf Kosten der Wegstrecke zu steigern und die steigende Intensität dieser Veränderung auf die beiden Atome zu übertragen.“ Ebenso wird die Masse als Quantität der Anziehungskraft erklärt. Das Atom ist ein Kraftzentrum, also jedenfalls als Punkt aufzufassen, trotzdem wird gelegentlich gesagt, dass das Körperatom grösser ist als das Ätheratom. Man sieht also, dass die Definitionen nicht zu streng aufgestellt sind.

Nachdem bis hier versucht wurde, alle Erscheinungen auf die Kraft zurückzuführen, wird sodann darauf hingewiesen, dass Realität nur dem Weltganzen zukomme und dass die vorhin betrachteten Begriffe als Teilvorstellungen keine selbständige Existenz besitzen. Im letzten Abschnitt wird auseinandergesetzt, dass die menschliche Erkenntnis nur auf die Erscheinungswelt beschränkt ist. Der Verfasser verwirft jede Art von Metaphysik und hebt hervor, welches Unheil derartige metaphysische Vorstellungen in Form von religiösen Dogmen angestiftet haben. Mit einer Aufforderung, die Moral einzig auf das Wohl der Menschheit zu begründen, schliesst die kleine Schrift.

Max Meyer.

---

**A Geometrical Treatment of Curves which are Isogonal Conjugate To A Straight Line With Respect To A Triangle.** In Two Parts. Part First. By I. J. Schwatt, Ph. D. University of Pennsylvania. Leach, Shewell And Sauborn. Boston, New-York, Chicago.

Zieht man von dem Eckpunkt eines Dreiecks zwei Linien, welche mit der von demselben ausgehenden Winkelhalbierungslinie gleiche Winkel bilden, so werden diese als isogonal konjugiert bezeichnet. Verbindet man einen Punkt mit den Eckpunkten des Dreiecks und construiert die zu diesen Linien konjugierten Strahlen, so schneiden dieselben sich in dem zu ersterem konjugierten Punkte. Die zu einer geraden Linie konjugierten Punkte bilden, da sie die Durchschnitte zweier projektivischer Strahlenbüschel sind, einen Kegelschnitt. Die den umschriebenen Kreisen entsprechenden Punkte liegen im Unendlichen und daraus ergiebt sich, dass die der geraden Linie entsprechende Kurve eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse sein muss, je nachdem die Linie den Kreis schneidet, ihn berührt oder mit ihm keinen Punkt gemeinsam hat. Alle diejenigen Hyperbeln, die einem Durchmesser konjugiert sind, sind gleichseitig. Unter den gleichseitigen Hyperbeln unterwirft der Verfasser diejenige einer besonderen Betrachtung, deren konjugierte Linie durch den Punkt geht, dessen Abstände von den Seiten sich wie die Seiten selbst verhalten, und zwar geht diese Untersuchung darauf aus, Punkte aufzufinden, die auf der Hyperbel liegen. Zunächst geht diese

Hyperbel, wie jede einer Geraden konjugierte Kurve, durch die Eckpunkte des Dreiecks; von den ferner auf derselben bestimmten Punkten mögen hier noch der Schwerpunkt und der Durchschnittspunkt der Höhen erwähnt werden. Der Mittelpunkt der Hyperbel liegt auf dem Feuerbachschen Kreise und die Asymptoten sind die Linien, welche die Fusspunkte der Lote von den Endpunkten des zugehörigen Durchmessers auf die Dreiecksseiten verbinden.

Unter den Ellipsen betrachtet der Verfasser diejenigen, die der Polare desjenigen Punktes in Bezug auf den umschriebenen Kreis konjugiert ist, dessen Abstände von den Seiten sich wie diese selbst verhalten. Wenn man die Schwerpunktstransversalen über die Mittelpunkte der Seiten verlängert und auf dieser Verlängerung die Stücke bis zum Schwerpunkte abträgt, so erhält man drei Punkte, die auf der Ellipse liegen. Hieraus folgt, dass der Schwerpunkt des Dreiecks der Mittelpunkt der Ellipse ist. Auch in Bezug auf den vierten Punkt, den die Ellipse mit dem Kreise gemeinschaftlich hat, werden einige Eigenschaften abgeleitet. Die Axen der Ellipse sind parallel den Asymptoten der im ersten Abschnitt behandelten Hyperbel. Den Rest des Buches nehmen Betrachtungen über die Eigenschaften des Dreiecks ein, die im nächsten Hefte zur Ableitung weiterer Eigenschaften der Ellipse benutzt werden sollen. Dieses soll ausserdem die Parabel und einige Kurven höherer Ordnung behandeln.

Max Meyer.

---

**Exercices Methodiques de Calcul Intégral.** Par M. Ed. Brahy. Docteur en Sciences Physiques et Mathématiques, Conducteur Honoraire des Mines, Ancien Professeur d'Athénée. Paris. Gauthier-Villars et fils. 1895.

Der Zweck dieses Buches ist, dem Schüler methodisch geordnete Übungen in der Integralrechnung darzubieten. Es schliesst sich an desselben Verfassers Werk über die Differentialrechnung an. In diesem Fall ist die Erreichung des Zweckes indessen schwieriger, weil die Integralrechnung nicht viel allgemeine Methoden besitzt. Im Anfang jedes Kapitels werden zunächst die für dasselbe notwendigen Lehrsätze kurz zusammengestellt, daran schliessen sich einige ausführlich durchgerechnete Exempel, auf welche sodann die eigentlichen Übungen folgen. Diesen sind überall die Resultate beigefügt und bei schwierigeren Aufgaben auch Andeutungen zu ihrer Lösung gegeben. Im ersten Kapitel werden zunächst die einfachsten Beispiele von Integrationen durch Umkehrung aus der Differentialrechnung bekannter Ausdrücke gegeben; darauf folgen Integrationen durch einfache Transformationen. Das dritte Kapitel bringt die partielle Integration, Kapitel 4 die Integration rationaler Funktionen. Hierbei ist vom methodischen Gesichtspunkt auffällig, dass der Verfasser die Zerlegung der Partialbrüche schon bei der Differentialrechnung behandelt hat, wo sie doch eigentlich keine rechte Verwendung findet. Die nächsten Kapitel bringen die bestimmten Integrale, die Inhaltsberechnung von Kurven und

Flächen. Auch aus dem Gebiet der Differentialgleichungen werden einzelne leicht verständliche Fälle behandelt. Den Schluss des Ganzen bildet die Integration durch Reihen.

MAX MEYER.

---

**Ableitung der verschiedenen Formen der Kurven dritter Ordnung** durch Projektion und Klassifikation derselben. II. (Die Kurven vom Geschlechte Null) von Professor Dr. FRIEDRICH KÖLMEL. Beilage zum Programm des Realprogymnasiums Mosbach für das Schuljahr 1894/95. Druck von C. Wagner, Mosbach.

Die dieser Abhandlung zu Grunde liegende Methode haben wir schon bei Besprechung des ersten Heftes auseinandergesetzt. In dem vorliegenden Hefte wird ganz in derselben Weise verfahren. Auch hier muss sich der Leser mit einer Aufzählung von Resultaten begnügen, ohne eine Ableitung derselben zu finden.

MAX MEYER.

---

H. BORK, **Mathematische Hauptsätze für Gymnasien.** Zweiter Teil. Pensum des Obergymnasiums (bis zur Reifeprüfung). Leipzig 1896. Dürr. 235 S. Mk. 2.40.

Dem vor Jahresfrist erschienenen ersten Teile dieses Buches, welcher das mathematische Pensum des Untergymnasiums umfasst, folgt dieser abschliessende zweite Teil mit dem Pensum des Obergymnasiums, welcher auch für Realgymnasien als geeigneter Leitfaden hingestellt wird.

Das Buch behandelt in fünf Abschnitten Planimetrie, Arithmetik, die Trigonometrie, die Stereometrie und schliesst mit einer Einleitung in die analytische Geometrie der Ebene.

Die Planimetrie enthält Hauptsätze aus der sogenannten neueren Geometrie, wie sie sich schon in den bekannteren Lehrbüchern vorfinden.

In dem einleitenden Kapitel der Arithmetik scheint dem Referenten nicht genügend scharf hervorgehoben, was Definition und was Gegenstand des Beweises ist. So spricht der Verfasser von einem Lehrsatze $a^0 = 1$. Der zweite Abschnitt bringt den Moivreschen Satz, den binomischen Lehrsatz für gebrochene Exponenten und Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade. Dagegen vermisst Referent ein Kapitel über die — beim praktischen Rechnen doch vornehmlich zur Anwendung kommende — numerische Auflösung von Gleichungen.

Der trigononometrische Abschnitt schliesst mit der Pothenotschen Aufgabe. Was die Additionstheoreme angeht, so werden sie in bekannter Weise unter Benutzung des Ptolemäischen Lehrsatzes hergeleitet. Referent hat schon mehrfach Veranlassung genommen, diesen schwerfälligen Weg, der den identischen Charakter jener Formeln verdeckt, als ungeeignet zu kennzeichnen.

Der vierte Abschnitt muss als wohlgelungen bezeichnet werden. Das Prinzip des Cavaleri wird da, wo es benutzt wird, auch bewiesen. Hervor-

gehoben zu werden verdient: ferner die Betrachtung über Vielflache sowie die Korrektheit der stereometrischen Figuren.

Das Buch soll als einziges Schulbuch für den mathematischen Unterricht den Schülern in die Hände gegeben werden. Nach der Ansicht des Verfassers ist eine gedruckte Aufgabensammlung entbehrlich. Demgemäss sind nur die „Fundamental-Aufgaben" in das Lehrbuch aufgenommen.

E. Jahnke.

---

H. Hartl, **Übungsbuch für den Unterricht in der allgemeinen Arithmetik und Algebra** an Werkmeisterschulen, Baugewerkenschulen und verwandten Lehranstalten. Ausgabe für Deutschland. Leipzig und Wien 1896. F. Deuticke. 160 S.

Diese Aufgabensammlung, welche dem lehrplanmässigen Umfange des Algebraunterrichts an Werkmeister- und Baugewerkenschulen entsprechen soll, unterscheidet sich von den bekannten Sammlungen nur durch den geringeren äusseren Umfang. Von den praktischen Beispielen, auf welche besonderes Gewicht gelegt wird, sind wenige neu.

Ein Anhang enthält die Resultate zu den Aufgaben.

E. Jahnke.

---

Th. Spieker, **Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie** mit Übungsaufgaben und einer kurzen Einleitung in die sphärische Astronomie für höhere Lehranstalten. Dritte verbesserte Auflage. Potsdam 1895. A. Stein. 156 S.

Die dritte Auflage dieses vortrefflichen Lehrbuches unterscheidet sich von der vorhergehenden einmal dadurch, dass das an sich schon reichliche Übungsmaterial um einiges vermehrt worden ist, zweitens durch einen Anhang, wo die wichtigsten Begriffe und Ausdrücke der sphärischen Astronomie erklärt werden.

E. Jahnke.

---

R. Schurig, **Katechismus der Algebra.** 4. Auflage. Leipzig 1895. J. Weber. 236 S. Mk. 3.

Der Herausgeber der neuen Auflage hat die rein katechetische Form der früheren Auflagen fallen lassen und in der vorliegenden eine recht brauchbare Darstellung des algebraischen Pensums, das bis zur Gleichung dritten Grades bezw. bis zur Zinseszinsrechnung reicht, geliefert. Ganz besonders dürfte sich der Katechismus zum Selbststudium eignen.

E. Jahnke.

---

H. Feukner, **Arithmetische Aufgaben.** Unter besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Physik und Chemie. Pensum der Obersekunda der neunstufigen Anstalten. 2. Auflage. Braunschweig 1895. O. Salle. Mk. 1.

Es ist ein auf Grund der preussischen Lehrpläne vom Januar 1892 etwas umgearbeiteter Auszug aus der 1. Auflage, welche an dieser Stelle schon ihre Besprechung gefunden hat.

E. Jahnke.

G. Mahler, **Leitfaden für den Anfangsunterricht in der Planimetrie** an Gymnasien, Lyceen, Lateinschulen und verwandten Anstalten. Stuttgart 1895. P. Neff. 73 S.

„Der Leitfaden besteht aus zwei Kursen; der erste (Lehre von den Winkeln und Parallelen) enthält das Pensum der fünften, der zweite (Kongruenz der Dreiecke, Lehre vom Viereck) das Pensum der sechsten Klasse eines württembergischen Gymnasiums. Der Umfang eines jeden Kursus ist so bemessen, dass er in etwa 33 Stunden (33 Wochen zu einer Stunde) durchgearbeitet werden kann."

E. Jahnke.

---

H. Köstler, **Leitfaden der ebenen Geometrie** für höhere Lehranstalten. 1. Heft. Kongruenz. 4. Auflage. Halle 1895. L. Nebert. 66 S. Mk. 1.25.

Der vorliegende erste Teil des aus drei Heften bestehenden Leitfadens der Geometrie enthält den Lehr- und Übungsstoff für die Quarta und Untertertia an Gymnasium und Realgymnasium, bietet aber weder in Form noch in Anordnung bemerkenswert Neues.

E. Jahnke.

---

Th. Spieker, **Lehrbuch der Stereometrie** mit Übungsaufgaben für höhere Lehranstalten. Potsdam 1895. A. Stein. 108 S.

Die vorliegende Bearbeitung des stereometrischen Pensums bietet reichen Stoff in knapper Form.

So handelt der fünfte Abschnitt ausser von dem Volumen der Kugel und ihrer Teile von den Figuren auf der Kugelfläche. Ein sechster Abschnitt bringt das Wichtigste über die Wechselschnitte des Cylinders und Kegels. In Abschnitt VII werden die Polyeder berechnet, wobei sich der Verfasser auf ein rechtwinkliges Axenkreuz stützt. Der Anhang giebt eine kurze Anleitung für die Auffindung der Maxima und Minima, erläutert an einigen stereometrischen Beispielen.

Für die Übungen der Schüler sind ferner ausser den üblichen arithmetisch-geometrischen Berechnungsaufgaben von Körpern und Oberflächen stereometrische Konstruktions- und Beweisaufgaben herangezogen. Für beide dieser Übungsfelder ist in den Anhängen ausreichendes Material beigegeben.

Bei der Vergleichung der Volumina der einfachen Körper giebt der Verfasser der Cavalierischen Methode den Vorzug.

Was den Beweis anbetrifft, welchen der Verfasser für den Eulerschen Polyedersatz vorträgt, so würde Referent jenem anderen, weit kürzeren den Vorzug geben, welcher von der Betrachtung ausgeht, dass sich jedes Polyeder aus lauter Tetraedern zusammensetzen lässt.

Zum Schluss sei noch die Richtigkeit und Anschaulichkeit der Figuren hervorgehoben.

E. Jahnke.

A. Schülke, **Vierstellige Logarithmentafeln** nebst mathematischen, physikalischen und astronomischen Tabellen. Leipzig 1895. B. G. Teubner. 18 Seiten.

Die vorliegende Tafel soll hauptsächlich den Bedürfnissen des Unterrichts Rechnung tragen. Demgemäss „sind die Logarithmen auf 4 Stellen angegeben; der Grad ist dezimal geteilt; die Proportionalteile und Differenzen sind überall fortgelassen, weil die Angabe derselben leicht zu mechanischem Rechnen führt. Die trigonometrischen Funktionen sind auf 3 bis 5 Stellen angegeben.“ Den Anforderungen der Hygiene hat der Verfasser besondere Aufmerksamkeit zugewendet. So sind die am meisten gebrauchten Werte — die Zinsfaktoren, die Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Funktionen — nacheinander auf sechs Seiten streng systematisch geordnet.

E. Jahnke.

G. Holzmüller, **Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik.** Gymnasialausgabe. Erster Teil, im Anschluss an die preussischen Lehrpläne von 1892 nach Jahrgängen geordnet und bis zur Abschlussprüfung der Untersekunda reichend. Leipzig 1896. B. G. Teubner. 228 Seiten.

Es ist eine besondere, für Gymnasien berechnete Ausgabe des methodischen Lehrbuches der Elementarmathematik, worüber an dieser Stelle bereits referiert worden ist.

E. Jahnke.

**Oeuvres de Fermat**, publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry. Tome III. Paris 1896. Gauthier-Villars et fils.

Im dritten Bande, dem umfangreichsten von allen, giebt uns Paul Tannery zunächst (S. 1—274) eine französische Übersetzung der lateinisch geschriebenen Abhandlungen Fermats und der Observationes in Diophantum. Daran schliesst sich (S. 277—321) die Übersetzung derjenigen Briefe und Bruchstücke von Briefen aus Fermats Briefwechsel (Bd. II der neuen Ausgabe), die in einer anderen als der französischen Sprache abgefasst sind.

Diese Übersetzung war mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden, da es darauf ankam, sich dem Text möglichst genau anzuschliessen, ohne doch durch allzu sklavisches Festhalten der alten Symbole und Ausdrücke das Verständnis zu erschweren und diejenigen, welche wegen ungenügender Kenntnis des Lateinischen zur Übersetzung greifen, abzuschrecken. Wie Tannery in der Vorrede darlegt, würde er persönlich es vorgezogen haben, die Übersetzung neben den Text zu stellen, aber die mit der Ausgabe betraute Kommission hat beschlossen, die Übersetzung gesondert zu geben, und dadurch ist das Studium der Korrespondenz Fermats den auf die Übersetzung Angewiesenen recht unbequem gemacht; sie müssen nicht selten, um einen Brief zu lesen, den zweiten und den dritten Band benutzen.

Das grösste Verdienst hat sich Tannery jedenfalls durch die Übersetzung der unter dem Titel „Doctrinae analyticae inventum novum“ in der 1670 von Samuel Fermat besorgten Diophant-Ausgabe abgedruckten

Arbeit des Jesuitenpaters Jacobus de Billy erworben. In dieser Arbeit entwickelt Billy die Theorie der sogenannten doppelten und dreifachen Gleichungen, und zwar auf Grund von brieflichen Mitteilungen Fermats. Von diesen Briefen ist leider nur ein einziger (No. CII, Bd. II, S. 436) erhalten, den Billy Bd III, S. 352 benutzt. Da nur die Grundgedanken des Inventum novum von Fermat gegeben sind, das Werk selbst aber in der Fassung, wie es vorliegt, von einem weit weniger bedeutenden Mathematiker herrührt, so war eine durchaus freie, nur den Inhalt klar wiedergebende Übersetzung am Platze, die Arbeit des Übersetzens also eine weit leichtere. Dafür waren aber eine ganze Reihe dem Billy, nicht Fermat zur Last fallende Fehler zu berichtigen, resp. anzugeben, und dieser Mühe hat sich Tannery mit solchem Erfolge unterzogen, dass auch diejenigen, denen die Originalarbeit sprachlich keine Schwierigkeit bereiten würde, besser thun werden, sich an Tannerys Übersetzung (S. 323—398) zu halten.

Der Schluss des Bandes (S. 399—602) enthält die französische Übersetzung der englisch und der lateinisch geschriebenen Briefe des Commercium epistolicum von John Wallis; in betreff der französisch abgefassten wird wieder auf den zweiten Band verwiesen. Dieser Briefwechsel war durch die bekannten von Fermat im Jahre 1657 an die fremden, besonders die englischen Mathematiker gerichteten wissenschaftlichen Herausforderungen veranlasst. An dem Streit, der auch einen nationalen Hintergrund hatte, waren ausser Fermat und de Frenicle auf der einen, Lord Brouncker und John Wallis auf der anderen Seite auch Franziscus Schooten und Th. White beteiligt. Die Parteien korrespondierten nicht direkt miteinander, sondern sandten ihre Briefe zur Mitteilung an die Gegner dem in Paris wohnenden englischen Edelmann Kenelm Digby. Es sind im ganzen 47 Briefe von teilweise sehr grossem Umfang. Dieselben wurden 1658 von Wallis veröffentlicht; einen zweiten Abdruck enthält der zweite Band der Werke von Wallis (1693). In dem Briefe XLIV (an Digby) hatte Wallis gewissermaßen das Fazit der Korrespondenz gezogen und dabei vielleicht allzu selbstbewusst sich als Sieger hingestellt. Während des Druckes erhielt er ein anerkennendes Schreiben Fermats, und nun rühmt er seinerseits die Bedeutung des Gegners. So scheint alles unter gegenseitigen freundlichen Verbeugungen der Kämpfer zu enden; aber eine wahrscheinlich von de Frenicle verfasste, jedenfalls von demselben angeregte anonyme Entgegnung auf das Commercium, die sehr selten ist, und die Tannery im Original und in Übersetzung giebt, lässt erkennen, dass doch noch ein Stachel zurückgeblieben ist, dass die höflichen, anerkennenden Worte einfach Phrasen sind. In dieser Entgegnung wird zunächst auf das Unstatthafte einer Veröffentlichung von Briefen ohne Erlaubnis, ja sogar ohne Wissen der Schreiber hingewiesen. Nur die Liebe zum Vaterland und der Wunsch, den Ruhm desselben zu verbreiten, entschuldige ein solches Vorgehen. Übrigens sei, so wird dann im einzelnen dargelegt, dieser Zweck nur unvollkommen erreicht und der Sieg der Engländer recht zweifelhaft.

G. Wertheim.

Frolow, Michael, **Démonstration de l'axiome XI d'Euclide.** Paris 1896. Gauthier-Villars et fils. 22 S. und 1 Tafel.

Da der Verfasser ausdrücklich erklärt, dass er nur für Leser schreibt, „die nicht von den nicht-euklidischen Ideen angesteckt sind", so will ich mich einmal auf seinen Standpunkt stellen und fragen, ob denn wirklich „die Ordnung der Theoreme", die er vorschlägt, „die Grundlagen, auf denen die elementare Geometrie beruht, unangreifbar macht."

Frolows Beweis lässt sich so darstellen. Man konstruiere über einer beliebigen Grundlinie $AC$ ein Dreieck $ABC$ mit den Winkeln:

$$BAC = \varphi < 90^0 \quad \text{und} \quad ACB = 90^0 - \varphi$$

und nach der anderen Seite von $AC$ ein Dreieck $ADC$ mit den Winkeln:

$$ACD = \varphi \quad \text{und} \quad CAD = 90^0 - \varphi.$$

In dem Viereck $ABCD$ sind dann die Gegenseiten gleich, und die Winkel bei $A$ und $C$ sind Rechte. Könnte man beweisen, dass auch einer der beiden einander gleichen Winkel bei $B$ und $D$ ein Rechter ist, so wäre die Existenz eines Rechteckes und damit bekanntlich auch das elfte Euklidische Axiom dargethan. Diesen Nachweis versucht Frolow apagogisch zu führen, indem er zeigt, dass die Annahmen, der Winkel bei $B$ sei spitz oder stumpf, beide auf einen Widerspruch führen. Es wird genügen, den Beweis für einen spitzen Winkel bei $B$ zu analysieren.

Man verlängere $BC$ beliebig bis $S$, $AD$ beliebig bis $T$ und mache in der Figur $SBAT$ folgende Konstruktion. Von $A$ fälle man auf $BS$ das Lot $AB_1$, von $B_1$ auf $AT$ das Lot $B_1A_1$, von $A_1$ auf $BS$ das Lot $A_1B_2$ u. s. w. Es ergeben sich so auf $AT$ der Reihe nach die Punkte:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_n.$$

Liegt nun der Punkt $D$ zwischen den Punkten $A_n$ und $A_{n+1}$, so lässt sich in aller Strenge beweisen, dass der Winkel $ADC$ notwendig stumpf ist, während doch die Winkel bei $B$ und $D$ einander gleich sein müssen. Die Annahme, der Winkel bei $B$ sei spitz, führt mithin auf einen Widerspruch.

Es ist leicht zu erkennen, welches „implicite Postulat" in dieser Deduktion enthalten ist. Der Punkt $D$ soll notwendig zwischen den Punkten $A_n$ und $A_{n+1}$ liegen oder, mit anderen Worten, jene Konstruktion von Loten soll schliesslich über jeden Punkt $D$ auf $AT$ hinausführen, der vor dem etwa vorhandenen Schnittpunkte von $AT$ und $BS$ liegt. Dass diese Behauptung keineswegs selbstverständlich ist und im Gegenteil eines Beweises bedarf, zeigt folgende einfache Betrachtung. Man nehme zwei sich nicht schneidende Gerade im Raume und führe bei ihnen die entsprechende Konstruktion aus, fälle also von einem Punkte $A$ der ersten Geraden das Lot $AB_1$ auf die zweite Gerade, von $B_1$ das Lot $B_1A_1$ auf die erste u. s. w.

Man beweist dann ohne Mühe, dass die Lote $A_n B_{n+1}$ bei fortgesetzter Konstruktion dem gemeinschaftlichen Lote $PQ$ der beiden Geraden beliebig nahe kommen, und hieraus folgt, dass in diesem Falle die Punkte $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ sämtlich auf der endlichen Strecke $AP$ liegen. Man kommt also niemals über den Punkt $P$ hinaus.

Warum ist es in der Ebene anders? Wer darauf antwortet: Weil es sich um zwei gerade Linien in der Ebene handelt, der hat die Verpflichtung zu zeigen, dass diese Eigenschaft der Ebene eine logische Folge der Definition der Ebene ist. Dass ein solcher Nachweis unmöglich ist, das bewiesen zu haben ist ein Verdienst der von dem Verfasser als Skeptiker und Sophisten bezeichneten Nichteuklider, deren Schriften ihm zu gründlicherem Studium empfohlen seien.

Historisch möge noch bemerkt werden, dass jene Behauptung in betreff des Punktes $D$ bereits von Malezieu (Élémen. de Géométrie. Paris 1715) und von Karsten (Mathesis theoretica elementaris atque sublimior, Rostock und Greifswald 1760) zum Beweise für das elfte Axiom benutzt worden ist, und dass schon Klügel (Conatuum praecipuorum theorema parallelarum demonstrandi recensio. Dissertation. Göttingen 1763, § VII und § VIII) die Unzulässigkeit dieses Verfahrens in durchaus zutreffender Weise dargethan hat.

Stäckel.

---

Crivetz, Théodore, **Essai sur le postulat d'Euclide.** Bukarest 1895. 8⁰. 40 S.

Während die Überzeugung von der Unmöglichkeit der algebraischen Quadratur des Zirkels bereits in weitere Kreise gedrungen zu sein scheint, vergeht kein Jahr, ohne dass das Parallelenaxiom neue Opfer erfordert; es wäre dringend zu wünschen, dass der oft nicht geringe Fleiss und Scharfsinn, den diese der Natur der Sache nach vergeblichen Versuche zeigen, nützlicheren Gegenständen zugewandt würde.

Um zu beweisen, dass die Annahme: die Summe der Winkel des Dreiecks sei kleiner als zwei Rechte auf einen Widerspruch führe, entwickelt der geometrisch nicht unbegabte Verfasser eine Reihe von Folgerungen, ungefähr in der Art, wie das Saccheri (1733) und Lambert (1766) gethan haben; von der umfangreichen Litteratur über den Gegenstand scheint er übrigens nur das Lehrbuch von Rouché et Comberousse zu kennen. Seine Beweise sind zwar umständlich, aber richtig, — bis auf den Beweis des letzten, entscheidenden Theorems. Hier wird ohne jede Begründung behauptet: Zieht man durch einen Punkt $F$ ausserhalb einer Geraden $AB$ irgend eine Gerade $FL_2$, so lässt sie sich stets als Tangente an eine der zu $AB$ äquidistanten Linien auffassen. Damit ist man freilich auf einen Widerspruch gekommen, aber jene Annahme über die Winkelsumme ist daran unschuldig.

Stäckel.

H. Demartres. **Cours d'Analyse.** Redigé par M. E. Lemaire. Troisième Partie. Equations différentielles et aux Dérivées Partielles. Paris, A. Hermann. 156 p.

Über die beiden vorangegangenen Hefte des Lehrbuches von Demartres ist in dieser Zeitschrift Bd. 40 p. 93 berichtet worden. Das vorliegende dritte und letzte Heft enthält eine Einleitung in die Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, sowie der Variationsrechnung.

Gemäss der praktischen Tendenz des ganzen Werkes legt der Verfasser die einzelnen Integrationstheorien dar, wie sie die ältere Schule entwickelt hat, wenn er auch hier und da neuere Fortschritte (Transformationsgruppen u. a.) streift. Die französischen Autoren treten stark in den Vordergrund.

Von allgemeinen Existenzbeweisen findet man wenig; umsomehr ist auf geometrische Anwendungen und Illustrationen Bedacht genommen worden. Der Anhang über Variationsrechnung geht über die ersten Elemente nicht hinaus. Im ganzen erfüllt das Werk seinen Zweck, als Leitfaden für Vorlesungen zu dienen.

W. Fr. Meyer.

# Bibliographie

vom 19. August bis 14. Oktober 1897.

---

### Periodische Schriften.

Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1891. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 47. Jahrgang. 2. Abteilung. Physik des Äthers. Redigiert von RICHARD BÖRNSTEIN. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 30.

—— Dasselbe im Jahre 1896. 52. Jahrgang. 1. Abteilung. Physik der Materie. Redigiert von RICHARD BÖRNSTEIN. Ebenda. M. 20.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, für 1896. Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen an der Station I. Ordnung Aachen und deren Nebenstationen im Jahre 1896. Herausgegeben von Dir. P. POLIS. II. Jahrgang. Karlsruhe, Braun. M. 5.

Publikationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 36. XI. Bds. 3. Stück. WILSING, J., Untersuchungen über die Parallelaxe und die Eigenbewegung von 61 Cygni nach photographischen Aufnahmen. Leipzig, Engelmann. M. 4.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 32. Jahrgang. 1. und 2. Heft. Leipzig, Engelmann. à M. 2.

Veröffentlichungen des königlich preussischen meteorologischen Instituts Herausgegeben durch Dir. WILH. VON BEZOLD. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen zweiter und dritter Ordnung im Jahre 1893, Zugleich deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1893. Beobachtungssystem des Königreichs Preussen und benachbarter Staaten Berlin, Asher & Co. M. 9.

—— Dasselbe. Ergebnisse der Gewitterbeobachtungen in den Jahren 1892, 1893, 1894. Ebenda. M. 3.

### Geschichte der Mathematik und Physik.

POGGENDORFFS Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. 3. Band. 10. und 11. Lieferung. Leipzig, Barth. à M. 3.

HAENTSCHEL, C., Über die verschiedenen Grundlegungen in der Trigonometrie. Eine historisch-kritische Studie. Leipzig, Dürr. M. —. 40.

## Reine Mathematik.

Opus palatinum. Sinus- und Cosinus-Tafeln von 10″ zu 10″. Herausgegeben von Professor Dr. W. Jordan. Hannover, Hahn. M. 7.

Molke, Roman, Über diejenigen Sätze Jacob Steiners, welche sich auf die durch einen Punkt gehenden Transversalen einer Kurve $n^{ter}$ Ordnung beziehen. Dissertation. Breslau, Schletter. M. 1.

Pyrkosch, Rhold., Über Ponceletsche Dreiecke, besonders solche, welche konfokalen Kegelschnitten ein- und umgeschrieben sind. Dissertation. Breslau, Schletter. M. —. 80.

Rothe, Rud., Untersuchungen über die Theorie der isothermen Flächen. Dissertation. Berlin, Mayer & Müller. M. 2.

Klein, F., Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie. I. und II. Vorlesung. I. Gehalten im Wintersemester 1895/96. Ausgearbeitet von A. Sommerfeld. II. Gehalten im Sommersemester 1896. Ausgearbeitet von A. Sommerfeld und Th. Furtwängler. Göttingen. (Leipzig, B. G. Teubner.) M. 14. 50.

Dirichlets, G. Lejeune, Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften von L. Kronecker. Fortgesetzt von L. Fuchs. 2. (Schluss-) Band. Berlin, Reimer. M. 18.

Scheffler, Herm., Vermischte mathematische Schriften; enthaltend:

1. Zusätze zur Theorie der Gleichungen.
2. Die quadratische Zerfällung der Zahlen.
3. Die Phönixzahlen.

Braunschweig, Wagner. M. 2.

Sachs, J., Lehrbuch der ebenen Elementargeometrie (Planimetrie). 8. Teil: Die Anwendung der Ähnlichkeit auf die Lehre vom Kreis. Bearbeitet nach System Kleyer. Stuttgart, Maier. M. 5.

## Angewandte Mathematik.

Landestriangulation, die königlich preussische. Hauptdreiecke. 9. Teil.

A) Die rheinisch-hessische Dreieckskette.
B) Das Basisnetz bei Bonn.
C) Das niederrheinische Dreiecksnetz.

Gemessen und bearbeitet von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme. Berlin, Mittler & Sohn. Kart. M. 15.

Schreiber, O., Die konforme Doppelprojektion der trigonometrischen Abteilung der königlich preussischen Landesaufnahme. Formeln und Tafeln. Herausgegeben von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme. Berlin, Mittler & Sohn. Kart. M. 3.

Wilczynski, E. J., Hydrodynamische Untersuchungen mit Anwendungen auf die Theorie der Sonnenrotation. Dissertation. Berlin, Mayer & Müller. M. 2.

Gümbel, L., Das Stabilitätsproblem des Schiffsbaues. Berlin, Siemens. M. 2. 40.

Dreiecksnetz, das schweizerische (der internationalen Erdmessung). Herausgegeben von der schweizerischen geodätischen Kommission. 7. Band. MESSERSCHMITT, J. B., Relative Schwerebestimmungen. 1. Teil. Zürich, Fäsi & Beer. M. 10.

Veröffentlichung des königlich preussischen geodätischen Institutes. KÜHNEN, FR., Die Neumessung der Grundlinien bei Strehlen, Berlin und Bonn, ausgeführt durch das geodätische Institut. Unter Mitwirkung von R. SCHUMANN bearbeitet. Berlin, Stankiewicz. M. 9.

BOLTZMANN, LUDW., Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik. (In drei Teilen.) I. Teil enthält die Prinzipe, bei denen nicht Ausdrücke nach der Zeit integriert werden, welche Variationen der Koordinaten oder ihrer Ableitungen nach der Zeit enthalten. Leipzig, Barth. M. 6.

## Physik und Meteorologie.

MEYN, RICH., Die absoluten mechanischen, kalorischen, magnetischen, elektrodynamischen und Licht-Maßeinheiten, nebst deren Ableitungen, wichtigsten Beziehungen und Meßmethoden, mit einem Anhang nichtmetrischer Maße. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 1.

THOMSON, J. J., Elemente der mathematischen Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Deutsche Ausgabe von Professor GUST. WERTHEIM. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 8.

MILLER, ANDR., Das magnetische Kraftfeld eines bipolaren Stabes. Programm. München, Kellerer. M. 1.

DRUDE, P., Über Fernewirkungen (Referat). [Beilage zu den Annalen der Physik und Chemie, neue Folge, 62. Band.] Leipzig, Barth. M. 1.

WARBURG, EMIL, Lehrbuch der Experimentalphysik für Studierende. 3. Auflage. Freiburg i. B., Mohr. M. 7, geb. M. 8.

# Historisch-litterarische Abteilung.

## Rezensionen.

**Hermann Grassmanns Gesammelte mathematische und physikalische Werke.** Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren: JACOB LÜROTH, EDUARD STUDY, JUSTUS GRASSMANN, HERMANN GRASSMANN der Jüngere, GEORG SCHEFFERS herausgegeben von FRIEDRICH ENGEL. I. Band. II. Teil. Die Ausdehnungslehre von 1862. Leipzig 1896, B. G. Teubner. VIII und 512 S. 8⁰. Mk. 16.

Der erste Halbband der Gesamtausgabe von Grassmanns mathematischen und physikalischen Werken ist gelegentlich einer historischen Studie über diese Werke im zweiten Hefte des 41. Bandes dieser Zeitschrift besprochen worden. Der vorliegende zweite Halbband, der programmmässig die „Ausdehnungslehre von 1862“ bringt, ist ein Jahr später erschienen, als in der Vorrede zum ersten in Aussicht genommen war. Diese Verzögerung wird jeder begreifen, der die Schwierigkeiten kennt, welche gerade dieses Werk Grassmanns schon dem Verständnis bereitet, geschweige der kritischen Durcharbeitung, wie sie beim Neuerscheinen eines in der Originalausgabe nur in engen Kreisen bekannt gewordenen Werkes* am Platze war. Man kann aber die Verzögerung auch nicht bedauern, wenn man sieht, welche Fülle gewissenhaftester und exaktester Arbeit an diesem Werke von den Herausgebern geleistet worden ist, und wie diese Arbeit den Erfolg gehabt hat, dasselbe auch vom Standpunkte modernster Kritik aus inhaltlich als das bewundernswerte Kunstwerk anzuerkennen, als welches es bisher den Wenigen galt, denen die Originalausgabe näher bekannt war. — Beteiligt haben sich hierbei die Herren Engel und H. Grassmann der Jüngere zunächst durch allseitige Revision des Textes und, wo es nötig schien, durch kleine redaktionelle Änderungen, die, wie im ersten Halbbande, überall als solche erkennbar gemacht und in einem besonderen Verzeichnis den ursprünglichen Lesarten gegenübergestellt sind. Dasselbe gilt von einigen, die Umstellung von Paragraphen, Hinzufügung erklärender Zusätze und Fortlassung einer nicht verständlichen Anmerkung betreffenden

---

* Dasselbe war nur in 300 Exemplaren, beiläufig auf Grassmanns eigne Kosten, gedruckt worden.

Änderungen. Zu dieser Arbeit lieferte eine Reihe von Bemerkungen des Herrn Study einen wertvollen Beitrag. Während so durch Gestaltung des Textes für das unmittelbare Verständnis jede zweckmässig scheinende Hilfe geleistet ist, haben die Herren Herausgeber, in tieferer Erfassung ihrer Aufgabe, dem Werke einen nicht weniger als 100 Seiten umfassenden Anhang hinzugefügt, der in der Form von Anmerkungen kritischer und erklärender Natur sich mit der in dem Werke niedergelegten Theorie selbst beschäftigt, Dunkelheiten des Textes aufklärt, Andeutungen ausführt, kleine Lücken ausfüllt, naheliegende wichtige Folgerungen zieht, kleine Versehen richtig stellt, Mängel in Beweisen beseitigt, auch hier und da den Zusammenhang oder die Identität Grassmannscher Sätze mit später anderweitig gefundenen Resultaten feststellt. Diese Anmerkungen liefern nicht nur einen überaus wertvollen und willkommenen Beitrag zum Verständnis des ganzen Werkes und seiner Einzelheiten, sondern geben auch implizite Aufschlüsse über die hervorragende Kraft und Bedeutung der spezifisch Grassmannschen Methoden, indem sie vielfach, wenn auch unabsichtlich, an dem Maßstabe dieser Methoden und der durch sie erzielten Resultate die herkömmlichen Schulmethoden messen. — Verschiedentlich erfährt das Grassmannsche System durch diese Anmerkungen eine inhaltliche Bereicherung, an anderen Stellen ergeben sich von selbst Anregungen zur weiteren Ausgestaltung desselben. In dieser Hinsicht mögen einige wichtigere Ergebnisse im folgenden besonders hervorgehoben werden.

Die Frage, unter welcher Bedingung in einem Hauptgebiete $n^{\text{ter}}$ Stufe eine Grösse $A$ von $m^{\text{ter}}$ Stufe $(1 < m < n - 1)$ einfach ist, hat Grassmann in der $A_2$ nicht beantwortet. Hier nun wird das Kriterium gegeben, dass $A$ mit jeder einfachen Grösse $(n - m + 2)^{\text{ter}}$ Stufe multipliziert eine einfache Grösse zweiter Stufe liefern muss. — Der Begriff der Zurückleitung, für den die geometrischen Anwendungen in der $A_2$ fehlen (und den infolgedessen Hagen in seiner „Synopsis der höheren Mathematik" als dunkel bezeichnet), wird in geometrischem Gewande ausführlich diskutiert, wobei sich unter Beziehung der kombinatorischen Multiplikation auf den Raum als Gebiet vierter Stufe acht Fälle der Zurückleitung ergeben. — Auch den beiden Grassmannschen Auflösungsmethoden von $n$ linearen Gleichungen werden für den Fall $n = 3$ geometrische Deutungen gegeben. — Der Begriff „allseitig normal" wird erläutert und in seiner Bedeutung klar gestellt durch Hinzufügung einiger Sätze, von denen der wichtigste aussagt, dass, wenn zwei Gebiete allseitig zu einander normal sind, jede Grösse des einen Gebiets zu jeder Grösse des andern normal ist. — Bei den Sätzen, welche Grössen erster Stufe im Hauptgebiete $n^{\text{ter}}$ Stufe betreffen, wird bemerkt, dass eine Reihe derselben noch richtig bleibt, wenn man sie durch Grössen $(n - 1)^{\text{ter}}$ Stufe ersetzt. Dies kommt für $n = 4$ auf die Vertauschung von Punkt- mit Ebenen-Koordinaten hinaus. — Einen grösseren Raum beansprucht die Anwendung und spezielle Durchführung der allgemeinen Theorie der geometrischen Verwandtschaften auf die Kollineation des Raumes. Es ergeben sich dabei je nach dem Auftreten einfacher oder

mehrfacher Hauptzahlen und der Stufenzahl der zugehörigen Hauptgebiete äusserst einfach dieselben 13 Fälle, zu welchen v. Staudt von einem anderen Prinzip aus in seinen „Beiträgen zur Geometrie der Lage" gelangt ist. — Als ein Mangel der $A_2$ wird bezeichnet, dass Grassmann Zahlbeziehungen zwischen den Einheitsprodukten und den ursprünglichen Einheiten von der Betrachtung ausschliesst, und dadurch auch gewisse Systeme höherer komplexer Zahlen, deren zuerst von Hamilton aufgestellte Theorie neuerdings weiter entwickelt worden ist. Nach dieser Richtung würde also ein weiterer Ausbau des Systems angezeigt erscheinen, falls jenen komplexen Zahlen eine hinlängliche Wichtigkeit und Anwendungsfähigkeit beizulegen ist. Denn man sollte bei solchen Verallgemeinerungen immer bedenken, dass die Möglichkeit von Anwendungen auf Geometrie und Mechanik für rein analytische Forschungen ein nicht zu unterschätzendes Kriterium des Wertes bildet, dessen Beachtung die Forschung davor bewahren wird, sich mit ihren Theorien und Resultaten ins Uferlose und schliesslich Abstruse zu verlieren. So wäre es denn immerhin möglich, dass sich hier in der Beschränkung der Meister gezeigt hätte. Auch darf man nicht vergessen, dass Grassmann bei aller Allgemeinheit seiner Begriffe und Methoden doch in erster Linie ein Forschungswerkzeug für Geometrie und Mechanik schaffen wollte. — Auf eine Erweiterung des Systems weist ferner der Umstand hin, dass Grassmann nur lineale Produktbildungen aus zwei, nicht solche aus drei Faktoren untersucht. Nach dieser Richtung sind (S. 400) interessante Andeutungen gegeben. Derartige Erweiterungen werden besonders wertvoll sein, wenn sie Anwendungen auf solche Gebiete zulassen, die sich etwa den Originalmethoden Grassmanns als unzugänglich erweisen sollten.

Hinsichtlich der Tragweite und Anwendungsfähigkeit jedes einzelnen Begriffs der Ausdehnungslehre über das im Text gegebene hinaus finden sich in Grassmanns eignen Anmerkungen mehrfache Andeutungen. Die genauere Prüfung derselben zeigt in ihren Resultaten recht deutlich, wie sehr es der Ausdehnungslehre zum Vorteil gereicht hat, dass Grassmann bei der Durchbildung ihrer Methoden der natürlichen Führung folgte, welche die geometrischen Gesichtspunkte ihm darboten, dass er aber keine seiner allgemeinen, an sich betrachtet analytischen Methoden auf solche spezielle Gegenstände anwandte, die ihrer Natur nach dieser Methode fern lagen, und dass er es unterliess, im Interesse solcher Anwendungen sich mit seinen Methoden durch Anpassung derselben an ungeeignete Gegenstände in Künsteleien zu verlieren, wie das in besonders lehrreicher Weise auf S. 436 zu erkennen ist (Anmerkung zu Nr. 337).

Unter denjenigen Bemerkungen, welche den Zusammenhang der $A_2$ mit neueren Forschungen betreffen, sind die folgenden von besonderem Interesse. Die einfache lineale Änderung ist gleichbedeutend mit einer linearen homogenen Transformation von der Determinante 1, die $\infty^1$ homogenen Transformationen dieser Form bilden eine eingliedrige Gruppe im Lieschen Sinne. Die zirkuläre Änderung ist, wie die lineale, mit einer

linearen homogenen Substitution von besonderer Form gleichbedeutend, dieselbe ist orthogonal und hat die Determinante $\pm 1$, je nachdem die zirkuläre Änderung positiv oder negativ ist. Im ersten Falle bildet der Inbegriff aller $\infty^1$ Transformationen eine eingliedrige Gruppe im Lieschen Sinne, im zweiten Falle bildet er keine Gruppe, wohl aber bilden beide Transformationen zusammen eine nicht-kontinuierliche Gruppe. — Der Übergang von den Grössen eines Hauptgebietes zu den Ergänzungen gehört vom Standpunkte der projektiven Geometrie zu den dualistischen Transformationen, und zwar zu den speziellen Reziprozitäten, die man als Polarsystem bezeichnet. — Dass der Übergang von einem Normalsystem zu einem anderen numerisch gleichen einer reellen orthogonalen Substitution entspricht, wurde schon in des Referenten „Raumlehre" II, Nr. 63 hervorgehoben, ebenso (l. c. S. 129—134), dass die Ausdehnungslehre für verschiedene Beweise des Multiplikationstheorems der Determinanten die kürzeste Form liefert. Auch ist an derselben Stelle (S. 5—12 und 250—256) bereits ausführlich dargelegt, wie sehr die Theorie der Cayleyschen Maßbestimmung an Einfachheit gewinnt, wenn man sie mit Hilfe der in der $A_2$ Nr. 151—215 eingeführten Begriffe entwickelt. — Dass dieser Abschnitt gleichzeitig die von Riemann entdeckte nichteuklidische Geometrie in sich schliesst, hat Lie gezeigt, während Study ihn als Beitrag zur Invariantentheorie der Gruppe aller Drehungen um einen Punkt auffasst. Dagegen scheint die ebenfalls in den „Anmerkungen" hervorgehobene Übereinstimmung des Grassmannschen (vom Referenten auf $n$ Dimensionen ausgedehnten) Eckensinus mit dem gleichnamigen von v. Staudt aufgestellten Begriffe bisher noch nicht beachtet worden zu sein. — Eine ausführliche Analyse knüpft sich an den Satz 391 der $A_2$, betreffend das Verschwinden des Ausdrucks $[Qc_r\ c_s]$ (durch Einsetzen von $n$ Grössen erster Stufe $c_1 \ldots c_n$, während $Q$ eine spezielle Form des Quotienten darstellt), dessen weitere Bedeutung von Grassmann zwar erkannt, aber nur in einer Anmerkung durch einige Hinweise angedeutet wurde. In diesem Satze liegt die Lösung der Aufgaben, die quadratische Form $\Sigma\alpha_{\varkappa\nu}x_\varkappa x_\nu$ durch eine reelle lineare homogene Substitution von der Determinante 1 auf eine Summe von $n$ Quadraten zurückzuführen, ferner eine quadratische Form $\Sigma\alpha_{\varkappa j}x_\varkappa x_j$ durch eine reelle Substitution, bei der die Form $\Sigma x_\nu^2$ invariant bleibt, auf eine Summe von Quadraten zurückzuführen, sodann die Hauptaxen der $\infty^1$ Mannigfaltigkeiten zweiten Grades $\Sigma\alpha_{\varkappa j}x_\varkappa x_j =$ const. des $R_n$ zu bestimmen. Er schliesst in sich das Sylvestersche Trägheitsgesetz der quadratischen Formen und führt dadurch direkt zu dem Sturmschen Satze über die Wurzeln algebraischer Gleichungen. Hier, wie in so vielen anderen Fällen, zeigt sich recht deutlich, wie die Ausdehnungslehre berufen ist, das durch geflissentliche Verschmähung geometrischer Hilfsmittel seitens der modernen Analysis und analytischer Hilfsmittel seitens der synthetischen Geometrie zum Schaden beider Zweige der Mathematik gelöste Band wieder zu knüpfen, und zwar nicht künstlich, wie durch die ältere analytische Geometrie, sondern in einfachster, naturgemässer Form.

Bis hierher bewegen sich die Studien der Herausgeber auf solchen Gebieten der $A_2$, die schon früher vielfache Beachtung, Anwendung und Würdigung gefunden hatten. Dagegen harrten die Schlusskapitel des Werkes über Differentialrechnung,* unendliche Reihen und Integralrechnung noch der Durchforschung, und es war darüber im allgemeinen nur bekannt, was Lie (irren wir nicht, noch im Anschluss an direkten Meinungsaustausch mit Grassmann) in dem von den Math. Annalen (Bd. 14) gegebenen Nekrologe Grassmanns (und anderweitig) über die Bedeutung dieses Teiles der $A_2$ für das Pfaffsche Problem ausgesprochen hatte. Die eingehende Untersuchung, welche auch dieser Teil der $A_2$ samt seiner Bedeutung für das ebengenannte Problem jetzt erfahren hat, führt zu folgender Charakterisierung der letzteren: Grassmanns Verdienst besteht zunächst darin, dass er die Invariantentheorie einer beliebigen Pfaffschen Gleichung bis zu einem gewissen Grade vollständig entwickelt hat ... Er hat die Kriterien angegeben, an denen man erkennen kann, auf welche der beiden möglichen Normalformen eine vorgelegte Pfaffsche Gleichung gebracht werden kann. Auch die Frage, unter welcher Bedingung die Normalform, auf die der Pfaffsche Ausdruck $\Sigma H_\mu dx_\mu$ gebracht werden konnte, auf einen Ausdruck mit $n$ Differentialen, aber nur $2n-1$ Veränderlichen zurückführbar ist, wird von Grassmann beantwortet, und es fehlt nur noch die Ausführung einer letzten, erst von Clebsch erkannten Vereinfachung. Aber auch ohne diese „bleibt das, was Grassmann für die Invariantentheorie eines Pfaffschen Ausdrucks geleistet hat, höchst beachtenswert .... und gerade in Bezug auf die Richtigkeit und Vollständigkeit der (oben erwähnten) Kriterien steht Clebsch wesentlich hinter Grassmann zurück.“ Dagegen hat Grassmann hinsichtlich der Aufstellung der Normalform einer vorgelegten Pfaffschen Gleichung nur gezeigt, dass sie durch Integration einer Reihe gewöhnlicher Differentialgleichungen geleistet werden kann, nicht aber untersucht, ob sich die Ordnung der erforderlichen Integrationen reduzieren lässt, eine von Clebsch und Natani aufgenommene, aber erst später zum Abschluss gebrachte Frage. Nebenbei wird rühmend hervorgehoben, was Grassmann hierbei für die Theorie gewisser mit dem Pfaffschen Problem zusammenhängender Gleichungssysteme geleistet hat. Endlich wird auch am Schlusse des ganzen Anhanges der „Symbolik“ Grassmanns gedacht, die ihn ja auch zu diesen „eine seiner schönsten Leistungen“ bildenden analytischen Resultaten geführt hat. Es wird anerkannt, dass dieselbe „der Jacobi-Cayleyschen vollständig ebenbürtig, ja sogar insofern überlegen ist, als die Grassmannschen Symbole immer unmittelbar an den Pfaffschen Ausdruck erinnern, aus dem sie gebildet sind, während das Symbol $(1, 2, \ldots 2n)$ als solches gar keine Beziehung zum Pfaffschen Problem erkennen lässt. Deshalb ist auch die Grassmannsche Symbolik ohne weiteres auf Systeme von Pfaffschen Gleichungen

* abgesehen von der Anwendung auf Funktional-, Hessesche Determinanten und weitere Bildungen der neueren Algebra in des Referenten „Raumlehre“ II, S. 145 flg.

anwendbar, was bei der Jacobi-Cayleyschen nicht der Fall ist." — Vorzüge dieser Art sind es gerade, welche überhaupt die vom Referenten von Anfang an betonte Überlegenheit der Grassmannschen Operationen über jede andere konkurrierende Symbolik begründen. Dass auch in diesem Abschnitt der $A_2$ einige Einschränkungen sowie Verbesserungen nötig geworden sind, welche letztere zum Teil die heute geforderte Strenge der Begründung betreffen, wird in den „Vorbemerkungen" mit Recht als ein auf den allgemeinen Standpunkt der damaligen mathematischen Forschung zurückzuführender, den Wert des Ganzen aber nicht im mindesten verringernder Umstand bezeichnet. Nicht unerwähnt darf bleiben, dass der ganze das Pfaffsche Problem betreffende Abschnitt noch eine besondere Darstellung in der Sprache der gewöhnlichen Analysis erfahren hat, wodurch die Bedeutung dieser Leistung Grassmanns auch solchen Mathematikern verständlich gemacht wird, die sich von seiner Symbolik fernhalten wollen.

Mit dem vorliegenden Halbbande ist das Gebäude der Ausdehnungslehre, wie Grassmann es schuf, im wesentlichen vollendet. In den folgenden Bänden wird es sich nur noch um Erweiterungen und Anwendungen dieses Systemes handeln. Was den Zusammenhang desselben mit der anderweitigen mathematischen Litteratur betrifft, so geben, wie schon oben bemerkt, die „Anmerkungen" mehrfache Auskunft über Punkte, in denen die Grassmannsche Forschung sich mit neueren, unabhängig von ihr entwickelten Theorien und Resultaten, namentlich der Transformationstheorie, berührt. Diese Bemerkungen können natürlich nur als Proben des an dieser Stelle vom Referenten bereits dargelegten viel grösseren Reichtums derartiger Beziehungen angesehen werden, dessen vollständige Berücksichtigung allerdings den Rahmen der ganzen Publikation überschritten hätte. Ebenso ist, abgesehen von zwei oder drei Zitaten, nichts erwähnt, woraus auf eine Beeinflussung der späteren mathematischen Forschung durch die Ausdehnungslehre geschlossen werden kann. Auch derartige Zusätze in nur annähernder Vollständigkeit zu verlangen, wäre unbillig, und wir erwähnen diesen Umstand nur, weil bei dem bisher streng retrospektiven Charakter des historischen Beiwerks dieser Publikation gerade jene vereinzelten Zitate, verbunden mit der S. VII ausgesprochenen Hoffnung, dass die $A_2$ in Zukunft mehr wirken werde als bisher, bei dem nicht orientierten Leser vorläufig eine unrichtige Meinung von der bisherigen Wirkung des Werkes erwecken können. — Auch wir schliessen uns der obigen Hoffnung an, nachdem in der vorliegenden Ausgabe der $A_2$ alles Wünschenswerte geschehen ist, ihr Studium zu erleichtern. Freilich, wer die Mühe scheut, sich Übung in der Handhabung der Grassmannschen Rechnungsoperationen anzueignen, und gewissermassen rechnerisch „umzulernen", für den wird es bequemer sein, in den gewohnten Geleisen mit Umwegen weiter zu arbeiten. Dass aber derartige Schwierigkeiten bei gutem Willen überwunden werden können, beweisen die Erfolge der viel unbequemer zu handhabenden Quaternionen im Auslande, beweist die auch in Deutschland beständig wachsende Zahl jüngerer Mathematiker, die mit Grassmannschen Methoden arbeiten.

Das Gesamturteil, welches der Herausgeber Herr Engel in den „Vorbemerkungen“ über die $A_2$ auf Grund seines eingehenden Studiums derselben unter den Gesichtspunkten der neuesten mathematischen Forschung fällt, lautet: „Gegenüber der ersten Ausdehnungslehre (von 1844) bezeichnet die zweite einen sehr wesentlichen Fortschritt, der sich nicht nur in der grösseren Mannigfaltigkeit des Inhalts bemerklich macht, sondern namentlich auch in dem ganzen Aufbau. Die Ausdehnungslehre von 1844, so geistreich sie auch ist, steht doch auf keiner ganz sicheren Grundlage; die Grundbegriffe, von denen Grassmann darin ausgeht, sind so allgemein und daher so inhaltlos, dass sie zum Aufbau eines wirklichen Systems nicht genügen, und Grassmann muss, um zu einem solchen zu gelangen, später stillschweigend in seine Grundbegriffe viel mehr hineinlegen, als die ursprünglich von ihm aufgestellten Erklärungen besagen. Ganz anders in der zweiten Ausdehnungslehre. Hier verzichtet Grassmann von vornherein darauf, sein System unabhängig von der Analysis zu entwickeln. Indem er aus der Elementarmathematik das Rechnen mit unbenannten und benannten Zahlen voraussetzt, stellt er den Begriff der extensiven Grösse auf und entwickelt sein ganzes System aus diesem Begriffe auf Grund einer Reihe von Definitionen über die Verknüpfung der extensiven Grössen mit den Zahlgrössen und untereinander. Auf diese Weise begründet er die Sätze der ersten Ausdehnungslehre ganz von neuem und völlig einwandfrei und erweitert zugleich das Gebiet für die Anwendbarkeit seines Kalküls ganz ausserordentlich. — Man kann über die Zweckmässigkeit und über die Vorteile des Rechnens mit extensiven Grössen verschiedener Meinung sein; niemand aber wird leugnen können, dass die Wissenschaft der extensiven Grösse, wie sie Grassmann in seiner zweiten Ausdehnungslehre entwickelt hat, ein kunstvoll und folgerichtig aufgeführtes Gebäude bildet, das keine Lücken zeigt . . . Unrichtigkeiten und Versehen finden sich eine ganze Reihe, aber sie sind alle von untergeordneter Bedeutung und betreffen niemals den Kern des Ganzen: sie alle sind zur Genüge dadurch erklärt, dass Grassmann bei der anstrengenden Thätigkeit seines Berufes nicht die Zeit fand, jede kleine Einzelheit, jede Verweisung auf frühere Sätze und dergleichen noch einmal genau nachzuprüfen. In Kleinigkeiten konnte er irren, das Ganze übersah und beherrschte er vollständig. Man kann in dieser Hinsicht auch auf Grassmann die Worte anwenden, die Lessing in seinem Laokoon über Winkelmann sagt: Es ist kein geringes Lob, nur solche Fehler begangen zu haben, die ein jeder hätte vermeiden können.“ — Dieses Urteil ehrt in gleichem Maße, wie den Schöpfer des Werkes, auch den Herausgeber, der die bei seinem heterogenen Studienkreise doppelt anzuerkennende Mühe nicht scheute, durch alle Schwierigkeiten bis zu derjenigen geistigen Bewältigung des Werkes durchzudringen, als deren Frucht wir obiges Urteil anzusehen haben.

Nachträge zur Besprechung des ersten Teils.

1. Nach einer gefälligen Mitteilung des Herrn Killing sind in den Weierstraßschen Vorlesungen (nach 1867) die Hinweisungen auf die

Ausdehnungslehre, speziell auf den Gebrauch des äusseren und des inneren Produktes in der Theorie der Bewegung eines starren Körpers und in der Kreislehre, umfangreicher gewesen, als die Darstellung des Textes vermuten lässt. Auch hatten die Bemerkungen des Herrn Weierstraß hinsichtlich des Verhältnisses der algebraischen Analysis zur Theorie der mehrfachen Einheiten nicht sowohl den Zweck, die Berechtigung der letzteren anzufechten, als die Möglichkeit eines von diesen Einheiten völlig unabhängigen Aufbaues der ersteren darzuthun, während im übrigen die Vorteile der letzteren gelegentlich ausdrücklich hervorgehoben wurden.

2. Die Herren Molenbroek (Haag) und Kimura (New-Haven) haben im Jahre 1895 die Gründung einer internationalen Gesellschaft zur Förderung der Vektorentheorie (Quaternionen und Ausdehnungslehre) angeregt. Im Auslande ist dieser Plan beifällig begrüsst worden, z. B. von Peano in der „Riv. Mat." V, 169 (1895) und von Macfarlane in der „Science" III, 99 (1896). Die in Lübeck abgehaltene Jahresversammlung der „Deutschen Mathematiker-Vereinigung" sprach demgegenüber ihre Bedenken gegen die Stiftung eines derartigen Vereins aus, „der lediglich den Zweck habe, einen sehr eng begrenzten Teil des mathematischen Wissens zu fördern."

3. Eine Sammlung von Vorlesungen, welche in erster Linie bestimmt sind, Studierende an technischen Hochschulen in weniger zugängliche wichtige Kapitel der höheren Mathematik einzuführen, und neben der Theorie auch Anwendungen auf Physik und Technik bieten, ist unter dem Titel „Higher Mathematics, A text-book for classical and engineering Colleges, ed. by Merriman (Lehigh University) and Woodward (Columbia College)" 1896 bei John Wiley & Sons, New-York und Chapman & Hall, London erschienen. In dieser Sammlung ist „Grassmanns Space Analysis" durch eine Arbeit von E. W. Hyde, „Vector Analysis and Quaternions" durch eine solche von A. Macfarlane vertreten.

4. Vorlesungen über die Ausdehnungslehre hielt Dr. K. Zindler im Sommer 1893 an der Universität in Graz, Winter 1894/95 desgleichen in Wien.

V. Schlegel.

---

Goldscheider, Franz, **Über die Gaussche Osterformel.** Programm. Berlin 1896.

Der Verfasser, der sich bereits durch eine Programmabhandlung über das Reziprozitätsgesetz der achten Potenzreste (Berlin, 1889) vorteilhaft bekannt gemacht hat, giebt in der vorliegenden Arbeit mehr als der Titel verspricht. Er beginnt mit einer sehr klar geschriebenen Übersicht über die geschichtliche Entwickelung der Bestimmungen über das Osterfest, wie sie in solcher Vollständigkeit noch nicht gegeben worden ist. Diese Bestimmungen waren anfangs sehr umständlich und in den verschiedenen Ländern sehr verschieden, bis zur Zeit Karls des Grossen die alexandrinische Osterberechnung durchdrang, die noch gegenwärtig in der griechischen Kirche in unveränderter Geltung ist. Ihr liegen die beiden nur angenähert

richtigen Annahmen zu Grunde, dass das Jahr $365^1/_4$ Tage hat und dass 235 Mondmonate gleich 19 Sonnenjahren sind. Im Laufe der Zeit zeigte sich, dass das so berechnete Osterfest sowohl vom wirklichen Frühlingsanfange als vom Vollmonde sich entfernte, und das war ein Hauptgrund für die Kalenderverbesserung, die Papst Gregor XIII im Jahre 1582 zu stande brachte. In kunstvoller Weise versuchte eine Kommission von Gelehrten, unter denen in erster Linie der bekannte Mathematiker Clavius S. J. zu nennen ist, diesem Übelstande abzuhelfen, ohne jedoch einen vollkommenen Ausgleich zu finden. Die Einführung des neuen Kalenders stiess bekanntlich auf grosse Schwierigkeiten, und zwar war es gerade die neue Berechnung des Osterfestes, die vielfach Anstoss erregte. Die evangelischen Staaten Deutschlands nahmen zwar, wesentlich auf Veranlassung von Leibniz, im Jahre 1700 den neuen Kalender an, machten jedoch den Vorbehalt, dass die Berechnung des Osterfestes nicht nach der zyklischen Rechnung, sondern astronomisch erfolgen sollte, wobei sie sich sonderbarer Weise auf die Bestimmungen des Concils von Nicaea beriefen. Erst Friedrich dem Grossen gelang es im Jahre 1775, die volle Annahme des Gregorianischen Kalenders für das ganze Deutschland durchzusetzen.

Die Berechnung des Osterfestes war eine sehr umständliche Operation, sie erforderte die Kenntnisse einer Reihe von Tabellen, welche die Sonntagsbuchstaben, den Sonnenzirkel, die goldenen Zahlen, die Epakten u. s. w. enthielten. Es war deshalb ein wesentlicher Fortschritt, als Gauss im Jahre 1800 eine einfache Formel angab, die es gestattete, direkt aus der Jahreszahl für die Zeit von 1700 bis 1899 das Datum des Ostersonntages zu berechnen. Gauss gab ferner eine allgemein gültige Formel, in der zwei Hilfszahlen, $M$ und $N$ auftreten, die für jedes Jahrhundert besonders zu berechnen sind, ebenfalls nach einer einfachen Formel. Alle diese Formeln werden von Goldscheider sorgfältig bewiesen.

Jene Hilfsformel hatte Gauss, durch ein fehlerhaftes chronologisches Buch veranlasst, nicht richtig angesetzt, in ihr ist die Zahl $p$ nicht als $[k:3]$, sondern als $[(8\,k+13):25]$ zu definieren, was freilich bis zum Jahre 4200 keinen Unterschied macht. Eine Berichtigung seiner Formel hat Gauss selbst 1816 veröffentlicht (Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, herausgegeben von B. v. Lindenau und J. G. F. Bohnenberger. Bd. I. S. 158). „Diese Berichtigung ist dem Herausgeber von Gauss' Werken entgangen; man liest daher im Bd. VI im Text die Zahl $p$ definiert als $[k:3]$, dazu aber die Anmerkung, dass bei Gauss sich die handschriftliche Bemerkung findet: $p$ wird bestimmt als Quotient bei der Division von $8\,k+13$ durch 25, ohne dass in den Bemerkungen des Herren Schering irgend eine Andeutung über den hiernach recht unklaren Sachverhalt zu finden ist.“ Auffallend ist auch, dass Bd.VI S. 79 bei der Ausnahme I die Jahre 1609, 1989, S. 85 dagegen die Jahre 1609, 1981 angegeben sind; Gauss ist an diesem Irrtum unschuldig.

Dem vorliegenden interessanten Programm soll noch ein zweites folgen, in dem der Verfasser eine Reihe von Fragen als Anwendung der Gaussschen Formel behandelt. „Die verwickelte Gestalt unseres Kalenders", sagt er, „giebt in der That Veranlassung zu einer fast unübersehbaren Menge von Aufgaben; das ist freilich auch der einzige Lichtpunkt darin." Ferner soll über das Schicksal der Gaussschen Formel berichtet werden, die anfangs keineswegs die gebührende Beachtung fand; mussten doch im Jahre 1805 die in Berlin gedruckten Kalender wieder eingezogen werden, weil die Verfertiger, darunter der Astronom Bode, das Osterfest falsch angesetzt hatten. Wir sehen diesem zweiten Teile mit Spannung entgegen.

STÄCKEL.

**Euclidis Data** cum commentario Marini et scholiis antiquis edidit HENRICUS MENGE. Leipzig 1896. B. G. Teubner. LXII, 336 p. [Euclidis Opera omnia Vol. VI.]

Gestützt auf Handschriften, deren älteste im zehnten Jahrhundert entstand, und auf mehrfache Ausgaben und Übersetzungen hat nunmehr Herr Menge die Daten Euklids dessen von Herrn Heiberg veröffentlichten Elementen und optischen Schriften nachfolgen lassen. Wie die Elemente in zwei Lesarten vorhanden sind, einer von Theon von Alexandria herrührenden und einer vortheonischen, so ist es auch den Daten ergangen, und es gehörte zu der Aufgabe des Herausgebers, den euklidischen Text von den theonischen Veränderungen, die bereits in einer bologneser Handschrift des elften Jahrhunderts sich kenntlich machen, zu unterscheiden. Wie weit dieser textkritischen Aufgabe genügt ist, müssen Philologen entscheiden, mathematische Gründe H. Menges Auswahl anzuzweifeln haben wir nicht. Theon hat, wie Herr Menge zeigt, bei seiner Ausgabe ganz andere Zwecke verfolgt, als sie gegenwärtig als selbstverständlich gelten. Es war ihm viel weniger daran gelegen, mit Hilfe der besten Handschriften, die zu beschaffen waren, den echten Wortlaut Euklids herzustellen, als alexandrinischen Zeitgenossen, welche für Mathematik sich interessierten, den Inhalt der Daten wie vorher der Elemente zu übermitteln, bei den Elementen erläuternd und erweiternd, bei den Daten äusserste Kürze anstrebend. Pappus hatte sich ein Jahrhundert vor Theon eingehend mit den Daten beschäftigt. Von einer Beschäftigung mit den Daten nach Theon wissen wir durch Proklus, durch dessen Schüler Marinus, der eine gleichfalls von Herrn Menge herausgegebene Einleitung in die Daten (denn das ist seine Abhandlung weit eher als ein Kommentar zu den Daten) verfasste, durch Eutokius, durch Olympiodor. Wir wissen auch, dass die Daten im zehnten Jahrhunderte zu den Arabern gelangten und einen Abschnitt ihrer *mittleren Bücher* bildeten. Herr Menge erzählt dann in seiner Einleitung weiter von den Ausgaben und Übersetzungen der Daten seit Georg Valla. Alle diese Vorarbeiten wurden zur Herstellung der neuen Ausgabe dienstbar gemacht, wie wir schon oben gesagt haben.

CANTOR.

**Das Delische Problem** von Prof. AMBROS STURM (Fortsetzung). Linz 1896. Verlag des k. k. Gymnasiums Seitenstetten. S. 57—97.

Wir haben Bd. 41 Histor. litter. Abtlg. S. 76—77 über die erste Abteilung dieser Arbeit berichtet. Es ist uns eine angenehme Pflicht, unsere Leser heute mit der zweiten Abteilung bekannt zu machen, welche das Delische Problem in der Alexandrischen Periode behandelt. Wir werden allerdings so wenig wie bei der ersten Abteilung des ganzen im allgemeinen bekannten Inhaltes gedenken, sondern wie damals uns auf Einzelheiten beschränken. Herr Sturm bespricht die Frage nach der sprachlichen Echtheit des Briefes und des Epigramms des Eratosthenes und bejaht sie. Er betont dabei, dass schon in jenem Briefe von der Notwendigkeit bei Herstellung von Kriegsmaschinen die Würfelverdoppelung leisten zu können die Rede sei, sodass das praktische Bedürfnis und nicht die theoretische Schönheit der Aufgabe in den Vordergrund tritt. Noch wichtiger ist die Bemerkung, dass diejenigen Lösungen des Delischen Problems, welche man Heron und Philo zuzuschreiben pflegt, ursprünglich von Apollonius herrühren, der durch einen Kreis und eine Hyperbel das Gleiche erzielt haben dürfte, was spätere durch Bewegungsgeometrie sich verschafften. Die gleiche Ansicht hat Montucla ausgesprochen, Reimer 1798 (De cubi duplicatione pag. 128—129) nicht ganz verworfen. Wir geben zu, dass Eutokios und Philoponos gewichtige Gewährsmänner dafür sind, dass man die bewegungsgeometrische Lösung Herons bis auf Apollonius hinauf datiere; wahr ist auch, dass Pappus von einer *Analyse der Aufgabe durch Apollonius mittels Kegelschnitte* gesprochen hat. Die Restitution dieser Analyse unter Anwendung einer Hyperbel, wie Montucla und Herr Sturm sie für wahrscheinlich halten, beruht dagegen auf keinerlei alten Angabe und hat nur den Wert einer Vermutung. Beiläufig bemerken wir, dass sich hier bei Herrn Sturm S. 73, Zeile 1 ein Druckfehler eingeschlichen hat. Die dortige Proportion muss heissen: $a : y = x : b$. Herr Sturm widmet einen ganzen Paragraphen der von Pappus überlieferten und am Anfange seines dritten Buches getadelten näherungsweisen Würfelverdoppelung. Mit Herrn S. Günther nimmt er an, jenes an sich unrichtige Verfahren habe in wiederholter Anwendung zu brauchbaren Werten geführt. Ohne solches in Abrede zu stellen, bemerken wir nur, dass von einer Wiederholung des Verfahrens nirgend die Rede ist. Dass wir aber mit dem Verfasser des diesjährigen Programmes nicht immer übereinstimmen, thut dem Werte der Abhandlung als solcher keinen Abbruch, und wir können sie gleich der vorhergehenden unseren Fachgenossen nur dringend empfehlen. CANTOR.

---

**Die Arithmetik des Elia Misrachi.** Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik von GUSTAV WERTHEIM, Professor an der Realschule der israelitischen Gemeinde zu Frankfurt a. M. Zweite verbesserte Ausgabe. Braunschweig 1896. Friedrich Vieweg und Sohn. 68 S.

Aus der Programmabhandlung von 1893, welche wir Bd. 39 Histor. litter. Abtlg. S. 16—17 unseren Lesern empfehlen durften, ist ein Bändchen

geworden, welches mit gutem Rechte sich als verbesserte Ausgabe bezeichnet. Herr Wertheim hat noch mehr, als es in jenem Programme stattfand, die 1534 erstmalig gedruckte Schrift mit zu Lebzeiten ihres Verfassers Vorhandenem verglichen. Er hat Paciuolo, Chuquet, Widmann von Eger, Christoff Rudolff durchstöbert, um Ähnlichkeiten mit Misrachi zu entdecken, und er hat so sicher zu stellen gewusst, dass um 1500 gewisse Kenntnisse, gewisse Aufgaben in ganz Europa vom äussersten Osten zum äussersten Westen bekannt gewesen sind, die überall vorkommen und in dieser Allgemeinheit der Verbreitung nicht als Beweis dienen können, dass ein später lebender $A$ einen Vorgänger $B$ gekannt haben muss, weil er sein Wissen ebensogut einem $C$, $D$ u. s. w. entlehnt haben kann. Herr Wertheim hat ferner die Induktionen, deren Misrachi sich bediente, um gewisse Reihen zu summieren, auf ihre Richtigkeit geprüft und dadurch eine Anzahl von interessanten Sätzen gewonnen, welche künftig der Mittelschule als willkommene Beispiele dienen können. Neu sind endlich manche Anmerkungen, unter denen wir die auf S. 16 hervorheben, dass im Talmud (Aboda Sara 9b) die Teilbarkeitsregel für 7 sich finde, nach welcher der Rest einer Zahl für den Divisor 7 ermittelt werde, wenn man vor der Division jedes Hundert durch 2 ersetze.

Cantor.

---

**Intorno alla vita ed ai lavori di Tito Livio Buratini**, fisico Agordino del secolo XVII. Studi e ricerche di Antonio Favaro. Venezia 1896. Estratto dalle Memorie del R. Instituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Volume XXV, Nr. 8, 140 p.

Die Frage, wer Tito Livio Buratini von Agorda sei, und wodurch er sich einer ihm gewidmeten Sonderuntersuchung würdig gemacht habe, ist eine vollberechtigte. Hat doch erst Herr Favaro diesen Gelehrten wieder entdeckt, dessen Verdienste durchaus in Vergessenheit geraten waren. Buratini ist zwischen 1610 und 1620 geboren, 1682 gestorben. Er hat 1639 einen mehrjährigen Aufenthalt in Egypten genommen, lebte später in Polen, wo er eine Stellung einnahm, welche man etwa die eines Münzdirektors nennen kann, und der er das polnische Bürgerrecht, den Adelstand, den Reichtum verdankte, die ihm aber auch Anklagen und Feindschaften zuzog. Buratini hat wahrscheinlich unabhängig von ähnlichen Gedanken, welche by Huyghens und in England zu Tag traten, seit 1645 und besonders in seiner *Misura universale* von 1675 die Länge des Sekundenpendels als allgemeine Maßeinheit, als *metro catolico,* empfohlen. Er hat eine Flugmaschine erfunden. Er hat vor dem 4. Juli 1665 die Venusflecken beobachtet, deren Entdeckung ihm angehört. Er hat mit hydraulischen wie mit mikrometrischen Arbeiten sich erfolgreich beschäftigt. Man darf daher durchaus damit einverstanden sein, dass Buratini der ihm gebührende Platz in der Geschichte der Wissenschaften wieder eingeräumt

werde, kein Platz unter den Grössen ersten Ranges, aber immerhin unter den Männern, die sich nach mehr als nur einer Richtung hin verdient gemacht haben.

CANTOR.

---

**Hoene Wroński.** Jego życie i prace napisal S. DICKSTEIN. Z portretem wrońskiego i podobniza jego pisma. W Krakowie nakladem Akademii umiejetności. 1896.

Herr Dickstein hat seit 1892 zahlreiche sich aneinander anschliessende Aufsätze veröffentlicht, in welchen er die Leser mit den Leistungen Wrońskis bekannt machte. Der erste dieser in französischer Sprache in Eneströms Bibliotheca mathematica erschienenen Aufsätze begann mit der Erklärung, Herr Dickstein wolle keine Biographie Wrońskis schreiben. Der Verfasser scheint inzwischen anderer Meinung geworden zu sein, denn der 368 Seiten starke Band, welcher uns vorliegt, dürfte eine Lebensgeschichte und Würdigung Wrońskis enthalten. Wir drücken uns so vorsichtig aus, weil uns die polnische Sprache, in welcher der Band abgefasst ist, durchaus fremd ist. Da uns indessen kein Mitarbeiter unserer Zeitschrift bekannt ist, der jene Sprache beherrschte, so sahen wir uns lieber zu einer einfachen Anzeige, dass ein solches Werk vorhanden sei, veranlasst, als dass wir ganz darüber geschwiegen hätten.

CANTOR.

---

**Festschrift** der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 1746—1896. Den Teilnehmern der in Zürich vom 2. bis 5. August 1896 tagenden 79. Jahresversammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft gewidmet. In zwei Teilen. I. mit 6 Tafeln, 274 S. II. mit 14 Tafeln, 598 S. Zürich 1896. Druck von Zürcher und Furrer.

Die in Zürich wohnenden Mathematiker und Naturforscher hatten in kurzem Zwischenraume zwei Gedenktage zu begehen, welchen sie je eine Festschrift widmeten. Im Jahre 1894 [vergl. diese Zeitschrift Bd. 40, Histor. litter. Abtlg. S. 139—140] feierte die Gesellschaft ehemaliger Studierender der Eidgenössischen polytechnischen Schule ihr 25jähriges Bestehen, im Jahre 1896 durfte die naturforschende Gesellschaft in Zürich auf ein 150jähriges Bestehen zurückblicken. Zwei Bände stattlichen Umfangs haben dieser Feier ihr Dasein zu verdanken, ein erster geschichtlicher Band, ein zweiter mit Abhandlungen des verschiedensten Inhaltes aus der Feder gegenwärtiger und ehemaliger Mitglieder. Wir nennen die Überschriften der in dem zweiten Bande enthaltenen acht mathematischen Beiträge: Elwin Bruno Christoffel, Die Konvergenz der Jacobischen $\vartheta$-Reihe mit den Moduln Riemanns. Jérôme Franel, Sur la fonction $\xi$ (t) de Riemann et son application à l'arithmétique. Georg Frobenius, Zur Theorie der Schaaren bilinearer Formen. Carl Friedrich Geiser, Das räumliche Sechseck und die Kummersche Fläche. Adolf Hurwitz, Über die Kettenbrüche, deren Teilnenner arithmetische Reihen bilden. Theodor Reye, Beweis

einiger Sätze von Chasles über konfokale Kegelschnitte. Ferdinand Rudio, Zur Theorie der Strahlensysteme, deren Brennflächen sich aus Flächen zweiten Grades zusammensetzen. Heinrich Weber, Darstellung der Fresnelschen Wellenfläche durch elliptische Funktionen. Als Verfasser des ersten Bandes, der die Geschichte der naturforschenden Gesellschaft erzählt, nennt sich eine dreiköpfige Druckschriftenkommission, gebildet aus den Herren Albert Heim, Arnold Lang, Ferdinand Rudio; wir glauben kaum irre zu gehen, wenn wir dem zuletztgenannten den Löwenanteil an der schönen Arbeit zuschreiben, welche in dem engen Rahmen der Geschichte einer einzelnen Gesellschaft Wissenswürdiges über Unterrichtsverhältnisse und über die Entwickelung der Wissenschaften in und auch ausserhalb der Schweiz seit anderthalb Jahrhunderten mitteilt. Die Ausstattung beider Bände ist eine vorzügliche. Man merkt ihr deutlich an, dass ausserordentliche Mittel zur Herstellung der Festschrift in reicher Weise zur Verfügung standen.

Cantor.

---

**Lehrbuch der Elementargeometrie** von J. Henrici, Professor am Gymnasium zu Heidelberg, und P. Treutlein, Direktor des Realgymnasiums zu Karlsruhe. II. Teil. Abbildung in verändertem Maße. Berechnung der Grössen der ebenen Geometrie. 2. Auflage mit 188 Figuren in Holzschnitt und einem Kärtchen. Leipzig 1897. B. G. Teubner. IX, 248 S.

Der 1882 erschienenen, Bd. 28 dieser Zeitschrift Histor. litter. Abtlg. S. 68—69 angezeigten ersten Ausgabe ist nun die zweite gefolgt, nachdem schon 1891 eine zweite Auflage des ersten Bandes nötig geworden. Der Gang hat sich nicht geändert, wie es bei einem Schulbuche mehr als bei irgend einem anderen Werke sich als unerlässlich erweist. Im einzelnen mögen da und dort kleine Feilstriche dem Benutzer des Buches bemerkbar werden. Neu und solchen Lehrern, welche das Bändchen ihrem Unterrichte zu Grunde legen wollen, gewiss willkommen ist eine in dem Vorwort gegebene Gebrauchsanweisung, welche der Meinung entgegentritt, als dächten sich die Verfasser, man müsse das Buch genau in der beim Druck eingehaltenen Reihenfolge durchnehmen, und welche entsprechende Vorschläge macht, wie man es in dieser Beziehung beim erstmaligen und beim wiederholten Durchnehmen zu halten habe.

Cantor.

---

**Arithmetik und Algebra** von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra. Leipzig 1896. G. J. Göschen. 171 S. und 134 S.

Das bekannte und in dieser Zeitschrift erstmalig im 28. und 29. Bande besprochene Elementarwerk Schuberts ist nunmehr in neu stilisierter Fassung in die Sammlung Göschen übergegangen. Alles, was wir früher zum Lobe des Buches sagten, bleibt noch heute bestehen.

Cantor.

**Die Grundlage der modernen Wertlehre:** DANIEL BERNOULLI, Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen (*Specimen Theoriae novae de Mensura Sortis*) aus dem Lateinischen übersetzt und mit Erläuterungen versehen von Prof. Dr. ALFRED PRINGSHEIM, mit einer Einleitung von Dr. LUDWIG FICK. Leipzig 1896 bei Duncker & Humblot. 60 Seiten. [Brentano und Leser, Sammlung älterer und neuerer staatswissenschaftlicher Schriften des In- und Auslandes Nr. 9.]

Das sogenannte Petersburger Problem, welches seinen Namen daher entnahm, dass die massgebende Arbeit Daniel Bernoullis in den Veröffentlichungen der Petersburger Akademie erschien, ist jedem Mathematiker, der nur einiges Interesse für Wahrscheinlichkeitsrechnung besitzt, zur Genüge bekannt. Weniger bekannt dürfte Bernoullis Abhandlung selbst sein, und eine mit Anmerkungen versehene Übersetzung von Herrn Pringsheim füllt hier eine Lücke in glücklicher Weise aus. Keiner unserer Leser würde sich wundern, wenn der Abdruck in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften erfolgt wäre. Zufällig, möchten wir sagen, ist das nicht geschehen. Die Herausgeber einer staatswissenschaftlichen Sammlung haben sich der Abhandlung früher erinnert, in welcher die *valeur morale* die erste Berücksichtigung fand, und diesem Umstande ist es zuzuschreiben, dass Herr Fick eine nationalökonomische Einleitung vorausschickte, welche dem Mathematiker erst recht erwünscht ist, da sie ihm die Möglichkeit gewährt, sich rasch und leicht einen Einblick in die moderne Wertlehre zu verschaffen.

CANTOR.

C. G. J. JACOBI, **Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten** (De formatione et proprietatibus Determinantium) **und über die Funktionaldeterminanten** (De determinantibus functionalibus). 1841. Herausgegeben von P. STÄCKEL. 73 und 72 S. Leipzig 1896. Wilhelm Engelmann. [Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 77 und 78.]

Ausser den beiden in der Überschrift genannten Abhandlungen hat Jacobi noch eine dritte: *De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum* verfasst. Alle drei fanden ihren Abdruck 1841 im 22. Bande von Crelles Journal, alle drei sind von Herrn Stäckel jetzt übersetzt. Wir sagen alle drei, denn auch die Abhandlung von den alternierenden Funktionen ist neben der über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten in Heft 77 des Sammelwerkes aufgenommen. Man kann diese Aufsätze als die der Zeit nach älteste zusammenhängende Darstellung der Determinantenlehre bezeichnen, wenn auch einzelnen Sätzen derselben ein weit höheres Alter zukommt. Man kann im Einverständnisse mit dem Herausgeber auch heute neben und vielleicht vor zahlreichen Lehrbüchern der Determinantenlehre Jacobis lichtvolle Darstellung besonders solchen Mathematikern zum Lesen anempfehlen, die mit dem Gebrauche der Determinanten schon vertrauter sind.

CANTOR.

**Grundzüge der Differential- und Integralrechnung** von Dr. OTTO STOLZ, ord. Professor an der Universität zu Innsbruck. Zweiter Teil: Complexe Veränderliche und Funktionen. Mit 33 Figuren im Text. Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig 1896.

Das vorliegende Buch wird durch dieselben Vorzüge charakterisiert, die wir schon bei der Besprechung des ersten Teiles hervorgehoben haben, weshalb wir uns auf eine Inhaltsangabe beschränken können. Die beiden ersten Abschnitte behandeln die Differentialrechnung und zwar nach den Methoden von Lagrange und Cauchy. Im dritten Abschnitt folgt die Integration der einfachsten analytischen Funktionen. Besonders eingehend ist die Behandlung der rationalen Funktionen von $x$ und der Quadratwurzel einer Funktion zweiten Grades von $x$ mit Hilfe der Methode von Weierstraß. Der vierte Abschnitt bringt die Theorie der bestimmten Integrale, der letzte den Cauchyschen Integralsatz und einige Anwendungen desselben. Ein Anhang erörtert die Rektifikation der ebenen Kurven.

MAX MEYER.

---

**Die geometrische Teilung des Winkels** von MAX KOENIG, Regierungsbaumeister. Zweites Heft. Mit 11 Abbildungen auf einer lithographischen Tafel. Verlag von Georg Siemens, Berlin 1896.

Im Anfang bemerkt der Verfasser, dass die im ersten Hefte auseinandergesetzte Methode nur ein Näherungsverfahren sein soll. Es wäre jedenfalls praktischer gewesen, wenn er dies von vornherein betont hätte; nach seiner Darstellung musste man aber annehmen, dass er einen strengen Beweis liefern wollte. Im vorliegenden Hefte soll nun die mathematisch genaue Teilung eines Winkels in drei Teile mit Hilfe von Kreisen und geraden Linien gegeben werden; in Wirklichkeit handelt es sich auch hier nur um eine Annäherungsmethode. Der Verfasser bringt zwar einen sehr umständlichen Beweis, der nur den einen Fehler hat, dass der letzte entscheidende Punkt nicht bewiesen wird. Bis der Verfasser dieses nachgeholt hat, können wir wohl auf eine Darstellung des Verfahrens verzichten.

MAX MEYER.

**Index operum Leonardi Euleri confectus** a JOHANNE G. HAGEN S. J., Director speculae astronomicae Collegii Georgiopolitani Washington D. C. Berolini 1896. Felix Dames. VIII und 80 S. gr. 8$^0$. Mk. 2. —

Vor fast fünfzig Jahren dachte die Petersburger Akademie ernstlich daran, eine Gesamtausgabe der Werke Eulers zu veranstalten; leider schreckte sie aber schliesslich doch vor den Kosten zurück und begnügte sich daher mit der Herausgabe der „Commentationes arithmeticae collectae" und der „Opera postuma" in je zwei Bänden (1849 und 1862). Das Scheitern des ursprünglichen Planes kann man nur aufrichtig beklagen, denn eine solche Gesamtausgabe würde geradezu ein vollständiges Archiv

der Mathematik vom Anfange des achtzehnten Jahrhunderts bis zu Eulers Tode sein; was die Mathematiker dieser acht Jahrzehnte wussten und konnten, das findet sich ja nahezu alles bei Euler, und noch heutzutage lassen sich die Spuren der modernsten mathematischen Theorien meistens bis auf Euler zurückverfolgen, was in vielen Fällen nicht einmal bekannt ist. Mit Freuden muss man daher das Erscheinen eines Schriftchens begrüssen, das den ausgesprochenen Zweck hat, einer zukünftigen Gesamtausgabe vorzuarbeiten, und wenn man auch als Deutscher wünschen muss, dass das etwaige Zustandekommen einer solchen Ausgabe einem deutschen Mäcen zu danken sein möge und nicht einem amerikanischen, wie der Verfasser hofft, so wird man ihm doch für die Anregung dankbar sein, die er durch sein Schriftchen gegeben hat, und wird schliesslich froh sein, wenn sie Erfolg hat, wo es auch sei.

Wenn im Einzelnen an dem Hagenschen Index Manches auszusetzen ist, so darf man sich darüber nicht wundern, denn eine Gesamtausgabe der Werke Eulers ist ein so riesenhaftes Unternehmen, dass selbst der Plan dazu — und ein solcher Plan soll der Index sein — nicht gleich auf den ersten Anlauf vollkommen ausfallen kann. Die Ausstellungen, die ich im Folgenden machen werde, entspringen nur meinem Wunsche, im Sinne der Anregung zu wirken, die Hagen gegeben hat.

Bei der überaus grossen Zahl der Eulerschen Schriften und bei dem gewaltigen Umfange, den eine Gesamtausgabe haben wird — Fuß hat seinerzeit schätzungsweise 25 Quartbände von je 640 Seiten angenommen — ist eine geschickte und übersichtliche Anordnung geradezu eine Lebensfrage. An den so schön ausgestatteten Sammlungen der Werke Cayleys und namentlich Cauchys sieht man nur zu deutlich, wie ungemein die Anordnung nach der Zeitfolge der einzelnen Schriften die Benutzbarkeit einer solchen Ausgabe beeinträchtigt und den Wert der Sammlung verringert. Hagen hat die Eulerschen Schriften sachlich geordnet — die einzige brauchbare Anordnung, die auch von Fuß in seiner bekannten „Correspondance de quelques célèbres géomètres du XVIII^ème^ siècle" (Petersburg 1843) gewählt worden war. Er unterscheidet vier Serien: Opera mathematica, Opera physica, Opera astronomica und Opera varii argumenti, von denen jede in eine ganze Anzahl von Abteilungen zerfällt, innerhalb deren die Abhandlungen chronologisch geordnet sind.

Die Abteilungen jeder Serie hätten für sich numeriert werden sollen.

Ferner enthalten einzelne dieser Abteilungen je 34, 37, 40, 41, 42, 44, ja sogar 52 Abhandlungen, die Abteilungen hätten also kleiner gemacht werden sollen. Überhaupt scheint mir auch die Einteilung, die Fuß in der Correspondance befolgt, in mancher Beziehung vor der von Hagen angenommenen den Vorzug zu verdienen und es wäre vielleicht besser gewesen, wenn Hagen die Fußsche Einteilung im Wesentlichen beibehalten und nur die Einteilung noch weiter getrieben hätte. Die Überschriften der einzelnen Abteilungen sind bei Hagen öfters nicht bezeichnend genug. Was sind das für farblose Überschriften: Series in genere, Series

in specie, Series particulares, Calculus integralis in genere und in specie u. s. w.? Warum sind die Abhandlungen über Wahrscheinlichkeit unter die Opera varii argumenti verwiesen? Der Verfasser legt selbst ein Hauptgewicht auf die leichte Auffindbarkeit jeder Abhandlung und doch habe ich mehrere schneller in dem Fußschen Verzeichnisse gefunden, als in dem Hagenschen Index. Eine, die Nr. 789 „Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis", habe ich überhaupt erst gefunden, als ich die von Hagen mitgeteilte Vergleichung seiner Numerierung mit der der „Correspondance" zu Hilfe nahm; unter den Tractatus philosophici hätte ich sie nimmer gesucht.

Es hätte die Brauchbarkeit des Index sehr erhöht, wenn bei jedem selbständigen Werke die Anzahl der Seiten angegeben worden wäre, die es enthält, und bei jeder Abhandlung nicht bloss die erste, sondern auch die letzte Seite des Bandes, in dem sie steht. Auch die Anzahl der zugehörigen Figuren hätte angegeben werden sollen. Bei mehrbändigen Werken vermisst man eine Angabe über die Jahre des Erscheinens der einzelnen Bände. Bei den drei Bänden der ersten Ausgabe des „Calculus integralis" (Nr. 7 bei Hagen) steht 1768—70 und sie sind allerdings 1768, 1769, 1770 erschienen; die drei Bände der „Lettres à une princesse" (Nr. 773) stammen aus den Jahren 1768, 1768 und 1772, es erweckt daher eine ganz falsche Vorstellung, wenn da steht: 1768—72.

Zweckmässig wäre es auch gewesen, wenn die „Opuscula varii argumenti" und die „Opuscula analytica" unter den „Opera separata" mit aufgeführt worden wären, unter Angabe der Nummern der darin enthaltenen Abhandlungen. Ich habe mir diese Nummern aufgeschrieben; bei den Op. var. arg. sind es folgende:

Bd. I enthält: Nr. 472, 711, 628, 731, 790, 791;
Bd. II „ : Nr. 616, 24, 193, 324;
Bd. III „ : Nr. 679, 250, 503;

bei den Op. anal. dagegen:

Bd. I: Nr. 168, 127, 37, 181, 38, 105, 69, 39, 16, 70, 40, 128, 129 und
Bd. II: Nr. 17, 377, 378, 379, 95, 71, 183, 184, 341, 185, 130, 131, 41, 783, 784.

Übrigens wäre ich mehr dafür, die „Opera separata" in die einzelnen Abteilungen einzuordnen, statt sie, wie Hagen gethan hat, an die Spitze jeder Serie zu stellen.

Erwünscht wäre auch eine Zusammenstellung der Nummern des Hagenschen Index, die in den „Commentationes arithmeticae collectae" und in den „Opera postuma" enthalten sind.

Schade ist es, dass bei den einzelnen Bänden der Akademieschriften stets nur der laufende Jahrgang angegeben ist, nicht aber das Erscheinungsjahr. Das giebt häufig zu Missverständnissen Anlass. Zum Beispiel sind die beiden Abhandlungen, in denen Euler seinen berühmten Satz über die Polyeder aufstellt und beweist, in den Novi Commentarii Petro-

politani tomus IV, ad annum 1752 et 1753 enthalten, dieser Band ist aber erst 1758 erschienen.

Von den 796 Titeln, die der Index enthält, habe ich 150 mit den Originalen verglichen und dabei Folgendes zu bemerken gefunden:

Der Titel von Nr. 1 lautet: „... bey der Kayserlichen Academie der Wissenschafften". Nr. 2 ist nicht 1771 erschienen, sondern 1770. Bei Nr. 5 sollte es heissen: „Impensis Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae 1755", denn Berlin ist bloss der Druckort und steht nicht auf dem Titelblatt. Ähnliches gilt von Nr. 684. Bei Nr. 155 steht im Originale „quarumdam" nicht „quarundam" und bei Nr. 156 „des puissances" nicht „de". Bei Nr. 209 und 210 muss es heissen: „des plus grands et plus petits" und bei Nr. 210 überdies: „Elémens de la trigonométrie sphéroïdique"; bei Nr. 247 „constituant" nicht „constituunt". Nr. 297 steht nicht in den „N. C. Petr.", sondern in den „C. Petr.". Der Titel von Nr. 399 lautet: „Nova methodus innumerabiles ... reducendi ad aequationes differentiales primi gradus". Bei Nr. 421 hätte unterm Text bemerkt werden sollen, dass die „Editio nova" von 1790 durch Hinzufügung der Abhandlungen Nr. 447, 448, 523, 524, 526, 527 vermehrt ist. Bei Nr. 472 und 711 hätte bemerkt werden sollen, dass diese Abhandlungen auf dem Titelblatte des ersten Bandes der Opuscula varii argumenti unter etwas anderem Titel erscheinen: „Solutio Problematis Mechanici de Motu Corporum Tubis Mobilibus Inclusorum" und „Nova(e) Tabulae Astronomicae Motuum Solis ac Lunae". Der Titel von Nr. 540 lautet: „Inquisitio physica in causam fluxus ac refluxus maris". Bei Nr. 591 fehlt „utcunque" vor „elastica" und das Komma gehört vor „quam". Die Bemerkung zu Nr. 686 unterm Texte gehört in den Text. Nr. 748 scheint auch separat erschienen zu sein, wenigstens besitze ich davon ein Exemplar, das noch einen besonderen Titel hat: „Recherches sur les inégalités de Jupiter et de Saturne. Par M. Leonard Euler etc. A Paris, Chez Pancoucke 1769". Der Titel von Nr. 769 lautet: „... über den Unterscheid des Wiederstandes der Luft in schnellen und langsamen Bewegungen". Bei Nr. 771 muss es „complette" heissen. Bei Nr. 784 ist die Seitenzahl 330 falsch, die Abhandlung steht in den Opusc. anal. Bd. II, S. 331—346; die falsche Jahreszahl stammt wahrscheinlich von einem Druckfehler in dem Inhaltsverzeichnisse der Opuscula analytica, denn da steht 230 statt 331.

Friedrich Engel.

---

J. Plücker. **Gesammelte Wissenschaftliche Abhandlungen.** Im Auftrag der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegeben von A. Schoenflies und Fr. Pockels. Zweiter Band. Physikalische Abhandlungen. Herausgegeben von Fr. Pockels. Leipzig, B. G. Teubner. 834 Seiten.

Dem ersten Bande der Plückerschen Abhandlungen (vergl. diese Zeitschrift Bd. 42) ist rasch der zweite (und letzte) gefolgt, der sämtliche

Schriften physikalischen Inhalts (mit Ausnahme weniger, die jetzt kein Interesse mehr darbieten) enthält. Der Herausgeber hat diese Arbeiten in drei Gruppen zusammengefasst; die erste bezieht sich auf das magnetische Verhalten der Krystalle, der Flüssigkeiten und Gase, die zweite auf die Lichterscheinungen in den Geisslerschen Röhren, während die Abhandlungen der letzten (und kleinsten) Gruppe sehr verschiedenen Gegenständen angehören. Die vielfachen Ungenauigkeiten des Originaldrucks sind mit grösster Sorgfalt verbessert worden. Wo dagegen sachliche Bedenken vorlagen, hat der Herausgeber aufklärende Anmerkungen in Form eines Anhanges hinzugefügt, der ca. 20 Seiten einnimmt. Da die physikalischen Leistungen Plückers in der Biographie von Clebsch nur kurz berührt worden sind, hat sich Herr Riecke der Mühe unterzogen, eine eingehendere Würdigung Plückers in dieser Richtung zu geben, die als Einleitung den vorliegenden Band eröffnet.

Erst 1847 — nach längerer mathematischer Thätigkeit — erschien die erste physikalische Arbeit Plückers, die letzte 1865. Seine Leistungen werden treffend charakterisiert mit den Worten: „Sobald aber Plücker dem neuen Gebiete sich zuwendet, erweist er sich auf ihm nicht minder fruchtbar, als auf dem der Mathematik; er ist unermüdlich neue Versuche zu ersinnen, neue Stoffe dem Versuche zu unterwerfen, er entdeckt eine Reihe merkwürdiger und wichtiger Thatsachen und eröffnet der physikalischen Forschung neue Wege.“ Indessen wird zugleich betont, dass seine Maßbestimmungen der erforderlichen Genauigkeit und daher oft der Vergleichbarkeit und allgemeinen Giltigkeit entbehren.

Von besonderem Interesse ist es zu sehen, wie Plücker verschiedentlich über seine Versuche hinaus zu weiten Spekulationen veranlasst wird, wie er aber stets, wenn er sich von deren Unhaltbarkeit überzeugt hat, dies offen anerkennt.

Während Plücker bei seinen Arbeiten über den Magnetismus mit anderen Physikern (Faraday, W. Thomson, W. Weber) vielfach zusammentrifft, hat er, ohne von anderen beeinflusst und gestört zu werden, das Gebiet der elektrischen Entladungen in verdünnten Gasen neuerschlossen. „Die hierher gehörenden Arbeiten Plückers dürfen umsomehr hervorgehoben werden, als sie nicht immer die ihnen gebührende Anerkennung gefunden haben“. Er hat die „Geisslerschen Röhren“ zuerst eingeführt und mit grossem Erfolge (Einwirkung eines Magnetes, Spektralanalyse) verwendet; er ist sogar bis zu der durch Kathodenstrahlen erregten Fluorescenz vorgedrungen, und hat dadurch die späteren Entdeckungen von Hittorf, Crookes u. a. vorbereitet, während ihm die Existenz der Kathodenstrahlen selbst verborgen blieb.

Die Fachgenossen sind der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen für diese schöne und korrekte Ausgabe der Plückerschen Abhandlungen zu besonderem Danke verpflichtet.

W. Fr. Meyer.






E. B. Elliott. **An Introduction to the Algebra of Quanties.** Oxford. Clarendon Press. 1895. XIII. 423 Seiten.

Die vierte Auflage des bekannten Salmonschen Werkes „Modern Higher Algebra" erschien 1885; der wesentlichste Bestandteil davon, die projective Invariantentheorie, hat seitdem solche eingreifende Umänderungen und Bereicherungen erfahren, dass Herr Elliott sicher einem allgemeinen Bedürfniss englischer Studenten der Mathematik entgegengekommen ist, wenn er über den fraglichen Gegenstand ein selbständiges Werk herausgegeben hat. Mehrjährige Vorlesungen über Formentheorie veranlassten ihn vor allem der pädagogischen Seite der Sache näher zu treten, und so will denn das Buch in erster Linie ein praktischer Wegweiser sein; es will in angemessener Ausführlichkeit und unter Darlegung vollständiger Beweise die Grundlagen der Theorie zu einem abgerundeten Ganzen gestalten.

So hat sich der Verfasser, vielleicht öfters gegen seinen Willen, zu einer wesentlichen Beschränkung des Stoffes verstanden, und da ist es nicht zu verwundern, wenn er sich von englischen Rücksichten leiten liess, und die Leistungen englischer Mathematiker — Boole, Cayley, Sylvester, Hammond, Mac-Mahon — fast ausschliesslich berücksichtigte. Es erscheint fast als seltsame Ausnahme, wenn der Hilbertsche Beweis für die Endlichkeit eines (binären) Formensystems vorgetragen wird.

Dagegen ist die durch Aronhold, Clebsch, Gordan zu so hoher Blüte gelangte deutsche Symbolik prinzipiell ausgeschlossen worden — der Verfasser behauptet, eine kürzere Darstellung ihrer Prinzipien in etwa zwei bis drei Kapiteln würde doch ihren Zweck verfehlt haben —; die fundamentale Auffassung der Invarianten und Seminvarianten als Invarianten projektiver Gruppen, sowie der invarianten Differentiationsprozesse als zugehöriger Differentialinvarianten ist nicht einmal erwähnt (der Name Lie's kommt überhaupt nicht vor); die wichtige Theorie der Combinanten ist nur stiefmütterlich behandelt worden.

Aber auch in solchen Gebieten, die mit einer gewissen Vorliebe gepflegt werden, wie z. B. in denen der Seminvarianten und Perpeteranten, wird man manches zu den Grundlagen gehörige vermissen.

Auf der anderen Seite hat das Buch unleugbar grosse Vorzüge. Es wird immer von den einfachsten Fällen ausgegangen und diese werden durch eine ansehnliche Reihe sorgfältig ausgewählter Beispiele illustriert, sodass dem Leser die Elemente der Theorie in Fleisch und Blut übergehen, ehe er sich an Verallgemeinerungen wagt; auf eine klare und korrekte Beweisführung ist grosser Fleiss verwendet worden. Trotzdem die Namen der Autoren bei allen wichtigen Sätzen erwähnt werden, erhebt der Verfasser hierin durchaus nicht den Anspruch auf Unfehlbarkeit, und weiterstrebende Leser, die die historische Entwickelung des Gegenstandes namentlich in den letzten Jahrzehnten eingehender kennen zu lernen wünschen, werden mit Recht auf den Bericht des Referenten hingewiesen.

Um nunmehr in Kürze auf den Inhalt des Werkes zu kommen, der sich auf 16 Kapitel verteilt, so werden sogleich in den ersten drei Kapiteln die

wesentlichsten Grundeigenschaften der binären In- und Kovarianten entwickelt. Sodann werden, im Anschluss an Boole, die Begriffe der Kogredienz und Kontragredienz und die Cayleysche Hyperdeterminanten-Symbolik eingeführt. Als Gegenstück dient die reale Darstellung der binär-invarianten Bildungen als Funktionen der Wurzeln, und von hier aus werden die charakteristischen partiellen linearen Differentialgleichungen („Annihilatoren") gebildet, von denen ein Teil genügt, um die Seminvarianten festzulegen. Die Seminvarianten werden nach Sylvester einer genaueren Untersuchung unterzogen, insbesondere die zugehörigen charakteristischen Anzahlen (z. B. der linear unabhängigen unter ihnen von vorgegebenen Gradzahlen u. s. w.). Die tiefergreifenden Forschungen von Capelli und Deruyts hätten hier wohl Erwähnung verdient. Die Darstellung der Eigenschaften der „Erzeugenden Funktionen" (für Seminvarianten, Invarianten u. s. w.) ist dankenswert.

Der „Endlichkeitsbeweis" ist schon oben erwähnt.

Die Mac-Mahon-Cayleysche Behandlung der Seminvarianten, welche sie den symmetrischen Funktionen (unter Voraussetzung einer Binärform von unbegrenzt hoher Ordnung) unterordnet, wird ausführlich genug verarbeitet.

Wesentlich nach älterem Muster wird die Theorie der kanonischen Formen beschrieben, sie leistet gute Dienste bei der Aufstellung der vollen Systeme einer binären Form fünfter (und, kürzer, auch sechster) Ordnung, sowie einiger Simultansysteme. Für die Berücksichtigung der hierbei herrschenden identischen Relationen (Syzygien) sind neuere Beiträge von Hammond benutzt worden.

Den Schluss bildet eine Einleitung in die Theorie der ternären Formen, die vermöge Entwickelung nach Potenzen je einer Variabeln binären Mitteln zugänglich gemacht werden, wie es neuerdings von verschiedenen Seiten her geschehen ist.

Die geometrischen Anwendungen sind nur in ihren Grundzügen berücksichtigt.

Alles in allem bietet das Werk auch für einen nicht-englischen Leser eine Fülle des Anregenden, und ist als willkommene Ergänzung zu den sonstigen Lehrbücher anzusehen.

W. Fr. Meyer.

---

J. H. Graf. **Der Briefwechsel zwischen Jacob Steiner und Ludwig Schläfli.** Festgabe der Bernischen Naturforschenden Gesellschaft an die Zürcherische Naturforschende Gesellschaft anlässlich der Feier des 150-jährigen Bestehens der Letzteren. Bern 1896. J. Wyss. 264 S.

Diejenigen, welche sich für die Entwickelung der neueren Geometrie interessieren, werden Herrn Graf Dank wissen, dass er den im Nachlasse Steiners vorgefundenen „Briefwechsel" herausgegeben hat. Treten auch bei der Lektüre dieser merkwürdigen Briefe manche Charaktereigentümlich-

keiten der beiden grossen Forscher zu Tage, die einen persönlichen Anhänger derselben enttäuschen mögen — die Geschichte der Wissenschaft kann dabei doch nur gewinnen. Wenn sich beispielsweise nunmehr herausstellt, dass Steiner, als er die berühmte Abhandlung über Flächen dritter Ordnung veröffentlichte, die vorgängigen Entdeckungen der Engländer (über das „Pentaeder“ u s. w.) im wesentlichen sehr wohl gekannt hat — ohne doch ihrer irgendwie Erwähnung zu thun —, so kann das nur zu gerechterer Abwägung der gegenseitigen Prioritätsansprüche dienen, ohne dass den Leistungen Steiners dadurch nennenswerter Abbruch geschieht.

Der Briefwechsel zwischen Steiner und Schläfli erstreckt sich trotz seines ungemein reichen Inhalts nur über etwa sieben Jahre (1850—1856); er wird veranlasst (abgesehen von der weiter zurückreichenden persönlichen Bekanntschaft) durch einen Brief Steiner's an den gemeinschaftlichen Freund Ris in Bern im Jahre 1848. Steiner lässt hierin Schläfli, der damals noch in bedrängten Umständen in Thun lebte, einige schwierige Aufgaben über die Configuration der Doppeltangenten der Kurven vierten Grades, sowie über Polaren von (algebraischen) Kurven vorlegen.

Die Antwort Schläflis, mit der der nähere Verkehr zwischen beiden Geometern erst beginnt, erfolgt erst über zwei Jahre später (Dez. 1850). Schläfli löst die ihm gestellten Aufgaben nicht, wie denn überhaupt im Anfange die Briefe einen einseitigen Charakter tragen, vielmehr berichtet er über seine eigenen umfassenden Untersuchungen (insbesondere über Elimination und über die Theorie der Räume von $n$ Dimensionen) und will hierüber das Urteil Steiners einholen, der seinerseits wiederum eine direkte Antwort mit dem Hinweise umgeht, er verstände von den fraglichen Dingen zu wenig.

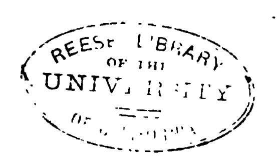
Allmählich aber, und dies hängt eng damit zusammen, dass die Stellung Schläflis in Bern sich hebt — wozu Steiner sein redliches Teil beiträgt — erwärmt sich Schläfli für die Steinerschen Gedankengänge und es währt nicht lange, so wird er geradezu ein unentbehrlicher Mitarbeiter des alternden Meisters, indem er mit seinen überlegenen, systematischen, algebraischen Methoden immer da eingreift, wo die geometrische Anschauung und Divination des anderen den Problemen nicht mehr gewachsen ist. Referent kann sich nicht versagen, eine diesbezügliche Stelle anzuführen, die zugleich von dem urwüchsigen Humor Steiners Zeugnis ablegt. Als Steiner bei der Untersuchung einer gewissen Raumkurve zwölfter Ordnung nicht recht vorwärts kommen kann, schreibt er an den Freund (Seite 61) „Liege ich auch wie ein Halbtodter im Schneegestöber — so fasse ich meinen treuen, starken Bernhardiner beim Schwanz und er wird mich aus der dustern Kluft herausreissen“.

Die Fragen, die zwischen beiden Forschern diskutiert werden, stellen einen wesentlichen Teil der allgemeinen Theorie der algebraischen Kurven und Flächen dar; sie greifen so tief ein, dass sie auch heute noch nicht sämtlich gelöst sind. Wenn trotzdem diese Theorie seither einen solchen Aufschwung genommen hat, so liegt der Grund darin, dass sich die Geometrie

Begriffe und Sätze aus der algebraischen Funktionentheorie (z. B. den sogenannten Restsatz) zu eigen gemacht hat, die es ihr ermöglichen, grosse Klassen von Erscheinungen unter einem Gesichtspunkt zusammenzufassen, die damals an jeder Kurve und Fläche einzeln studiert werden mussten. Insofern ist Steiner eigentlich eine tragische Figur; er ist der letzte grosse Träger einer Epoche, in der individuelle geometrische Beanlagung noch souverän fremde Methoden verachten konnte.

Der Verkehr zwischen Steiner und Schläfli geriet, wie fast vorauszusehen war, ins Stocken aus Anlass einer Prioritätsfrage bezüglich der Eigenschaften einer speziellen Hypocycloide.

W. Fr. Meyer.



# Bibliographie

vom 14. Oktober bis 25. November 1897.

---

## Periodische Schriften.

Abhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-physikalische Klasse. 24. Bd. Nr. I. Leipzig, Hirzel. M. 3.

Fortschritte der Physik. Herausgegeben von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Namenregister nebst einem Sach-Ergänzungsregister zu Bd. XXI (1865) bis XLIII (1887), bearbeitet von B. Schwalbe. 1. Hälfte. Berlin, Reimer. M. 30.

Fortschritte, die, der Physik im Jahr 1896. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 52. Jahrgang. 3. Abt. Kosmische Physik. Redigiert von Richard Assmann. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 21.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Begründet von Carl Ohrtmann, herausgegeben von Emil Lampe. 26. Bd. Jahrgang 1895. 2. Heft. Berlin, Reimer. M. 6. 40.

## Reine Mathematik.

Fricke, Rob., und Klein, Fel., Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. 1. Bd. Die gruppentheoretischen Grundlagen. Leipzig, B. G. Teubner. M. 22.

Müller, Carl Adf., Multiplikationstabellen, auch für Divisonen anwendbar. Karlsruhe, Braun. geb. M. 3.

Bravais, A., Abhandlung über die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raum verteilten Punkten (1848). Übersetzt und herausgegeben von C. und E. Blasius (Ostwalds Klassiker Nr. 90). Leipzig, Engelmann. M. 2.

Dirichlet, G. Lejeune, Untersuchungen über verschiedene Anwendungen der Infinitesimalanalysis auf die Zahlentheorie (1839—1840). Deutsch herausgegeben von R. Haussner (Ostwalds Klassiker Nr. 91). Ebenda. M. 2.

Schultz, E., Vierstellige mathematische Tabellen (Ausgabe A) für gewerbliche Lehranstalten. 2. Auflage. Essen, Bädeker. geb. M. 1. 20.

## Angewandte Mathematik.

FECHNER, GUST. THDR., Kollektivmaßlehre. Im Auftrag der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften herausgegeben von GOTTL. FRIEDR. LIPPS. Leipzig, Engelmann. M. 14.

JORDAN, W., Handbuch der Vermessungskunde. 2. Bd., Feld- und Landmessung. 5. Auflage. 2. Lieferung. Stuttgart, Metzler. M. 8. 20.

KRAUSS, FRITZ, Graphische Kalorimetrie der Dampfmaschinen. Berlin, Springer. M. 2.

SCHWARTZE, THDR., Neue Elementar-Mechanik für technische Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 4. 80.

GIRNDT, MART., Raumlehre für Baugewerkschulen und verwandte gewerbliche Lehranstalten. 1. Teil. Lehre von den ebenen Figuren. Mit 227 der Baupraxis entlehnten Aufgaben. Leipzig, B. G. Teubner. kart. M. 2. 40.

KLEIBER, MAX, Das projektive Zeichnen. 50 (zum Teil farbige) Vorlageblätter mit begleitendem Text. 2. Auflage. Stuttgart, Effenberger. In Mappe M. 12.

SCHLOTKE, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. Teil. Spezielle darstellende Geometrie. 3. Auflage. Dresden, Kühtmann. M. 3. 60.

SINRAM, A., Fragmente II zum kosmischen Bewegungsgesetz (Incitations-Theorie) und zur Mechanik des Himmels. Hamburg, Gräfe & Sillem. M. —. 40.

STICHTENOTH, ALB., Untersuchung über die Bahn des Kometen 1822 IV. Leipzig, Engelmann. M. 4.

GROSSMANN, LUDW., Die Mathematik im Dienste der Nationalökonomie unter Rücksichtnahme auf die praktische Handhabung der Disziplinen der Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik. 9. Lieferung. Wien, Selbstverlag. M. 5.

MOSHAMMER, KARL, Hydromechanik. Wien, Deuticke. M. 2.

PERSON, BENJ., Tabellen zur Bestimmung der Trägheitsmomente symmetrischer und unsymmetrischer beliebig zusammengesetzer Querschnitte. Zürich, Speidel. M. 2.

HUBER, PH., Katechismus der Mechanik (WEBERS illustrierte Katechismen Nr. 70). 6. Auflage. Neu bearbeitet von WALTH. LANGE. Leipzig, Weber. geb. M. 3. 50.

LANGE, WALTH., Katechismus der Statik mit gesonderter Berücksichtigung der zeichnerischen und rechnerischen Methoden (WEBERS illustrierte Kathechismen Nr. 165). Ebenda. M. 4.

COHN, BERTH., Über die Gausssche Methode, aus den Beobachtungen dreier gleichen Sternhöhen die Höhe, Zeit und Polhöhe zu finden und praktische Hilfsmittel zu ihrer Anwendung. Dissertation. Strassburg, Singer. M. 4.

**Physik und Meteorologie.**

ENGELMANN, TH. W., Tafeln und Tabellen zur Darstellung der Ergebnisse spektroskopischer und spektrophotometrischer Beobachtungen. Leipzig, Engelmann. M. 1. 80.

HOMÉN, THDR., Der tägliche Wärmeumsatz im Boden und die Wärmestrahlung zwischen Himmel und Erde. (Aus: Acta societatis scientiarum fennicae). Leipzig, Engelmann. M. 10.

JÄGER, GUST., Die Lösung der Mondfrage. Stuttgart, Kohlhammer. M. 2.

VIOLLE, J., Lehrbuch der Physik. Deutsch von E. GUMLICH, W. JÄGER, ST. LINDECK. 2. Teil. Akustik und Optik. 2. Bd. Geometrische Optik. Berlin, Springer. M. 8.

WÜLLNER, ADPH., Lehrbuch der Experimentalphysik. 5. Auflage. 3. Bd. Die Lehre vom Magnetismus und von der Elektrizität mit einer Einleitung der Grundzüge der Lehre vom Potential. Leipzig, B. G. Teubner. M. 18.

ERNECKE, ERICH, Über elektrische Wellen und ihre Anwendung zur Demonstration der Telegraphie ohne Draht nach MARCONI. Experimentalvortrag. Berlin, Gärtner. M. —. 80.

LOMMEL, E. v., Lehrbuch der Experimentalphysik. Leipzig, Barth. M. 6. 40.

ERNST, CHR., Eine Theorie des elektrischen Stromes auf Grund des Energieprinzipes. München, Lüneburg. M. 2.

LOUGUININE, W., Beschreibung der Hauptmethoden, welche bei der Bestimmung der Verbrennungswärme üblich sind. Berlin, Friedländer und Sohn. M. 10.

SCHOLLMEYER, G., Was muss der Gebildete von der Elektrizität wissen? Gemeinverständliche Belehrung über die Kraft der Zukunft. 6. Auflage. Neuwied, Heuser. M. 1. 50.

THOMPSON, SILVANUS P., Elementare Vorlesungen über Elektrizität und Magnetismus. Deutsch auf Grund der neuesten Auflage des Originals von A. HIMSTEDT. 2. Auflage. Tübingen, Laupp. M. 7.

GRÄTZ, L., Kurzer Abriss der Elektrizität. Stuttgart, Engelhorn. geb. M. 3.

# Mathematisches Abhandlungsregister.

## 1896.

### Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. Dezember.

## A.

### Abbildung.

440. Konforme Abbildung der inneren Fläche eines Kreises in die innere Fläche eines regulären Vielecks. Ulr. Bigler. Grun. Archiv 2. R. XIV, 360.
441. Sur la représentation de la surface cubique générale sur un plan. F. Dumont. N. ann. math. Sér. 3, XV, 318.
442. Über diejenige punktweise eindeutige Beziehung zweier Flächenstücke aufeinander, bei welcher jeder geodätischen Linie des einen eine Linie konstanter geodätischer Krümmung des anderen entspricht. F. Busse. Berl. Akad. Ber. 1896[1], 651.
443. Sur la construction des cartes géographiques. D. A. Gravé. Journ. Math. Sér. 5, II, 317.

### Abelsche Transcendenten.

444. Remarques diverses sur les fonctions abéliennes. H. Poincaré. Journ. Math. Sér. 5, I, 219.
445. Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre 3. G. Humbert. Journ. Math. Sér. 5, II, 263.

### Absolute Geometrie.

446. Zwei Sätze der nicht-euklidischen Geometrie. Max Simon. Math. Annal. XLVIII, 607.

### Analytische Geometrie der Ebene.

447. Étude analytique sur la symétrie. S. Mangeot. N. ann. math. Sér. 3, XV, 403.
448. Théorèmes sur les podaires. Duporcq. N. ann. math. Sér. 3, XV, 341.
449. Sur les développées successives. G. Tzitzéica. N. ann. math. Sér. 3, XV, 247.
450. Sur les courbes de direction. P. Appell. N. ann. math. Sér. 3, XV, 491.
451. Propriété de deux caustiques réciproques par rapport à une courbe donnée. Duporcq. N. ann. math. Sér. 3, XV, 339.
452. Über das eigentliche Oval. Arm. Wittstein. Grun. Archiv 2. R. XIV, 109, 441.
453. Cartesian ovals. A. C. Dixon. Quart. Journ. math. XXVIII, 375.
454. Propriété de la lemniscate. Ern. Foucart. N. ann. math. Sér. 3, XV, 98.
455. Cercle tangent à une lemniscate et ayant son centre sur une hyperbole équilatère. Ern. Foucart. N. ann. math. Sér. 3, XV, 148.
456. Lieu des points milieux des cordes d'un limaçon de Pascal qui sont vues du point double réel sous un angle droit. E. N. Barisien. N. ann. math. Sér. 3, XV, 294.
457. Propriétés des cardioïdes. Ern. Foucart. N. ann math. Sér. 3, XV, 145.
458. Über die Kurven, deren Bogen der Tangente des Leitstrahlwinkels proportional ist, und die damit verwandten Kurvenscharen. Aug. Velde. Grun. Archiv 2. R. XIV, 200.

Vergl. Ellipse. Geometrie (höhere). Hyperbel. Kegelschnitte. Kreis. Parabel.

### Analytische Geometrie des Raumes.

459. Sur les courbes algébriques à torsion constante. Eug. Fabry. Compt. Rend. CXXIII, 865.

460. A geometrical locus. G. B. Mathews. Quart. Journ. math. XXVIII, 190.
461. Quelques propriétés des biquartiques gauches. E. Duporcq. N. ann. math. Sér. 3, XV, 266.
462. Sur un cas remarquable de la projection gauche. G. Fonteué. N. ann. math. Sér. 3, XV, 369.

Vergl. Geometrie (höhere). Hyperbel. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

### Astronomie.

463. Sur les expression approchées des termes d'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbatrice. N. Coculesco. Journ. Math. Sér. 5, I, 359.
464. Sur le développement approché de la fonction perturbatrice dans le cas des inégalités d'ordre élevé. M. Hamy. Journ. Math. Sér. 5, II, 381.
465. Sur la désagrégation des comètes. O. Callandreau. Compt. Rend. CXXIII, 663.
466. Sur l'extension que l'on peut donner au théorème de Poisson, relatif à l'invariabilité des grands axes. H. Andoyer. Compt. Rend. CXXIII, 790.

### Ausdehnungslehre.

467. Über das gemischte Produkt. Em. Müller. Math. Annal. XLVIII, 589.

## B.

### Bestimmte Integrale.

468. Sur la définition de l'intégrale définie. M Fouché. N. ann. math. Ser. 3, XV, 207. — C. Burali-Forti ibid. 495.
469. Une leçon sur la méthode de quadrature de Gauss. L. Raffy. N. ann. math. Sér. 3, XV, 249.
470. Sur un théorème de Kronecker. G. Koenigs. Journ. Math. Sér. 5, II, 41.
471. Über eine Art von simultaner Darstellung bestimmter Integrale. G. Kowalewski. Crelle, CXVII, 267.
472. Über ein discontinuierliches Integral. E. Gabler. Math. Annal. XLVIII, 37.
473. Sur les intégrales de Fresnel. V. Jamet. N. ann. math. 3, XV, 372. — Eug. Fabry ibid. 504.
474. Sur l'égalité $z i \pi [f(x) - f(o)] = \int f'(z) \log z \, dz$, $f(z)$ désignant un polynôme entier en $z$ et l'intégrale étant prise dans le sens positif le long d'un contour fermé simple entourant l'origine. Audibert. N. ann. math Sér. 3, XV, 343.

Vergl. Quadratur.

## C.

### Combinatorik.

475. Sur les permutations quasi-alternées. Dés. André. Journ. Math. Sér. 5, I, 315.

## D.

### Differentialgleichungen.

476. Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre. A. Korkine. Compt. Rend. CXXIII, 38, 139. — P. Painlevé ibid. 88 (vergl. Nr. 51).
477. Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre. A. Korkine. Math. Annal. XLVIII, 317.
478. Sur l'extension des idées de Galois à la théorie des équations différentielles. Em. Picard. Math. Annal. XLVII, 155. [Vergl. Bd. XLI, Nr. 305.]
479. Sur une application de la théorie des groupes continus à l'étude des points singuliers des équations différentielles linéaires. F. Marotte. Compt. Rend. CXXIII, 867, 933.
480. Zur Theorie der adjungierten Differentialgleichung. P. Günther. Crelle, LXVII, 168.
481. Über die Beschaffenheit der Differentialgleichungen der $n$ Adjungierten, die zu einer linearen Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung gehören. E. Grünfeld. Crelle, CXVII, 273.
482. Neue Beweise für die Konvergenz der Reihen, welche bei der Integration linearer Differentialgleichungen in der Umgebung der einfachsten singulären Stellen auftreten. Ad. Kneser. Math. Annal. XLVII, 408.

483. Untersuchung und asymptotische Darstellung gewisser linearer Differentialgleichungen bei grossen reellen Werten des Arguments. Ad. Kneser. Crelle, CXVII, 72 (vergl. Nr. 46).
484. Über eine Klasse linearer homogener Differentialgleichungen. L. Fuchs. Berl. Akad. Ber. 1896², 753.
485. Zur Theorie der Eulerschen Transformierten einer homogenen linearen Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse. L. Schlesinger. Crelle, CXVII, 148 (vergl. Nr. 65).
486. Über die Reihenentwickelung der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen. J. Horn. Crelle CXVII, 104, 254 (vergl. Nr. 75).
487. Sur une série relative à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. A. Liapounoff. Compt. Rend. CXXIII, 1248.
488. Sur les résidus des fonctions définies par les équations differentielles. M. Petrovitch. Math. Annal. XLVIII, 75.
489. Über eine Anwendung d. Theorie d. linearen Differentialgleichungen auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. L.W. Thomé. Crelle, CXVII, 185.
490. Sur l'équation de Lamé. Andr. Markoff. Math. Annal. XLVII, 598.
491. Intégration de $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n^2x^2y=0$. Maillard. N. ann. math. Sér. 3, XV, 141.
492. On singular solutions of differential equations of the first order. Miss Maddison. Quart. Journ. math. XXVIII, 311.
493. Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre. E. Goursat. Compt. Rend. CXXIII, 680.
494. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables. E. Cotton. Compt. Rend. CXXIII, 936.
495. Sur une équation linéaire aux dérinées partielles du second ordre. J. Le Roux. Compt. Rend. CXXIII, 1052.
496. Sulle equazioni a derivate partiali del second' ordine a tre variabili indipendenti. G. Vivanti. Math. Annal. XLVIII, 474.
497. Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen in drei Variabeln. E. v. Weber. Math. Annal. XLVII, 229.
498. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles simultanées. E. v. Weber. Compt. Rend. CXXIII, 292.
499. Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=k^2 f$ für elliptische und parabolische Koordinaten. J. H. Hartenstein. Grun. Archiv 2. R. XIV, 170.
500. Sur les systèmes algébriques et leurs relations avec certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. Et. Delassus. Compt. Rend. CXXIII, 546 (vergl. Nr. 74).
501. Sur les transformations des systèmes différentiels. Et. Delassus. Compt. Rend. CXXIII, 1246.
502. Sur la détermination des intégrales d'une équation aux dérivées partielles par ses valeurs sur un contour fermé. Em. Picard. Journ. Math. Sér. 5, II, 295.
503. Sur une suite d'équations linéaires aux dérivées partielles provenant de la théorie des surfaces. T. Craig. Compt. Rend. CXXIII, 634.
504. Sur les surfaces à lignes de courbure isométriques. T. Craig. Compt. Rend. CXXIII, 794.

Vergl. Geschichte der Mathematik 578. Mechanik. Oberflächen.

### Differentialquotient.

505. Sur une différentielle exacte. L. Autonne. N. ann. math. Sér. 3, XV, 232.
506. Sur la dérivée des fonctions interpolées. E. M. Lémeray. N. ann. math. Sér. 3, XV, 325.

## E.

### Elastizität.

507. Sur l'équilibre d'élasticité d'un corps tournant. L. Lecornu. Compt. Rend. CXXIII, 96.
508. Sur le problème des membranes vibrantes. Le Roy. Compt. Rend. CXXIII, 1258.

**Elektrizität.**

509. Remarques sur une expérience de M. Birkeland. H. Poincaré. Compt. Rend. CXXIII, 530.
510. Sur la tension longitudinale des rayons cathodiques. Colard. Compt. Rend. CXXIII, 1057.
511. Sur quelques erreurs admises comme vérités en électromagnétisme. Vaschy. Compt. Rend. CXXIII, 1059.
512. Méthodes de calcul en électromagnétisme. Vaschy. Compt. Rend. CXXIII, 1261.

**Ellipse.**

513. Sur les ellipses concentriques. E. Duporcq. N. ann. math. Sér. 3, XV, 566.
514. Ellipse lieu du centré du cercle des neuf points d'un triangle variable. H. Brocard. N. ann. math. Sér. 3, XV, 390.
515. Ellipse lieu des positions successives des centres de courbure d'une épicycloide roulant sur une droite. A. Mannheim. N. ann. math. Sér. 3, XV, 245.
516. Hypocycloide a quatre rebroussements enveloppe des cordes d'une ellipse sous l'angle d'anormalie excentrique relatif à leurs points de départ. Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XV, 576.

**Elliptische Transcendenten.**

517. Vier Briefe von Arthur Cayley über elliptische Modulfunktionen. Math. Annal. XLVII, 1.
518. Bemerkungen zu Cayleys Briefen. H. Weber. Math. Annal. XLVII, 6.
519. Sur une formale fondamentale de Kronecker. J. Franel. Math. Annal. XLVIII, 595.
520. Expression des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur au moyen des fonctions $\Theta$ et $\zeta$. E. Mathy. Journ. Math. Sér. 5, II, 305.
521. Das Additionstheorem der Funktion $p(u)$. P. Stäckel. Math. Annal. XLVII, 404.
522. Über die Transformation der elliptischen Funktionen. Fr. Beer. Grun. Archiv 2. R. XIV, 113.
523. Sur une application des fonctions elliptiques. X. Stouff. N. ann. math. Sér. 3, XV, 262.

Vergl. Funktionen 533. Thetafunktionen.

**F.**

**Formen.**

524. Über die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen. G. Frobenius. Berl. Akad. Ber. 1896[1], 7.
525. Über vertauschbare Matrizen. G. Frobenius. Berl. Akad. Ber. 1896[1], 601.
526. Zur Theorie der adjungierten Substitutionen. Gust. Rados. Math. Annal. XLVIII, 417.
527. Sur la division algébrique appliquée aux polynomes homogènes. H. Andoyer. Journ. Math. Sér. 5, I, 61.
528. Sur les formes quadratiques définies à indéterminées conjuguées de M. Hermite. Alfr. Loewy. Compt. Rend. CXXIII, 168. — L. Fuchs ibid. 289.
529. Zur Theorie der linearen Substitutionen. Alfr. Loewy. Math. Annal. XLVIII, 97.
530. Réduction simultanée de deux formes quadratiques de trois variables à des formes canoniques. Application à l'étude d'un système de deux coniques. H. Vogt. N. ann. math. Sér. 3, XV, 441.

Vergl. Substitutionen.

**Funktionen.**

531. Sur l'extension aux fonctions entières d'une propriété importante des ploynomes. Em. Borel. Compt. Rend. CXXIII, 556.
532. Über Riemannsche Flächen mit beschränkt veränderlichen Verzweigungspunkten. P. Hoyer. Math. Annal. XLVII, 47.
533. Über die Parameterbestimmung von Punkten auf Kurven zweiter und dritter Ordnung. Eine geometrische Einleitung in die Theorien der logarithmischen und elliptischen Funktionen. C. Juel. Math. Annal. XLVII, 72.
534. Über Riemannsche Formenscharen auf einem beliebigen algebraischen Gebilde. E. Ritter. Math. Annal. XLVII, 157.

535. Beitrag zur Theorie der rationalen Funktionen. Eman. Beke. Math. Annal. XLVII, 441.
536. Über die Mittelwerte der Funktionen einer reellen Variabeln. L. Maurer. Math. Annal. XLVII, 263.
537. Über eine besondere Klasse von Funktionen einer reellen Veränderlichen. E. Study. Math. Annal. XLVII, 298.
538. Über die Reduction algebraischer Systeme auf die kanonische Form. K. Hensel. Crelle, CXVII, 129.
539. Über die Fundamentalteiler algebraischer Gattungsbereiche. K. Hensel. Crelle, CXVII, 333.
540. Über die Elementarteiler zweier Gattungen, von denen die einen unter der anderen enthalten ist. K. Hensel. Crelle, CXVII, 346.
541. Über die Darstellung der Integrale erster Gattung durch ein Fundamentalsystem. K. Hensel. Crelle CXVII, 29 (vergl. Nr. 129).
542. Über kanonische Systeme algebraischer Funktionen einer Veränderlichen, die einem Gattungsbereich dritter oder vierter Ordnung angehören. K. Fischer. Crelle, CXVII, 1 (vergl. Nr. 129).
543. Sur une classe de fonctions transcendentes. Em. Picard. Compt. Rend. CXXIII, 1035.
544. Concerning transcendentally transcendental functions. El. Hast. Moore. Math. Annal. XLVIII, 49.
545. Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti e infinitesimi attuali. G. Veronese. Math. Annal. XLVII, 423 (vergl. Bd. XLI Nr. 479).
546. Über transfinite Zahlen. W. Killing. Math. Annal. XLVIII, 425.
547. Sur quelques propriétés des ensembles d'ensembles et leurs applications à la limite d'un ensemble variable. C. Burali-Forti. Math. Annal. XLVII, 20.
548. Über die hypergeometrische Funktion mit einem Nebenpunkt. E. Ritter. Math. Annal. XLVIII, 1.
549. Sur la fonction $\zeta(s)$. Hadamard. Compt. Rend. CXXIII, 93 (vergl. Nr. 138).
550. Über die Isotimen und Isophasen der Funktion $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$. Ulr. Bigler. Grun. Archiv 2. R. XIV, 337.
551. Sur le nombre des périodes d'une fonction uniforme. A. Astor. N. ann. math. Sér. 3, XV, 227.
552. Sur la convergence des substitutions uniformes. E. M. Lémeray. Compt. Rend. CXXIII, 793.
553. Über Funktionen zweier reeller Variabeln. O. Biermann. Math. Annal. XLVIII, 393.
554. Über Fuchssche Funktionen zweier Variabeln. S. Kempinski. Math. Annal. XLVII, 573.
555. Über die Wertschwankungen der harmonischen Funktionen zweier reellen Veränderlichen und der Funktionen eines komplexen Argumentes. F. Schottky. Crelle, CXVII, 225.
556. Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen eines algebraischen Gebildes zweier Veränderlichen. P. Hoyer. Math. Annal. XLVII, 113.

Vergl. Abelsche Transcendenten. Ausdehnungslehre. Bestimmte Integrale. Combinatorik. Differentialgleichungen. Differentialquotienten. Elliptische Transcendenten. Formen. Gleichungen. Kettenbrüche. Maxima und Minima. Potential. Reihen. Substitutionen. Thetafunktionen. Zahlentheorien.

## G.

### Geodäsie.

557. Sur une nouvelle méthode de M. Jäderin pour les mesures de base. Bassot. Compt. Rend. CXXIII, 155.
558. Sur l'erreur de réfraction dans le nivellement géométrique. Ch. Lallemand. Compt. Rend. CXXIII, 222, 297.
559. Sur la stabilité des piquets employés comme repères provisoires dans les nivellements de précision. Ch. Lallemand. Compt. Rend. CXXIII, 457.

### Geometrie (descriptive).

560. Über den Polkeschen Satz. Fr. Schur. Crelle, CXVII, 24.

### Geometrie (höhere).

561. Sur une géométrie de l'espace réglé. R. de Saussure. Compt. Rend. CXXIII 734 (vergl. Nr. 684).
562. Zur projektiven Geometrie. M. Pasch. Math. Annal. XLVIII, 111.
563. Sur une double série récurrente de points toujours homocycliques et de cercles toujours en collinéation attachés aux polygones d'ordre 3, 4, 5... résultant de $\nu$ droites indépendantes, employées successivement dans un ordre donné. P. Serret. Compt. Rend. CXXIII, 396.
564. Sur une classe de propositions analogues au théorème Miquel-Clifford, et sur les propriétés qui en résultent pour les polygones de 5, 6, 7, 11, 12 côtés, circonscrits à l'hypocycloïde de module $\frac{1}{3}$. P. Serret. Compt. Rend. CXXIII, 415.
565. Sur l'emploi d'un cercle fixe, dérivé d'un groupe quelconque de 7 tangantes d'une conique, pour définir, a priori, le cercle dérivé de 7 droites quelconques. P. Serret. Compt. Rend. CXXIII, 442.
566. Détermination des points d'inflexion dans le développement de la section plane d'un cone. F. Balitrand. N. ann. math. Sér. 3, XV, 65 [vergl. Bd. XL, Nr. 459].
567. Über eine merkwürdige Kreisfigur. W. Godt. Math. Annal. XLVII, 564.
568. Sur la transformation homographique des propriétés métriques des figures planes. G. Brocard. N. ann. math. Sér. 3, XV, 426.
569. Note on adjoint curves. Miss C. A. Scott. Quart. Journ. math. XXVIII, 377.
570. Projektive Erzeugung der Kurven $m^{\text{ter}}$ Ordnung $C^m$. C. Küpper. Math. Annal. XLVIII, 401.
571. Die Konfiguration $(12_6, 16_3)$ und die zugehörigen Gruppen von 2304 Kollineationen und Correlationen. Jul. Fedor. Math. Annal. XLVII, 375.
572. Über eine einfache Gruppe von 360 ebenen Kollineationen. A. Wiman. Math. Annal. XLVII, 531.
573. Über die Diskontinuität gewisser Kollineationsgruppen. Rob. Fricke. Math. Annal. XLVII, 557.
574. Sur le théorème de Salmon. E. Goursat. N ann. math. Sér. 3, XV, 20.
575. Sur une quartique unicursale. A. Droz-Farny. N. ann. math. Sér. 3, XV, 485.

Vergl. Kegelschnitte. Kinematik.

### Geschichte der Mathematik.

576. Altbabylonische Maße und Gewichte. G. Reisner. Berl. Akad. Ber. 1896[1], 417.
577. Die geometrische Konstruktion als Existenzbeweis in der antiken Geometrie. H. G. Zeuthen. Math. Annal. XLVII, 222.
578. L'oeuvre géométrique de Sophus Lie. Fel. Klein. N. ann. math. Sér. 3, XV, 1.
579. Gustav Ferdinand Mehler (13 XII. 1835—13. VII. 1896). Mart. Krause. Math. Annal. XLVIII, 603.
580. Henry Resal (27. I. 1828—22. VIII. 1896). C. Jordan. Journ. Math. Ser. 5, II, 453. — M. Levy ibid. 455. Compt. Rend. CXXIII, 435.
581. H. L. Fizeau (24. IX. 1819—18. IX. 1896). A. Cornu. Compt. Rend. CXXIII, 471.
582. Felix Tisserand (1845—20. X. 1896). A. Cornu. Compt. Rend. CXXIII, 623.
583. Hugo Gyldèn (29. V. 1841 — 9. XI. 1896). O. Callendreau. Compt. Rend CXXIII, 771.
584. Karl Weierstraß (31. X. 1815—19. II. 1897). L. Fuchs. Crelle CXVII, 357.

### Gleichungen.

585. Über die Irreduktibilität ganzzahliger ganzer Funktionen. E. Netto. Math. Annal. XLVIII, 81.
586. Sur les fonctions entières. H. Laurent. N. ann. math. Sér. 3, XV, 23.
587. Sur les conditions sous les quelles une équation n'admet que des racines à partie réelle négative. A. Hurwitz. N. ann. math. Sér. 3, XV, 108 [vergl. Bd. XLI, Nr. 420].
588. Zur Theorie der Resultanten. E. Netto. Crelle CXVII, 57 (vergl. Nr. 199).
589. Bezirke der drei Wurzelformen der Gleichung vierten Grades. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XIV, 398.
590. Sur l'équation Jacobienne du sixième degré. Brioschi. Quart. Journ. math. XXVIII, 382.

591. Sur les racines de l'équation $x = a^x$. E. M. Lémeray. N. ann. math. Sér. 3, XV, 548.
592. Sur les équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés. M. d'Ocagne. Compt. Rend. CXXIII, 988.
593. Sur l'emploi des systèmes réguliers de points cotés dans la représentation des équations. M. d'Ocagne. Compt. Rend. CXXIII, 1254.
Vergl. Differentialgleichungen 500.

## H.

### Hydrodynamik.

594. Lois générales du régime uniforme dans les lits à grande section. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXIII, 7 (vergl. Nr. 207).
595. Du régime uniforme dans les canaux rectangulaires larges et dans les tuyaux ou canaux à section circulaire ou demi-circulaire. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXIII, 77.
596. Lois de deuxième approximation du régime uniforme, dans les tuyaux circulaires et dans les canaux démi-circulaires. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXIII, 141.
597. Sur l'équilibre et les mouvements des mers. H. Poincaré. Journ. Math. Sér. 5, II, 57, 217.
598. Sur le mouvement d'un solide dans un liquide indéfini. R. Liouville. Compt. Rend. CXXIII, 874.
599. Sur le mouvement d'un solide dans un liquide indéfini. W. Stekloff. Compt. Rend CXXIII, 1252.
600. On the stability of a frictionless liquid. Theory of critical planes. A. B. Basset. Math. Annal. XLVIII, 89.
601. Note on the form of the energy integral in the motion of an incompressible fluid. J. Brill. Quart. Journ. math. XXVIII, 185.
Vergl. Nautik.

### Hyperbel.

602. Elementare Bestimmung der Lage der gleichseitigen Hyperbel im Kegel. G. D. E. Weyer. Grun. Archiv 2. R. XIV, 139.
603. Deux triangles orthocentriques inscrits à une hyperbole équilatère. E. N. Barisien. N. ann. math. Sér. 3, XV, 295.
604. Propriété d'un triangle quelconque inscrit dans une hyperbole équilatère. H. Brocard. N. ann. math. Sér. 3, XV, 388.
605. Points dans lesquels une hyperbole équilatère est coupée par un cercle ayant pour centre un point de l'hyperbole. Ern. Foucart. N. ann. math. Sér. 3, XV, 146.
606. Propriété de 3 points dans lesquels une hyperbole est coupée par une circonférence ayant pour centre un point de l'hyperbole et passant par le symetrique de ce point. A. Mannheim. N. ann. math. Sér. 3, XV, 290. — Cl. Servais ibid. 379.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 455.

## K.

### Kegelschnitte.

607. Zur Theorie des Kegelschnittbüschels. A. Wimann. Grun. Archiv 2. R. XIV, 149.
608. Propriété d'un faisceau de coniques. A. Droz-Farny. N. ann. math. Sér. 3, XV, 486.
609. Propriété des coniques passant par deux points fixes et tangentes à une droite donnée en un point donné. A. Droz-Farny. N. ann. math. Sér. 3, XV, 439.
610. Zum Pythagoräischen Lehrsatz. K. Zaradnik. Grun. Archiv 2. R. XIV, 105.
611. Sur la perspective des arcades. A. Boulanger. N. ann. math. Sér 3, XV, 376.
612. Sur les segments de coniques limités à une normale. M. d'Ocagne. N. ann. math. Sér. 3, XV, 215, 281.
613. Propriété du triangle formé par les tangentes menées d'un point à une conique et par la polaire de ce point. A. Droz-Farny. N. ann. math. Sér. 3, XV, 150.



614. On considère tous les cercles tangents en un même point à une conique donnée. Lieu du pôle de la seconde corde d'intersection du cercle et de la conique par rapport à la conique. A. Mannheim. E. N. Barisien. N. ann. math. Sér. 3, XV, 292.

Vergl. Ellipse. Formen 530. Hyperbel. Kreis. Parabel.

### Kettenbrüche.

615. Nouvelles applications des fractions continues. Andr. Markoff. Math. Annal. XLVII, 579.
616. Sur une représentation géométrique du développement en fraction continue ordinaire. Fel. Klein. N. ann. math. Sér. 3, XV, 327.

### Kinematik.

617. Sur un déplacement remarquable. R. Bricard. Compt. Rend. CXXIII, 939.
618. Un plan se déplace en restant tangent à une surface; pour une quelconque de ses positions sa caractéristique passe par le point où il touche cette surface. Raym. Sée. N. ann. math. Sér. 3, XV, 173.

### Kreis.

619. Dreizehn Auflösungen des Malfattischen Problems. C. Davids. Grun. Archiv 2. R. XIV, 276 [vergl. Bd. XLI, Nr. 176].
620. Si 3 cercles sont inscrits à un triangle, les quatrièmes tangentes communes qu'ils admettent, pris deux à deux, forment un triangle homologique du premier. A. Droz-Farny. N. ann. math. Sér. 3, XV, 150.
621. Droite engendrée au moyen d'une circonférence fixe et d'une circonférence variable. A. Droz-Farny. N. ann. math. Sér. 3, XV, 434.
622. Enveloppe de l'axe radical d'un cercle fixe et d'un cercle variable tangent à deux cercles donnés. E. N. Barisien. N. ann. math. Sér. 3, XV, 577. — X. Antomari ibid. 582.

Vergl. Abbildung 440. Ellipse 514.

### Krümmung.

623. Sur des centres de courbure successifs. La Géocine. N. ann. math. Sér. 3, XV, 536.
624. Sur le rayon du cercle osculatun d'une courbe quelconque comme limite d'un certain quotient. G. Tzitzéica. N. ann. math. Sér. 3, XV, 198.
625. Le théorème de Gauss sur la courbure. A. Colinon. N. ann. math. Sér. 3, XV, 63.
626. Die Amslerschen Flächensätze im Gebiete affin veränderlicher Systeme und auf den Flächen konstanter Gaussscher Krümmung. Joh. Kleiber. Grun. Archiv 2. R. XIV, 405.
627. Biegung mit Erhaltung der Hauptkrümmungsradien. J. Hazzidakis. Crelle CXVII, 42.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 459. Ellipse 515. Parabel 681.

## M.

### Maxima und Minima.

628. Si $x$, $y$, $z$ sont trois nombres positifs et $x+y+z=1$ il s'en suit
$$(1-x)(1-y)(1-z) < 8xyz.$$
Gallucci. N. ann. math. Sér. 3, XV, 96.

### Mechanik.

629. Über die Prinzipien der Mechanik. L. Königsberger. Berl. Akad. Ber. 1896*, 899, 1173.
630. Über das Prinzip der kleinsten Aktion und das Hamiltonsche Prinzip. Mor. Réthy. Math. Annal. XLVIII, 514.
631. Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action. H. Poincaré. Compt. Rend. CXXIII, 915.
632. Beiträge zu Riemanns Integrationsmethode für hyperbolische Differentialgleichungen und deren Anwendung auf Schwingungsprobleme. W. Wirtinger. Math. Annal. XLVIII. 365.

633. Sur les intégrales quadratiques des équations de la dynamique. G. de Pirro. Compt. Rend. CXXIII, 1054. — Appell ibid. 1057.
634. Sur une mécanique réglée. R. de Saussure. Compt. Rend. CXXIII, 796 [vergl. Nr. 561].
635. Sur les transformations des équations de la dynamique. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXIII, 392.
636. Sur les singularités des équations de la dynamique. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXIII, 636.
637. Sur les singularités des équations de la dynamique et sur le problème des trois corps. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXIII, 871.
638. Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps. H. Poincaré. Compt. Rend. CXXIII, 1031.
639. Sur la méthode de Bruns (problème des trois corps). H. Poincaré. Compt. Rend. CXXIII, 1224.
640. Sur le problème des trois corps. D. Gravé. N. ann. math. Sér. 3, XV, 537.
641. Remarque sur les problèmes de forces centrales. Em. Borel. N. ann. math. Sér. 3, XV, 236.
642. Recherches analytiques sur un cas de rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe. P. A. Nekrassoff. Math. Annal. XLVII, 445.
643. Sur le déplacement de l'axe de rotation d'un corps solide dont une partie est rendue momentanément mobile par rapport au reste de la masse. Edm. & M. Fouché. Compt. Rend. CXXIII, 93.
644. Sur l'emploi des équations de Lagrange dans la théorie du choc et des percussions. P. Appell. Journ. Math. Sér. 5, II, 5.
645. Sur une proposition de mécanique. F. Siacci. Compt. Rend. CXXIII, 395.
646. Sur une question de mécanique. Astor. N. ann. math. Sér. 3, XV, 33, 377.
647. Sur le mouvement d'un corps grave de révolution suspendu par un point de son axe (der Kreisel). Fel. Klein. N. ann. math. Sér. 3, XV, 218.
648. On a dynamical top. G. P. Walker. Quart. Journ. math. XXVIII, 175.
649. Équations du mouvement d'un point matériel sur une surface quand on tient compte du frottement. W. de Tannenberg. N. ann. math. Sér. 3, XV, 201.
650. Über ebene einfache Fachwerke. Friedr. Schur. Math. Annal. XLVIII, 142.
651. Sur la résistance des ponts sous le passage de convois périodiques, notamment de ceux qui ont été prévus par le règlement du 29 Août 1891. Marc. Duplaix. Compt. Rend. CXXIII, 740.
652. Sur la photographie des bruits du coeur. A. de Holowinski. Compt. Rend. CXXIII, 162.

Vergl. Astronomie. Elastizität. Elektrizität. Elliptische Transcendenten 520. Hydrodynamik. Molekularphysik. Optik. Potential. Wärmelehre.

### Molekularphysik.

653. Sur quelques particularités des courbes de solubilité. H. Le Chatelier. Compt. Rend. CXXIII, 593.
654. Sur l'entropie moléculaire. G. Darzens. Compt. Rend. CXXIII, 940.
655. Sur le répartition des déformations dans les métaux soumis à des efforts. G. Charpy. Compt. Rend. CXXIII, 225, 488, 876. — L. Hartmann ibid. 444, 639.

Vergl. Wärmelehre.

## N.

### Nautik.

656. Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants. P. Duhem. Journ. Math. Sér. 5, I, 91.
657. Sur la stabilité d'un navire qui porte du lest liquide. P. Déhem. Journ. Math. Sér. 5, II, 23.
658. Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants. E. Guyon. Journ. Math. Sér. 5, II, 21.
659. Étude théorique sur la plongée des sous-marins. Leflaine. Compt. Rend. CXXIII, 860.

# O.

## Oberflächen.

660. Sur la déformation des surfaces. Guichard. Journ. Math. Sér. 5, II, 123.
661. Sur la déformation des surfaces. P. Stäckel. Compt. Rend. CXXIII, 677.
662. Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques. G. Castelnuovo et F. Enriques. Math. Annal. XLVIII, 241.
663. Über quadratische Transformationen und rationale Flächen mit Kegelschnittscharen. Th. Reye. Math. Annal. XLVIII, 113.
664. Sur une classe de surfaces isothermiques dépendant de deux fonctions arbitraires. A. Thybaut. Compt. Rend. CXXIII, 295 (vergl. Nr. 49).
665. Über Differentialgleichungen von Rotations- und Regelflächen. Ed. Doležal. Grun. Archiv 2. R. XIV, 1.
666. Abwickelbare Schraubenfläche. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XIV, 332.
667. Zur Theorie der Spiralflächen. Ebner. Grun. Archiv. 2. R. XIV, 241.
668. Sur le paraboloïde des 8 droites et les nappes de développées de surfaces. A. Mannheim. Compt. Rend. CXXIII, 983.
669. Détermination d'une surface du troisième ordre générale par sa hessienne. F. Dumont. N. ann. math. Sér. 3, XV, 312.
670. Sur un cône circulaire et un conoïde du quatrième ordre. Pier. Delix. N. ann. math. Sér. 3, XV, 556.

Vergl. Abbildung. Abelsche Transcendenten. Differentialgleichungen 503. 504. Funktionen. Krümmung 625. 626. 627.

## Oberflächen zweiter Ordnung.

671. Ein Beitrag zur Theorie der Flächen zweiten Grades. St. Glaser. Grun. Archiv 2. R. XIV, 156 [vergl. Bd. XLI, Nr. 155].
672. Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des centres de courbure principaux. A. Mannheim. Journ. Math. Sér. 5, II, 51.
673. Gleichseitig hyperbolischer Schnitt der Fläche zweiten Grades. R. Hoppe. Grun. Archiv 2 R. XIV, 436.
674. Sur l'intersection de deux quadriques. H. Andoyer. N. ann. math. Sér. 3, XV, 153.

## Optik.

675. Mathematische Theorie der Diffraction. A. Sommerfeld. Mathem. Annal. XLVII, 317.
676. Theorie der Reflexion und Brechung transversaler Kugelwellen mit Anwendung auf die Reflexion und Brechung des Lichtes. P. Jaerisch. Crelle, CXVII, 291.

# P.

## Parabel.

677. Relation entre les angles sous lesquels une normale à une parabole coupe l'axe de cette parabole et la parabole même dans son second point de rencontre avec celle-ci. Ern. Foucart. N. ann. math. Sér. 3, XV, 147.
678. Cercle passant par le sommet d'une parabole et par les deux points dans lesquels elle est coupée par une corde focale. A. Droz-Farny. N. ann. math. Sér. 3, XV, 196.
679. Propriété du cercle décrit sur une corde focale comme diamètre. A. Droz-Farny. N. ann. math. Sér. 3, XV, 197, 438.
680. Sur les cordes normales de la parabole. M. d'Ocagne. N. ann. math. Sér. 3, XV, 274. — Cl. Servais ibid. 378. — M. ibid. 432.
681. Propriété du cercle osculateur de la parabole. M. d'Ocagne. N. ann. math. Sér. 3, XV, 380.

## Planimetrie.

682. Construction du polygone régulier de 17 côtés au moyen du seul compas. L. Gérard. Math. Annal. XLVIII, 390.

## Potential.

683. Sur le problème de Dirichlet et les fonctions harmoniques fondamentales attachées à une surface fermée. Le Roy. Compt. Rend. CXXIII, 986.

## Q.

### Quadratur.

684. De l'aire plane balayée par un vecteur variable. Ern. Duporcq. Journ. Math. Sér. 5, I, 443.

## R.

### Reihen.

685. Fondements de la théorie des séries divergentes sommables. Em. Borel. Journ. Math. Sér. 5, II, 103 [vergl. Nr. 345, 346, 347].
686. Sur la région de sommabilité d'un développement de Taylor. Em. Borel. Compt. Rend. CXXIII, 548.
687. Sur les séries de Taylor. Em. Borel. Compt. Rend. CXXIII, 1051.
688. Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure. Em. Borel. Journ. Math. Sér. 5, II, 441.
689. Über Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Funktionen. Alfr. Pringsheim. Math. Annal. XLVII, 121.
690. Über Multiplikation und Nichtverschwinden Dirichletscher Reihen. F. Mertens. Crelle, CXVII, 169.
691. Sur la formule sommatoire d'Euler. J. Franel. Math. Annal. XLVII, 433.
692. Quelques exemples de séries doublement périodiques. P. Appell. N. ann. math. Sér. 3, XV, 126.
693. Über die Gaussischen Summen. Fr. Mertens. Berl. Akad. Ber. 1896[1], 217.
694. Sur les sommes de Gauss. P. de Séguier. Compt. Rend. CXXIII, 166.
695. Products and series involving prime numbers only. J. W. L. Gleisher. Quart. Journ. math. XXVIII, 1 (vergl. Nr. 354).
696. Sur le dévelloppement de $x^k$ en série ordonnée suivant les puissances du sinus de la variable. F. Gomes Teixeira. N. ann. math. Sér. 3, XV, 270.
697. Un problème sur les series. M. Petrovitch. N. ann. math. Sér. 3, XV, 58.

Vergl. Astronomie 464. Differentialgleichungen 482. 486. 487. Funktionen 531.

### Rektifikation.

698. Quelques propriétés des arcs des courbes algébriques planes ou gauches. G. Humbert. Journ. Math. Sér. 5, I, 181.
699. Einige durch den Ausdruck des Bogens bestimmte Kurven. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XIV, 328.

## S.

### Sphärik.

700. Sur l'aire du quadrilatère sphérique inscrit. H. Brocard. N. ann. math. Sér. 3, XV, 284.

### Stereometrie.

701. Sur une question de géométrie relative aux polyèdres. H. Bricard. N. ann. math. Sér. 3, XV, 331.

### Substitutionen.

702. Exposé d'une théorie nouvelle des substitutions linéaires. E. Laurent. N. ann. math. Sér. 3, XV, 345.
703. Sur les isomorphes holoédriques et transitifs des groupes symmétriques ou alternés. Ed. Maillet. Journ. Math. Sér. 5, I, 5.
704. Nouvelles recherches sur la limite de transitivité des groupes qui ne contiennent pas le groupe alterné. C. Jordan. Journ. Math. Sér. 5, I, 35.
705. The regular substitution groups, whose order is less than 48. G. A. Miller. Quart. Journ. math. XXVIII, 32.
706. List of transitive substitution groups of degree twelve. G. A. Miller. Quart. Journ. math. XXVIII, 193.
707. Sur les groupes de substitution. G. A. Miller. Compt. Rend. CXXIII, 91, 204.
708. Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene. A. Wiman. Math. Annal. XLVIII, 195.

Vergl. Formen. Funktionen 552.

## T.

### Thetafunktionen.

709. Rémarque sur la formule théta de Jacobi. A. Gutzmer. N. ann. math. Sér. 3, XV, 365.
710. Über ein allgemeines aus Thetafunktionen von zwei Argumenten gebildetes Orthogonalsystem und seine Verwendung in der Mechanik. E. Jahnke. Berl. Akad. Ber. 1896², 1023.

## V.

### Variationsrechnung.

711. Begründung der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode in der Variationsrechnung durch Vergleich derselben mit einer neuen Methode, welche zu den nämlichen Lösungen führt. B. Turksma. Math. Annal. XLVII, 33.

## W.

### Wärmelehre.

712. Recherches sur la dépendance entre le rayonnement d'un corps et la nature du milieu environant. Smoluchowski de Smolan. Compt. Rend. CXXIII, 230.
713. Influence de la pression dans les changements d'état d'un corps A. Ponsot. Compt. Rend. CXXIII, 595.
714. Tension de vapeur d'un corps comprimé par un gaz qu'il dissout. Tension de vapeur d'une solution en général. A. Ponsot. Compt. Rend. CXXIII, 648.
715. Sur une loi relative à la vapeur d'eau. Rateau. Compt. Rend. CXXIII, 808.
716. Sur une machine thermique. Delsol. Compt. Rend. CXXIII, 1256.

## Z.

### Zahlentheorie.

717. Ausgewählte Kapitel der Zahlenlehre (autographiertes Vorlesungsheft). Fel. Klein. Math. Annal. XLVIII, 562.
718. Über Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe. G. Frobenius. Berl. Akad. Ber. 1896¹, 689.
719. Über Gruppencharakter. G. Frobenius. Berl. Akad. Ber. 1896², 985.
720. Über die Primfaktoren der Gruppendeterminante. G. Frobenius. Berl. Akad. Ber. 1896², 1343.
721. Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern. H. Weber. Math. Annal. XLVIII, 433.
722. Über Gruppen, deren sämtliche Teiler Normalteiler sind. R. Dedekind. Math. Annal. XLVIII, 548.
723. Über das Fundamentalsystem und die Discriminante der Gattungen algebraischer Zahlen, welche aus Wurzelgrössen gebildet sind. G. Landsberg. Crelle, CXVII, 140.
724. Sur les propriétés des nombres entiers qui sont dérivées de l'intuition de l'espace. H. Minkowski. N. ann. math. Sér. 3, XV, 393 [vergl. Bd. XLI Nr. 567].
725. Au sujet d'une précédente communication, relative à quelques propriétés des racines primitives et des racines secondaires des nombres premiers. De Jonquières. Compt. Rend. CXXIII, 374 [vergl. Nr. 417, 418].
726. Au sujet des nombres premiers dont un nombre quelconque donné ne peut être racine primitive. De Jonquièrs. Compt. Rend. CXXIII, 405.
727. Sur les fractions décimales périodiques. C. E. Bickmore. N. ann. math. Sér. 3, XV, 222.
728. Anzahl der Zerlegungen einer ganzen rationalen Zahl in Summanden. J. Hermes. Math. Annal. XLVII, 281 [vergl. Bd. XLI, Nr. 579].
729. Factorisation of numbers. F. W. Lawrence. Quart. Journ. math. XXVIII, 285.
730. Über die Faktoren der Zahlen. G. Speckmann Grun. Archiv 2. R. XIV, 441.
731. Sur les nombres parfaits. C. Bouret. N. ann. math. Sér. 3, XV, 297.
732. Sur les lois de réciprocité. X. Stouff. Compt. Rend. CXXIII, 486.

733. Généralisation de formule de Wilson. Lognon. N. ann. math. Sér. 3, XV, 503.

734. Quelques extensions de théorème de Fermat sur les nombres polygones. Éd. Maillet. Journ. Math. Sér. 5, II, 363.

735. Potenzkongruenzen. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XIV, 112 [vergl. Bd. XLI, Nr. 267].

736. Über die Auflösung der Kongruenz $x^2 \equiv a \pmod p$. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XIV, 445.

737. Formes linéaires des diviseurs de $x^2 \pm A$. P. Pepin. Compt. Rend. CXXIII, 683, 737.

738. Solution de l'équation $X^4 + 35 Y^4 = Z^2$. P. Pepin. Journ. Math. Sér. 5, I, 351.

739. Über unbestimmte Gleichungen $x^{\text{ten}}$ Grades. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XIV, 443.

740. Nombres triangulaires dont les carrés sont de même triangulaires. H. Brocard. N. ann. math. Sér. 3, XV, 93.

741. Groupes de cinq impairs consécutifs dont quatre sont des nombres premiers. H. Brocard. N. ann. math. Sér. 3, XV, 389.

742. Trouver 3 nombres en progression géométrique tels que chacun d'eux, augmenté d'une unité donne un carré. H. Brocard. N. ann. math. Sér. 3, XV, 288.

743. Über die Schubertsche Lösung eines Bachetschen Problems. E. Busche. Math. Annal. XLVII, 105.

Vergl. Formen. Reihen 695.

---

# Zeitschrift

für

# Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

**Dr. R. Mehmke** und **Dr. M. Cantor.**

**Supplement zum zweiundvierzigsten Jahrgang.**

Der Supplemente dreizehntes.

---

Zugleich der

## Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik

achtes Heft.

---

Mit 8 Tafeln und 45 Figuren im Text.




Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1898.

# Abhandlungen

zur

# Geschichte der Mathematik.

## Achtes Heft.

**Mit 3 Tafeln und 45 Figuren im Text.**

**Inhalt:**








Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1898.

# UEBER EINE

# ALGORISMUS-SCHRIFT DES XII. JAHRHUNDERTS.

VON

**MAXIMILIAN CURTZE**

IN THORN.




In Band 34 der *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Hist. litt. Abth. S. 129—146, 161—170 hat Dr. ALFRED NAGL in Wien an das von ihm an genannter Stelle veröffentlichte Fragment einer Algorismus-Schrift des XII. Jahrhunderts höchst interessante allgemeinere Betrachtungen geknüpft. Da ich in der Lage bin, den vollständigen Tractat, dessen Bruchstück Herr Dr. NAGL veröffentlichte, vor mir zu haben, so will ich mir erlauben, im Folgenden über denselben zu berichten und am Schlusse einen Abdruck desselben zu bewirken, welcher die Wichtigkeit desselben augenfällig hervortreten lassen wird. Von diesem Tractate kenne ich zwei vollständige Exemplare. Das erste befindet sich auf Blatt 27—29 des *Clm 13 021*, welcher dem XII. Jahrhundert angehört und mit dem veröffentlichten Fragmente die Form ├ für 3 gemein hat, welche, wie Herr NAGL hervorhebt,[1]) nur im XII. Jahrhundert gefunden wird; das zweite, dem XIII. Jahrhundert angehörend, auf Blatt 31—33 des *Clm 18 927 (Teg. 927).*[2]) Meine nachfolgenden Bemerkungen beziehen sich auf das erste Manuscript, welches mir durch die Liberalität der Direktion der königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München für längere Zeit überlassen wurde, wofür ich hier meinen aufrichtigsten Dank zu sagen nicht unterlassen kann. Der *Clm 13 021 (Rat. civ. 21)* ist auf Pergament in gross Folio seinem grössten Theile nach zweispaltig geschrieben und besteht aus drei deutlich unterscheidbaren Theilen. Der erste und älteste enthält auch die Abhandlung, von der wir einen Theil zum Abdruck bringen wollen. Dieser Theil umfasst die Blätter 1—96, 165 (164)—212 (211). Er ist zweispaltig mit 41 Zeilen auf der Seite geschrieben. Die einzelnen Blätterlagen (1—5, 7—11, 14—19 Quaternionen, 6 Duernio, 12 und 13 Ternionen) sind in der Mitte des untern Randes der Rückseite je des letzten Blattes mit den Zahlen 1—19 bezeichnet, doch ist bei 11 und 12 diese Bezeichnung vom Buchbinder weggeschnitten. Er ist unzweifelhaft aus dem XII. Jahrhundert, nach dem sachverständigen Urtheile des Herrn Direktor SCHWENKE von der königl. und Universitätsbibliothek zu Königsberg i./Pr. eher aus dem Anfange als

---

1) *A. a. O.,* S. 184.

2) M. s. *Catalogus Codicum latinorum Bibliothecae Regiae Monacensis. Tomi II. Pars III.* Monachii 1878, S. 221.

aus dem Ende desselben. Er beginnt mit *folio verso.* Der zweite Theil, in durchlaufenden Zeilen und erst gegen den Schluss hin zweispaltig geschrieben, umfasst Blatt 97—164, welches letztere Blatt aber leer ist, und wohl deshalb von demjenigen, welcher in neuerer Zeit die Foliirung ausführte, nicht mit beziffert wurde, weshalb die späteren Blattzahlen, um den wirklichen Bestand zu ergeben, je um 1 erhöht werden müssen. Es sind 8 Quaternionen und ein Duernio. Diese sind in der linken untern Ecke der Rückseiten des je letzten Blattes mit den Zahlen 1—9 versehen gewesen. Davon sind nur noch 1, 5 und 7 erhalten, während die übrigen vom Buchbinder weggeschnitten sind. Die Schrift ist bedeutend stärker als die des ersten Theiles und gehört sicher erst dem XIII. Jahrhundert an. Sie beginnt *folio recto* und hat 40 Zeilen auf der Seite. Der dritte Theil umfasst die Blätter 213 (212)—284 (283). Es sind lauter Quaternionen ohne jeden Zahlencustoden. Er beginnt wieder *folio verso* mit 41 Zeilen auf der Seite in gespaltenen Columnen und ist nicht rubricirt. Die Schrift, der des zweiten Theiles sehr ähnlich, aber wie das *f* und das *m* und *n* zeigen, sicher von anderer Hand, könnte wohl noch aus dem Ende des XII. Jahrhunderts stammen. Diese drei Theile sind dann in ihrer jetzigen Verfassung nicht vor dem Ende des XV. Jahrhunderts gebunden worden, wie der schöne Holzband mit gepresstem Lederüberzug unzweideutig ergiebt.[3]) Aus derselben Zeit dürfte wohl auch die Notiz auf der Vorderseite des ersten Blattes datiren: „*In hoc libro continetur totum quadruuium scilicet Arismetica boecij.* | *Astronomia.* | *Musica boecij.* | *Geometria, euclidis.*“, welche jedoch nur die beiden ersten Teile umfasst, so dass sie auch den Bestand aus früherer Zeit festlegen könnte.[4]) Auf Blatt 213v (211v) findet sich die Bemerkung: „*ANno dni M⁰. CC⁰ Nonagesimo. VII⁰ Feria secunda In Annuntiatione bte Virginis Sub Dno Vlrico Abbate huius loci XVI⁰ Magister Wernherus Medicus, Canonicus Veteris Capelle Ratisponensis, Amicus dni abbatis et omnium fratrum specialissimus, hunc librum ex diuersimoda concessione ante multos annos perditum, et a memoria omnium quasi funditus subtractum. sua pecunia aput quendam Aurificem qui ipsum venalem publice portabat comparuit. et ipsum pro Remedio anime sue, ad honorem sti Geori (!) patroni nostri ecclesie in Prufening restituit; sine omni ipsius dampno liberaliter et precise. Vnde statuimus, vt nullus ipsum deinceps extra septa Ecclesie audeat commodare.*“ Die Worte „*sti Geori*“ bis

3) Nach Herrn Dr. Schwenke kommen ähnliche Einbände vor dieser Zeit nicht vor. Ich selbst habe solche aus 1598 in Händen gehabt.

4) Dem Duktus der Schrift zufolge würde ich die Notiz eher in das Ende des XV. oder den Anfang des XVI. Jahrhunderts verlegen.

„*Prufening*" stehen auf Rasur und sind, wie speciell das *r* uud die *e* zeigen, von einer ganz andern Hand geschrieben, als das Uebrige. Jedenfalls hat ursprünglich ein anderer Besitztitel darunter gestanden, was ich im Gegensatze zu der Behauptung HEIBERGS[5]) hier mir zu bemerken erlaube. Herr Direktor SCHWENKE theilte darin vollständig meine Ansicht. Dass diese Bemerkung sich nur auf den ersten Theil des Manuscriptes, auf dessen letztem Blatte sie sich findet, bezieht, dürfte wohl anzunehmen sein, ob auch auf den im jetzigen Bestande zwischengeschriebenen zweiten, wäre möglich, scheint mir aber nicht wahrscheinlich; den dritten Theil umfasst sie sicherlich nicht, wie aus der obigen Notiz auf Blatt 1$^r$ zu schliessen erlaubt ist. Die ganze Handschrift ist vortrefflich geschrieben und erhalten. Sie ist eine der schönsten, welche mir in ihrer Art bis jetzt vorgelegen hat. Der Inhalt derselben ist kurz folgender.

1 Blatt 1$^v$—26$^v$. *Arithmetik des BOETHIUS* ohne Titel und ohne Unterschrift. — 2. Blatt 27$^r$—68$^v$. *Tractatus astronomicus anonymi.* Von ihm ist unser Algorismus ein Theil der Einleitung. — 3. Blatt 69$^r$—72$^r$, col. 2. *Incipit liber HEREMANNI de compositione astrolabii.* — 4. Blatt 72$^r$, col. 2 bis 79$^v$, col. 1. *Incipit liber GERBERTI de compositione et exercitio instrumenti.* Es ist der erste Theil des von PEZ als *HERMANNI CONTRACTI de utilitatibus astrolabii* veröffentlichten Werkes.[6]) — 5. Blatt 79$^v$, col. 1—81$^r$, col. 2. *Incipit liber HEREMANNI de conpositione horologiorum.* Es ist der zweite Theil in der Veröffentlichung von PEZ. Unserem Exemplare fehlen jedoch die letzten drei Capitel.[7]) — 6. Blatt 81$^v$, col. 1—96$^r$, col. 2. *Incipit liber iudiciorum MESSEHALACH.* — 7. Blatt 97$^r$—150$^r$. *Incipiunt Capitula Libri Primi Artis Musicae.* Es sind die fünf Bücher *de Musica* des BOETHIUS. — 8. Blatt 150$^r$ letzte Zeile—150$^v$, col. 1, Z. 5. *Incipit GUIDONIS versus de Musicę, explanatione suique nominis ordine. Gymnasio Musas placuit revocare solutas, Ut pateant parvis habitae vix hactenus altis. Invidiae telum perimit dilectio caecum. Dira quidem pestis tulit omnia commoda terris.*

---

5) *Zeitschrift für Mathematik und Physik, 35, Hist. litt. Abth.*, S. 49 Anmerkung.

6) Einer freundlichen Notiz PAUL TANNERYS entnehme ich die Thatsache, dass auch in den Pariser Manuscripten dieses Stück — sicherlich mit Unrecht — einmal GIRBERTI ein zweitesmal GILLBERTI genannt wird. Auch diese Handschriften sind aus dem XII. Jahrhundert.

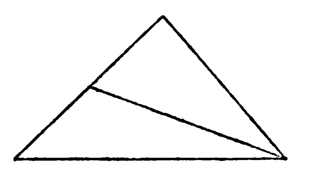
7) Derselben Notiz TANNERYS zufolge ist dieses Stück jedesmal von dem ersten Buche in der Ausgabe von PEZ *Thesaurus III.* gesondert, wie hier und in *Clm 14908.*, bezeichnet. In allen fehlen aber, wie in dem vorliegenden Exemplare, diejenigen Capitel, welche PEZ am Schlusse hat, und die mit einigen Capiteln der Geometrie GERBERTS übereinstimmen. Sie dürften daher wohl im Salzburger Codex, der sie enthält, als interpoliert anzusehen sein, und damit ein Argument gegen die Aechtheit der Geometrie GERBERTS hinfällig sich erweisen.

*Ordine me scripsi, qui primo carmina finxi.* — 9. Blatt 150ᵛ, col. 1, Z. 6 bis col. 2, Z. 21. *Epistola eiusdem ad* THEOBALDUM *quendam.* — 10. Blatt 150ᵛ, col. 2, Z. 22 — 157ᵛ, col. 2. *Explicit michrologus, id est brevis sermo,* GUIDONIS *peritissimi musici et venerabilis monachi.* — 11. Blatt 157ᵛ, col. 2, Z. 7 — 13. *Iteratur* GUIDONIS *prologus de camenae suae munusculis suique mentione nominis. Gliscunt corda meis hominum mollita camenis, Una mihi virtus numerosa contulit ictus. In caelis summo gratissima carmina fundo, Dans autem xpi munus cum voce ministri, Ordine me scripsi, primo qui carmina finxi.* — 12. Blatt 157ᵛ, col. 2 — 159ᵛ, col. 2. *Incipiunt item* GUIDONIS *musicae regulae in antiphonarii seu prologum prolatae.* — 13. Blatt 159ᵛ, col. 2 — 160ᵛ, col. 1. *Aliae regulae eiusdem.* — 14. Blatt 160ᵛ, col. 1 bis 163ʳ, col. 2. *Incipit Epistola* GUIDONIS *ad* MICHAHELEM *Monachum (de ignoto cantu).* — 15. Blatt 163ʳ, col. 2 — 163ᵛ, col. 2. *Fistularum mensura.* Es folgt das leere unbezeichnete Blatt. — 16. Blatt 165 (164)ʳ—187 (186)ᵛ. *Incipit (liber Primus) Geometriae* EUCLIDIS. Die berühmte Uebersetzung der Erklärungen und Lehrsätze EUKLIDS, zum Theil nach dem griechischen Originale gefertigt.[8]) — 18. Blatt 187 (186)ᵛ, Z. 26 — 188 (187)ʳ, Z. 70, Beweis der Sätze: *Omnium triangulorum maior angulus maiori lateri opponitur* und *Omnium triangulorum maius latus sub angulo maiore subtenditur.*[9])

8) Siehe über die Bedeutung dieses Abschnittes die in Anm. 5) erwähnte Abhandlung HEIBERGS.

9) Des grossen Interesses halber setze ich beide Beweise hierher.

„**Omnium triangulorum maior angulus maiori lateri opponitur.** *Concedit adversarius latus infimum, basim scilicet, maiorem, non autem vult, quod ei maior angulus obtendatur. Non est, inquit, ille maximus angulus in summo, immo alius, dexter scilicet super basim, illo maior est. Et quantum maior est, circa terminum abscindatur, iamque debebunt omnes anguli esse aequales, quod hoc inconuenientius. Exterior quippe angulus parcialis trianguli sursum maior est opposito summo compartiali dextro. Quod si maior partiali et compartiali. Non igitur aequales sunt anguli totalis*



*in summo et partialis, quem adversarius per abscisionem voluerat aequum facere. Item sinister angulus minimi trianguli, quia exterior, maior est sinistro totali et eius contra iacenti partiali. Sed adversarius omnes angulos sibi post abscisionem factam posuerat aequales, igitur cum sequitur, ut maior sit exterior duobus oppositis, quorum uterque aequalis est summo totali, cum, inquam, maior est ambobus uni aequalibus et uno ipsi tertio duobus coaequali. Sed adversarius ipsius quoque parvi trianguli posuerat aequales angulos, licet laterum maius unum et aliud minus. Quod si exterior, de quo proxime diximus, maior est obposito, qui aequipollet summo, maior igitur et non aequalis est, secundum quod volebat adversarius. Quod si ipse exterior oppositum compartiale facit, oppositum autem partiali maior existit, utpote toto parte, aequalis oppositi nichilominus partiali maior existit.*

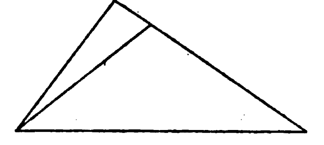
Auf dem Rande Figuren in verschiedener Weise Quadrate zu zeichnen. — 19. Blatt 188 (187)r. Auf dem Rande endlich nebenstehende Figur nebst Beischrift: *areę totius quadrati sunt XIIIIcies XIIII, id est C. XCVI. Unde ablatas secundum* G*erbertum* *excedentias, id est XLII, diuide in* 8, *et suis*

---

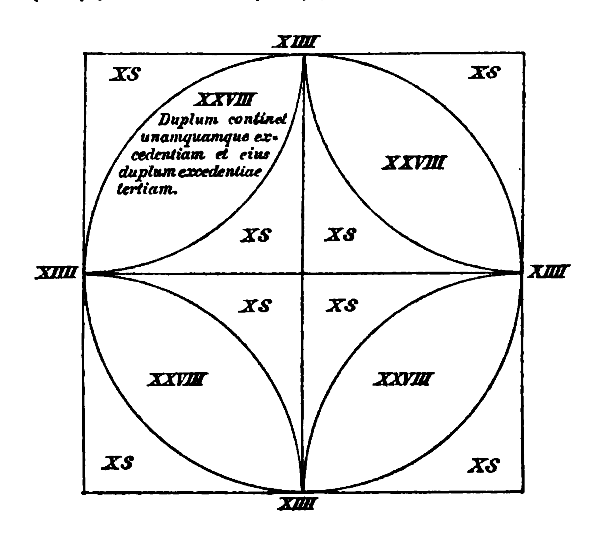
*Ergo maior est summus totalis dextro partiali, quos ante adversarius posuerat aequales. Sin aliter, pars toti aequabitur, quod est inpossibile.*

**Si duae lineae aequales super eandem basim ceciderint, angulos super basim aequales faciunt,** *quod supra probatum est, et etiam probatione non indiget. Erunt igitur aequales sinistrum dextro, siquidem dextrum non secetur. Si autem secetur, ita se ad illum habebit, ut partialis ad totum. Ergo maior est sinistrum dextro partiali ut iure toto parte. Si autem sinistrum dextro maior, coaequalis quoque eius minor erit; ergo non aequales, et probata est regula.*

**Omnium triangulorum maius latus sub angulo maiore subtenditur.** *Dicit adversarius: Immo dextrum trigoni latus maius est, non etiam basis, et tamen basi maior angulus subtenditur. Hoc enim vult probare adversarius, quod angulus maior etiam minori latere opponatur, et concedit, angulum maiorem in fronte trigoni, non etiam ei maius latus subtendi. Modo reduc adversarium ad inconveniens, et quia dicit, dextrum latus maius, abscinde de ipso, quantum maius est, per 3. theorema, eruntque iam aequalia omnia trigoni latera, dextrumque latus cum eo latere, quod totius est basis, super eam basim, quae in medio trahitur, aequales faciet angulos. Similiter et sinistrum latus cum basi totius super totalem dextram debebit facere aequos angulos iuxta illud theorema:* **Si duo trianguli latera fuerint aequa alterum alteri, aequales super basim faciunt angulos.** *Igitur erunt aequalia latera duum trigonorum ex concessione adversarii, et aequos debent facere angulos super bases. Ergo triangulus, qui ex dextro latere et basi constituitur, facit dextrum angulum exteriorem ex XVI theoremate maiorem duobus oppositis. Quod si angulus ille maior in summo in fronte trianguli et sinistro partiali, maior nimirum est et conpartiali, et iure, qui maior est maiore, et minore iuxta conceptionem unam. Non ergo cadunt aequales anguli super basim. Similiter et aliud considera triangulum, quod constat ex sinistro totali latere et basi totali pro latere assumpta super dextram basem, anguli ibi aequales erunt, si habent aequalia latera, quod concessit adversarius. Ergo summus in fronte iam dextrum, hoc est cadens super basem dextram, aequalis erit alteri dextro. Si autem dextrum prioris anguli maior est, ut probavimus, illo, qui est aequalis suo frontali et insuper partiali illius, aequali maior est similiter et prioris partialis conpartiali. Non ergo aequales faciunt angulos secta et basis super mediam rectam, unde nec recte abscisa est, quae etsi non abscinderetur, minor tamen esset alio latere trianguli. Sed et hoc fortissimum argumentum, quod si in triangulo parvissimo latera ex concessione adversarii erunt aequalia, inferetur statim, quia angulus exterior suo opposito et partiali maior est. Oppositus autem aequalis esse probatur iam summo in fronte totius trianguli, quod si minor aequali illius et ipso. Iam igitur non erunt aequales illae lineae, latera scilicet parvissimi trianguli*".



*in locis pone.*[10]) — 20. Blatt 189 (188)r, col. 1 — 195 (194)r, col. 1. *Geometria Gerberti Cap. 1—13,* ohne Titel und Schlussschrift.[11]) — 21. Blatt 195 (194)r, col. 1 bis 203 (202)r, col. 2. *Ars geometrica Boethii,* ebenfalls ohne Titel und Schlussschrift in sehr gutem Texte. — 22. Blatt 203 (202)r, col. 2—212 (211)r, col. 1. *Practia geometriae*, höchst interessant.[12]) — Blatt 212 (211)v. Die oben abgedruckte Bemerkung. — 23. Blatt 213 (212)v bis 284 (283)v. *Chalcidius in. Timaeum Platonis,* ebenfalls anonym, wohl nur, weil sie nicht rubricirt ist.




Wir gehen jetzt wieder zu der unter Nr. 2 verzeichneten grossen Arbeit über Astronomie zurück. In der Einleitung giebt der Verfasser zunächst den Grund an, weshalb er dem eigentlichen Werke in einer Vorarbeit die Principien der Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie vorausschickt, und theilt dann dieses Vorstück in fünf Bücher: 1. Ueber ganze Zahlen; 2. Ueber Minutien; 3. Ueber die (quadratische) Wurzelausziehung; 4. Ueber musikalische und geometrische Verhältnisse; 5. Ueber Zeiten und Bewegungen. Wir betrachten hiervon eingehend nur die drei ersten, werden aber einiges über das vierte und fünfte anzuschliessen uns erlauben. Was der Punkt für die Geometrie ist, das ist der *Instans* für

10) Hierzu vergleiche man Cap. LXIII der *Gerbertschen Geometrie* bei Olleris, *Oeuvres de* Gerbert, S. 456—457 und die dazu gehörige Figur 82. Es ist diese Stelle unseres Manuscriptes ein Zeugnis dafür, dass am Anfange des XII. Jahrhunderts auch der dritte Theil der fraglichen Geometrie Gerbert als Verfasser zugewiesen wurde.

11) Eine genaue Collation mit Olleris' Text ergab eine grosse Zahl augenscheinlich besserer Lesarten, die zum grossen Theil mit denen zusammen stimmen, welche ich aus *Clm 14908* im 7. Hefte der *„Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik“* veröffentlicht habe.

12) Eine Ausgabe dieses hervorragenden, für die Entwickelungsgeschichte der praktischen Geometrie hochbedeutsamen Werkes, ist im VIII. Jahrgang (1897) der *„Monatshefte für Mathematik und Physik“* S. 193—224 veröffentlicht worden.

die Zeit. Dass so die Auffassung des Verfassers ist, geht schon aus der gewählten, EUKLIDS Erklärung nachgebildeten Erklärung hervor, *Instans est pars temporis, cuius nulla pars est.* Es ist wohl gut, hier auf den Ausdruck bei *BRADWARDIN Tractatus de continuo* hinzuweisen, *Instans est atomus temporis,* welcher dasselbe mit andern Worten ausdrückt.[13]) Solche *Instantia* enthält das *Momentum* 574; 4 *Momente* bilden eine *Minute,* $2^1/_2$ *Minute* einen *Punkt*, endlich 4 *Punkte* eine *Stunde*, welche danach aus 22 960 *Instantia* zusammengesetzt ist. Er geht weiter fort bis zum Jahre, welches der Zeitraum ist, in welchem die Sonne zu dem nämlichen Thierkreiszeichen zurückkehrt. Jedes Volk habe verschiedene Jahreslänge; er würde den Arabern folgen, welche nach Mondjahren rechneten. Die Aegypter hätten eine andere Zeiteintheilung eingeführt, die sexagesimale. Das wäre deshalb, weil 60 sich so vielfach theilen lasse. Je mehr Faktoren eine Zahl habe, je vielfacher lasse sie sich eben theilen, wie z. B. $2520 = 2^3 . 3^2 . 5 . 7$. Da nun aber ohne Betrachtung der Zahl keine Wissenschaft existiren kann, so will er zunächst diese, *und zwar nach der Methode der Inder,* behandeln. Wir sehen also, dass unser Verfasser ebenso wie die übrigen Algorithmiker weiss, dass das, was er lehrt, in letzter Instanz aus Indien stammt. Bis hierher hat Verfasser sich immer der römischen Zahlzeichen bedient, nun führt er die indischen Ziffern ein, und von hier an bedient er sich nur noch dieser zur Zahlbezeichnung. Seine Ziffern sind die bekannten der damaligen Zeit. Nur für 3 kommt ausser dieser Form in überwiegender Zahl die schon von Dr. NAGL als dem XII. Jahrhundert charakteristisch gekennzeichnete Form ⊢ vor, und in den astronomischen, sehr umfangreichen Tabellen, da, wo sie allein ohne Verbindung mit andern Ziffern steht, die Null in der Form *t*, deutlich wie das im Texte benutzte *t* geschrieben. Es dürfte das die Abkürzung des Wortes *Teca* sein, wie nach dem *Algorismus vulgaris,* der dem SACROBASCO zugeschrieben wird, eine Bezeichnung der Null lautet,[14]) nach PETRUS DE DACIA in seinem Commentare zu diesem Algorismus eigentlich der Name des kreisrunden Brandmals, das man Dieben und Räubern auf die Stirn oder den Kinnbacken einzubrennen pflegte.[15]) Es gebe drei Arten der

---

13) M. s. meine Abhandlung *„Ueber die Handschrift R. 4°. 2 der Königl. Gymnasialbibliothek zu Thorn“* (Zeitschr. f. Math. und Phys. XIII. Supplement. S. 85. § 12): *„Instans est certus athomus temporis“.*

14) *„Decima vero 0 dicitur teca, vel circulus, vel cyfra, vel figura nichili, quoniam nichil significat; ipsa tamen locum tenens dat aliis significare.“* (JOHANNIS DE SACROBOSCO, *Algorismus vulgaris.* Cap. I *De Numeratione.* Hauniae 1897, S. 2, 10—12.)

15) „Decima vero etc. *Hic addit conditiones cuiusdam figurae non significativae, et primo facit hoc, secundo removet dubium, cum dicit* Ipsa tamen

Zahlen, die Einer, die Zehner, und die aus beiden gemischten. Namen für dieselben, wie *digitus*, *articulus*, *numerus compositus*, die wir in andern Algorismustractaten finden, kennt unser Verfasser nicht, auch da nicht, wo sie, wie bei der Multiplikation und Addition, ihm seine Sprachweise wesentlich abgekürzt hätten. Auch die Minuten werden mit den Ziffern geschrieben, von den altrömischen Zeichen ist keine Spur vorhanden. Wie Leonardo von Pisa beginnt unser Tractat mit der Multiplikation, und zwar in drei Paragraphen entsprechend den drei Zahlenarten. Für die *prima species*, also Einer mal Einer, wird erst das Einmaleins in dreieckiger Tabellenform gegeben, dann aber für solche Multiplikationen, welche grösser sind als 5, die complementäre Regel aufgestellt:

$$ab = 10\,[a-(10-b)] + (10-a)(10-b).$$ [16]

In dieser Regel ist *differentia* als Unterschied von 10 zu fassen, während im weitern Verlaufe der Abhandlung *differentia* die Bedeutung *Stelle* hat, wie auch bei Sacrobasco u. s. w. Bei der Multiplikation der *secunda* und *tercia species* dürfte wohl am auffallendsten sein, dass auch mit der Null wirklich multiplicirt wird, was die spätern Algorithmiker, vor allen Sacrobasco, nicht mehr thun. So sind die einzelnen Phasen der Multiplikation von 40 . 300 folgende, wobei 300 der Multiplikator ist und an *erster* Stelle geschrieben wird, ganz gegen die Gewohnheit aller spätern Algorithmiker. $\begin{smallmatrix}300\\40\end{smallmatrix}$; $\begin{smallmatrix}12\,300\\40\end{smallmatrix}$, 12000, und es heisst deutlich, *ter nihil nihil est*, also ist an Stelle der 3 die 0 zu setzen. Das Beispiel für die Multiplikation der dritten Art ist $\begin{smallmatrix}1024\\306\end{smallmatrix}$. Hier sind die weitern Phasen $\begin{smallmatrix}306\,024\\306\end{smallmatrix}$, wo wegen der Null im Multiplikator der Multiplikandus 306 gleich zwei Stellen nach rechts gerückt ist, $\begin{smallmatrix}312\,124\\306\end{smallmatrix}$, endlich, nachdem auch

---

locum. *Dicit, quod decima figura habet quatuor nomina, quia dicitur teca, circulus, cyfra, vel figura nichili, quia nichil significat. ... Quare autem aliis nominibus vocetur, non dicit auctor, quia omnia alia nomina habent rationem suae lineationis sive figurationis. Quia rotunda est, dicitur haec figura teca ad similitudinem tecae. Teca enim est ferrum figurae rotundae, quod ignitum solet in quibusdam regionibus imprimi fronti vel maxillae furis seu latronum. Haec etiam figura dicitur circulus, quia est figura circularis; vocatur etiam cyfra, quasi circumfacta vel circumferenda, quod idem est, quod circulus, non habito respectu ad centrum*" (*Clm 11067.*, Blatt 143v, col. 2, Z. 20—37. Vergl. die Ausgabe: Hauniae 1897, S. 26, 15—28).

16) Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik II²*, 855 hat diese Formel zuerst in dem Salemer, etwa um 1200 entstandenen Codex nachweisen können, welchen er in der Zeitschr. für Math. u. Physik XI, 1—16 zum Abdruck gebracht hat.

noch mit 4 multiplicirt ist, erscheint das Resultat 313 244. Hier sieht man, dass der Verfasser, als er 12 als Produkt erhalten hat, sich so hilft, dass er diese in 2 + 10 zerlegt, wo in späteren Abhandlungen 2 als *digitus*, 1 als *articulus* bezeichnet werden. Die Methode des Verfassers dürfte wohl seinem arabischen Vorbilde näher liegen als die andere Gepflogenheit. Die Probe der Multiplikation geschieht mit der Neunerprobe. Jetzt folgen der Reihe nach Addition, Subtraktion vom Verfasser *Diminutio* genannt, Halbirung und Verdoppelung. Bei der Subtraktion wird die folgende Stelle des Minuendus beim Borgen vermindert, nicht die des Subtrahendus um 1 erhöht. Bei der Halbirung einer ungeraden Einerziffer soll für die überschiessende 1 unter diese Ziffer 30, als Hälfte von 60 Minuten gesetzt werden, bei jeder andern ungeraden Ziffer jedoch 5 der rechts vorhergehenden hinzugezählt. Hier steht schon „*posteriori differentia*" wie wir jetzt sagen würden; nach der sonst im Algorismus gebräuchlichen Sprechweise müsste es „*anteriori differentia*" heissen. Aus der Regel für die Verdoppelung scheint hervorzugehen, dass sie als Addition zweier gleicher Summanden ausgeführt werden soll. Auch bei ihr wird die Neunerprobe auseinandergesetzt. Für die nun folgende Division nimmt er als Beispiel 25920 : 24. Die Zahl 25920 wird als solche charakterisirt „*partes omnes fere continens*". Da sie gleich $2^6 . 3^4 . 5$ ist, so hat sie wirklich eine erstaunlich grosse Zahl von Theilern. Der Divisor kommt unter den Dividend zu stehen, der Quotient über denselben. Beim Fortrücken des Divisors nach rechts, kommt die Quotientenziffer stets über die Einerziffer des Divisors zu stehen, eine Regel, welche bekanntlich gegen die Abbacisten einen gewaltigen Fortschritt bedeutet. Hier sehen die einzelnen Phasen des Beispieles so aus:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 10 & 1080 \\ 25920; & 1920; & 1920; & 000. \\ 24 & 24 & 24 & 24 \end{array}$$

Dass die Nullen in der zweiten Reihe gesetzt werden sollen, sagt auch Petrus de Dacia in seinem oben erwähnten Commentare.[17] Während bei dem Verrücken des Multiplikandus, wenn im Multiplikator eine 0 steht, um zwei Stellen gerückt werden muss, warnt der Verfasser hier bei der Division etwa ein Gleiches zu thun. Die Probe der Division erfolgt durch Multiplikation des Quotienten mit dem Divisor und Addition des etwaigen Restes.

Es folgt das zweite Buch über die Minutien. Wenn Verfasser auch vorzugsweise Sexagesimalbrüche behandelt, so schliesst er doch die gewöhnlichen nicht aus. Für sie hat er aber noch keine schriftliche Darstellung im Contexte, d. h. er kennt nicht die Bruchform $\frac{a}{b}$; wie er sich beim

17) *A. a. O.*, Blatt 153.

praktischen Rechnen hilft, werden wir später sehen. Sollen Sexagesimalbrüche multiplicirt werden, so multiplicirt man die Zahlen wie früher, die Benennung entsteht durch Addition der Benennungen der einzelnen Faktoren. Zur Bequemlichkeit wird eine Tabelle, ähnlich wie die Einmaleinstabelle, beigegeben, aus welcher man im Kreuzungspunkte der als Argumente überschriebenen Benennungen die resultirende ohne Rechnung findet. Die Zeichen für die Minutien gehen bis 18. Hier sieht man auch, dass das Zeichen ⊢ für 3, dessen Ursprung Dr. NAGL nicht zu wissen erklärte,[18]) aus diesen Zeichen für die einzelnen Sexagesimalbrüche entnommen ist. Ist der eine Faktor eine Anzahl von *Gradus*, welche Verfasser als Ganze bezeichnet, so ist die Benennung des Produktes dieselbe wie die der Minutie. Sind Gradus und Minutien mit solchen zu multipliciren, so bringt man alles auf die kleinste Benennung und reducirt zuletzt das Resultat wieder. So liefert $2^0 45'$ mit $3^0 10' 30''$ multiplicirt $1\,885\,950'''$, die nach Reduktion $\begin{matrix}8\\43\\52\\30\end{matrix}$ ergeben, d. h. $8^0 43' 52'' 30'''$. So untereinander soll man dergleichen gemischte Zahlen anordnen. Dabei darf man aber, wenn eine Minutie fehlt, nicht unterlassen, an ihrer Stelle 00 einzufügen. Als Beispiel findet sich $\begin{matrix}1224\\30\\45\\00\\50\end{matrix}$, d. h. $1224^0 30' 45'' 0''' 50''''$. Bei der Division müssen Divisor und Dividend auf dieselbe kleinste Benennung gebracht werden. Ist dann die Division ausführbar, so ist der Quotient als Gradus zu bezeichnen, im Gegentheile löst man den Dividenden in die nächste Minutie auf. Bei der Addition, welche bei dem niedrigsten Bruche zu beginnen hat, sind je 60 Einheiten als eine Einheit der nächsthöhern Ordnung zuzuzählen. Ebenso gilt hier die etwa zu borgende Einheit bei der Subtraktion für 60 niedere Einheiten. Nun geht er zur Multiplikation von gewöhnlichen Brüchen, *fractiones*, über. Die Nenner, *denominationes*, bezeichnet er auch als *differentias*. Um $\frac{3}{7}$ mit $\frac{4}{9}$ zu multipliciren, entwirft er zunächst eine Figur in Gestalt eines griechischen Kreuzes. Die Zähler setzt er in die obere und untere Zelle, die Nenner, ausserhalb der Figur, also die 7 nach oben über 3, die 9 unter die 4, dann multiplicirt er die innern und äussern Zahlen; die Ergebnisse werden beziehungsweise in die rechte und linke Zelle gesetzt, und dann hat man Zähler und Nenner des

18) In der oben genannten Abhandlung, S. 134.

gesuchten Produktes. Das Exempel sieht also so aus

| | 7 | |
|---|---|---|
| | 3 | |
| 12. | | 63 |
| | 4 | |
| | 9 | |

. Hat man zwei gemischte Zahlen, z. B. $3\frac{1}{2}$ und $8\frac{3}{11}$ zu multipliciren, so werden diese so angeschrieben, dass in die obere Zelle 3 und 1 untereinander geschrieben werden, der Nenner 2 aber wieder ausserhalb über den Strich, 8 und 3 werden ebenso in die untere Zelle eingeschrieben, der Nenner 11 unter den Strich. Dann werden die Zahlen eingerichtet und nach der ersten Art eingeschrieben, also $\overset{2}{\boxed{7}}$ und $\underset{11}{\boxed{91}}$, und man erhält das Resultat

| | 2 | |
|---|---|---|
| | 7 | |
| 637 | | 22 |
| | 91 | |
| | 11 | |

, wo dann nur noch die Umwandlung in Ganze und Bruch vorzunehmen ist, welche nun endlich

| | 2 | |
|---|---|---|
| | 7 | |
| 28 · | 21 | · 22 |
| | 91 | |
| | 11 | |

, d. h. $28\frac{21}{22}$ ergiebt, wie der Verfasser sagt, *28 integri et viginti et una pars de 22 partibus unius.* Den spätern Ausdruck *21 vicesimae secundae* kennt er also noch nicht. Auch hier giebt er, in Form des Einmaleins, eine Tafel, aus der man für die ersten 9 Nenner den resultirenden Nenner ohne Weiteres entnehmen kann. Da dieselbe sich von der Einmaleinstabelle nur dadurch unterscheidet, dass statt der Ziffern von 1 bis 9, die Anfangsbuchstaben der Zahlworte geschrieben sind, so hat man wieder einmal ein deutliches Beispiel dafür, dass Betrachtungen, welche uns überflüssig erscheinen, für frühere Zeiten als nothwendig gefühlt wurden. Für damalige Zeit war also die Beziehung zwischen 2 und *una medietas*, 3 und *una tertia* u. s. w. nicht genügend, um das gewöhnliche Einmaleins auf die letztere Bezeichnung ohne Weiteres anwenden zu können. Die Division gemischter Zahlen (die der einfachen Brüche dürfte ähnlich zu behandeln sein, wird aber nicht direkt gelehrt), wird so bewirkt, dass beide auf denselben Nenner gebracht werden; Division der Zähler giebt dann das Resultat. Der Ansatz sieht zunächst genau so aus wie zur Multiplikation. Z. B. $20\frac{2}{13} : 3\frac{1}{3}$ setzt unser Verfasser so an:

| | 13 | |
|---|---|---|
| 39 | 20<br>2 | 786 |
| 6 · | | 6·130 |
| 39 | 3<br>1 | 130 |
| | 3 | |

,

d. h. den gemeinsamen Nenner setzt er links neben die obere Zelle und ebenso links neben die untere, die entstehenden Zähler ebenso rechts neben die jedesmal entsprechende Zelle, das Resultat aber, wie bei der Multiplikation, in die mittlere offene Reihe. Den ihm noch fehlenden Bruchstrich hat er also in ganz geschickter Weise zu ersetzen gewusst.

Damit schliesst das zweite Buch. Das dritte beschäftigt sich mit der Ausziehung der Quadratwurzel. Nach Erklärung von Wurzel giebt er zunächst die beiden Sätze $\sqrt{a^2b^2} = ab$, $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a}{b}$. Dass reine Zehner, Tausender u. s. w. keine Wurzeln haben, d. h. keine Quadratzahlen sein können, drückt er so aus: *Prima differentia*, das ist Stelle, *et ita omnes impares radicem possident, secunda vero et quarta omnesque pares nequaquam.* Bei den Sexagesimalbrüchen haben nur $2^a$, $4^a$ u. s. w., das heisst die gradnamigen Wurzeln. Die Ausziehung der Wurzel wird in der gewöhnlichen Weise gelehrt; bei Sexagesimalbrüchen muss man dieselben auf Sekunden, Quarten u. s. w. resolviren, und die dann gefundene Wurzel wieder reduciren. Die Wurzel hat die halbe Benennung des ursprünglichen Bruches. Um aus einer gemischten Zahl die Wurzel zu ziehen, richtet man sie zunächst ein, dann erweitert man sie mit dem Nenner und zieht die Wurzel aus dem Zähler, die dann den frühern Nenner als Nenner hat, also: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{b}\sqrt{ab}$. Dann wird aber diejenige Methode auseinandergesetzt, welche sich bei Johannes de Lineriis und Johann von Gemunden findet.[19] Nach Anhängung einer geraden Anzahl Nullen an die zu radicirende Zahl, zieht man so die Wurzel aus; ein etwaiger Rest wird vernachlässigt. Dann schneidet man halb so viele Stellen ab, als man Nullen angehängt hat, multiplicirt die abgeschnittenen mit 60, schneidet wieder ebensoviele Stellen ab, und wiederholt die Manipulation, bis alle abgeschnittenen Ziffern Nullen sind. Dann hat man in den links stehen gebliebenen Zahlen die Ganzen, Minuten, Sekunden u. s. w. der gesuchten Wurzel. So findet er als $\sqrt{26}$: 5 Ganze 5′ 24″.

Dies der Inhalt der Einleitung unseres Verfassers, soweit sie als *Algorismus* bezeichnet werden kann.

Das nun folgende vierte Capitel der Einleitung soll nach der Ueberschrift „*de musicis ac geometricis rationibus*" handeln. Was allenfalls zur Musik gerechnet werden könnte, ist allein der erste Paragraph: *De pro-*

19) Man sehe Cantor, *Vorlesungen II,* 164 und meine *Miscellen zur Geschichte der Mathematik im 14. und 15. Jahrhundert.* (*Bibliotheca mathematica* VIII, S. 115, Anm. 11.)



*portionibus*. Derselbe hat folgenden Wortlaut: „*Omnis itaque numerus ad alium comparatus uel erit in multiplicitate, cuius species sunt duplus, triplus, quadruplus, sic in infinitum. Multiplex vero est, qui continet alium plus quam semel hoc modo 2 et 4; Vel superparticularitate, ut sesqualtera, sesquitertia et deinceps. Est autem superparticularis, qui relatus ad alterum continet ipsum totum et eius vel tertiam vel quartam, sic 3 et 4; Vel superpartiente, ut sunt superbitertius, superbiquartus, sic in infinitum. Superbipartiens dicitur, qui alterum semel continet et eius duas tertias vel tres quartas et sic in infinitum, ut hic 3 et 5; vel multiplicitate et parte sic: 3 et 7; vel multiplicitate et partibus hoc modo: 3 et 8.*“ Das ist alles. Hier kennt nun mit einem Male der Verfasser die Bezeichnung zwei Drittel, drei Viertel, welche er im Algorismus nicht benutzt. Das liegt doch jedenfalls an der Quelle, woher er für jedes seine Wissenschaft entnahm. Nun dieses vierte Capitel, das sich im weitern Verlaufe mit Geometrie beschäftigt, beruht eben vollständig auf römischer Tradition, die vorhergehenden auf indisch-arabischer. Wenn es da heisst: *Punctum est, quod parte caret, Punctum est principium lineae. Linea est longitudo sine latitudine. Linearum verum genera sunt tria: rectum, circumferens et flexuosum*“, und dazu dieselben Figuren wie zu den entsprechenden Worten der *Gromatici Veteres;*[20]) wenn es weiter heisst: *Rectarum linearum species sunt 6: cathetus, basis, ypotenusa, coraustus, diagonalis, diametrum;* wer, frage ich da, kann über den Ursprung solcher Wissenschaft in Zweifel sein? Und ähnlich geht es weiter. Ich will nur einiges noch hervorheben, was von Interesse ist, zum Theil wohl auch aus anderer Quelle. Ob ein Dreieck rechtwinklig, spitzwinklig oder stumpfwinklig ist, wird daraus erkannt, ob die Verbindungslinie der Mitte der Basis mit der Spitze gleich, grösser oder kleiner als die halbe Basis ist. Quadrirt man Basis und Cathetus und zieht aus der Summe beider Quadrate die Wurzel, so erhält man den **Podismus,**[21]) und zwar ist in denselben Paragraphen dieselbe Linie auch *hypotenusa* genannt worden. Den Paragraph *De inventione catheti in ysopleuro* setze ich vollständig hier her: *Cathetus igitur ysopleuri sic quaeratur. Dimidium lateris in se de altero toto in se enumeretur, residui latus cathetum sumpta unitate ponit.* Als Beispiel ist ein Dreieck gezeichnet, dessen drei gleiche Seiten 30 betragen, die Höhe ist als 26 bezeichnet. Da $30^2 - 15^2 = 26^2 - 1$ ist, so dürfte wohl diese Beziehung mit obigem Wortlaut gemeint sein, und es läge also eine unzulässige Induction vor. Beim gleichschenkligen Dreieck

---

20) Gemeint sind *Gromatici Veteres ed.* Lachmann, Berolini 1848.

21) Dieses Missverständnis stammt bekanntlich aus der Geometrie Gerberts, der dasselbe wieder selbst aus dem *Codex Arcerianus* der *Gromatici veteres* entnahm. Gerbert, Cap. 59.

ist das Probedreieck 25, 25, 14; die Höhe ist richtig zu 24 angegeben. Beim ungleichseitigen Dreieck wird in der bekannten Weise die *minor praecisura*, d. h. der kleinere Höhenabschnitt, gesucht. Als Beispiel das Dreieck 13, 14, 15 mit der Höhe 12, die *praecisura minor* 5. Rechtwinklige Dreiecke *sub eadem constituta ypotenusa* sind ähnlich. Kreise mit gleichem Durchmesser sind gleich, alle Radien sind gleich. Haben zwei Sehnen gleichen Abstand vom Mittelpunkte, so sind sie gleich. Den Umfang des Kreises findet man durch Multiplikation mit 3 und Addition eines Siebentel, oder durch Multiplikation mit 22 und Division durch 7. Umgekehrt ergiebt sich der Durchmesser nahezu *(paene)* aus dem Umfang, wenn man $\frac{1}{22}$ abzieht und den Rest durch 3 dividirt,[22]) oder indem man denselben mit 7 multiplicirt und dann durch 22 dividirt, genauer aber *(verius) latus decimae multiplicationis ambitus in se eius diametrum indicat,* d. h. $\pi = \sqrt{10}$ ist unserem Verfasser genauer als $3\frac{1}{7}$. Das Volumen der Kugel findet man durch Multiplikation des Cubus des Diameters mit $\frac{11}{21}$. Damit ist alles erschöpft, was der Verfasser aus der Geometrie an Vorkenntnissen für die Astronomie als nöthig erachtet.

Das fünfte Buch dieser Einleitung „*de temporibus et motibus*“ behandelt zunächst die verschiedenen Zeitrechnungen nach Jahren Christi, die Arabische und Hebräische, und giebt eine Tabelle für die Reduktion der verschiedenen Aeren aufeinander. An einer Stelle heisst es: „*Hebreorum autem literarum haec est descriptio*“, dann folgt ein leerer Raum, doch wohl weil der Abschreiber die hebräischen Buchstaben nicht zu schreiben verstand, und dann fährt der Text fort: „*quarum primae 9 primae speciei numeros naturaliter figurant, secundae vero omnes praeter geminatas secundae speciei terminos ordine recto usque ad 400 continent. Prima geminatarum 500, secunda 600, tertia 700, quarta 800, quinta 900 possidet*“, damit die genaue Bekanntschaft des Verfassers mit der hebräischen Zahlenbezeichnung bekundend. Es folgt dann eine gedrängte Darlegung des Weltsystems. In einer Schlussschrift dieser Einleitung ist weiter eine Vergleichung des Weltsystems mit dem menschlichen Körper gegeben, den er als *minor mundus* bezeichnet. In Anmerkung[23]) gebe ich den nicht uninteressanten Text. Dann folgen die drei Bücher der Astronomie, welche eine genaue Darstellung der Himmelserscheinungen mit einer Fülle von Tabellen umfassen.

---

22) Diese Regel findet sich schon bei Hermannus Contractus und bei Gerbert. Siehe Cantor, *Vorlesungen I²*, S. 832.

23) „*In huius libri principio tria considerantur, scilicet de quo, cur, et qualiter tractet. Tractat hic de multitudine et magnitudine introductorie propter difficultatem et diversitatem motus superiorum corporum super hanc mundum inferiorum agentium. Non sine causa dicitur homo minor mundus, quia quaecumque sunt in*

EX CODICE LATINO MONACENSI 13021.

Quoniam de quarta introducendis matheseos nos fari disciplinarum 27r,1 praesens tempus ammonuit, oportet nos ab ipsius artis elementis principium sumentes ad tempora et motus coaequa quidem gradatim ascendere. Omnes enim arithmeticam unitatem, musicam motum, geometriam punctum, hanc instans propria principia. Sed quia tres sunt ad quartam introductoriae, de his primo quidem compendiose sermo futurus erit. Motus vero species sunt VI, quorum quidem duo sunt simplices et IIII compositi. Simplicium vero alter convertibilis, alter localis. Convertibilis autem duas habet species, alteram essentialem, ut constructio et destructio, sicut de aqua in christallum, et alteram qualitativam, ut de dulci in amarum, de calido in frigidum, sicut et de vino in acetum. Localis autem duos habet modos, unum circularem, ut firmamenti et planetarum, alterum vero directum, cuius sex species: ante et retro, dextrorsum et sinistrorsum, sursum et deorsum. Sed compositi sunt augmentatio et diminutio, constructio et destructio. Nam augmentatio fit ex vertibili essentiali et qualitativo, ut de grano in herbam, diminutio vero ex eisdem sed contrariis. Constructio quoque fit ex convertibili et locali, ut de quibuslibet confectionibus, destructioque ex contrariis. Sed temporis partes sunt haec: Anni, menses et dies, hora, minuta, puncta, momenta et instantia. Si vero caelestium corporum motus et naturas et proprietates et loca in directione, statione et retrogradatione caeterisque et alia ad iudicia necessaria commoverimus, plenam et profundam scientiam in terrenis actibus certissime consequamur, de quibus omnibus a PTOLEMEO in *Azige(!)* compendiose scribitur.

INCIPIT LIBER PRIMUS DE INTEGRIS NUMERIS.

Instans pars temporis est, cuius nulla pars est. Momentum vero pars temporis est constans ex DLXXIIII instantibus. Minutum quoque est ex IIII momentis collectum. Punctum vero temporis spatium duobus minutis

---

*superiori et in inferiori mundo. In maiori quippe sunt VII planetarum orbes, id est fixarum circuli et aplanos suprema sphaera. In minori similiter, quia cerebrum naturae vim Lunae retinet, pulmo Mercurii, testes Veneris, cor Solis, renes Martis, epar Iovis, splen Saturni, Compago corporis circuli fixarum. Ut enim ibi quaedam signa, ita hic lacerti, musculi; ut ibi singulares stellae, ita hic nervi, venae, arteriae et alia. In hoc quidem infunditur quoddam divinum et subtile, scilicet anima, ubi ibi quoddam subtile et purum et quasi divinum, scilicet aplanos. In corpore quoque mundana sunt quatuor elementa: terra, aqua, aer et ignis; et in isto quatuor: malencolia, flegma, sanguis et colera. Illa superiora agunt inferiora per quatuor naturas. Si igitur aliquid horum fuerit in causa discrasiae, recurrendum est ad consimile, ut si cerebrum, et sic de caetero".*

27r,2 et dimidio metitur. Hora etenim IIII punctis con|tenta est, XXIIII. diei. Dies autem mensis XXX. plusve minusve. Menses etiam anni XII. Sed annus est spatium, quo sol ad idem zodiaci punctum revertitur. Sunt tamen uniuscuiusque populi anni proprii, unde Arabes, quos immitaturi sumus, annos lunae secuntur. Egyptii vero pro compendio partes temporis alia denominatione, sexagenaria scilicet, habentes, plurimas partes, ut pote secundam, tertiam, quartam, quintam et sextam hoc modo vocantes: minuta, secunda, tertia, quarta, excogitavere. Quantocunque enim aliquis numerus plures partes habuerit, tanto melius dividitur, ut $\overline{\text{II}}$. DXX, et quia omnium numerorum praetermissa doctrina scientia nulla procedit, ab ipsis nostri tractatus inicium Indorum ratione sumatur: Oportet igitur eorundem multiplicationem et divisionem, augmentationem quoque et diminutionem tam in maximis quam minimis integris quam minutiis indagante differentiam subtili calculatione rimari. Nam ferunt unitatem in prima differentia, denarium in secunda, centenarium in tertia, millenarium in quarta, sic in infinitum his tribus ultimis progressione facta, principium possidere. In quibus etiam his VIIII figuris 1 2 3 4 5 6 7 8 9 tam integros quam minutias figurantibus utuntur. Utuntur etiam ciffrae hoc modo ⊖ vel 0. Verbi gratia prima in prima differentia unitatem, secunda binarium, sic in ordine naturali ultima novenarium significat, et idem in caeteris fiat. Eorum quoque tres esse species affirmant, quarum quidem primam unitatis principium sumere et in novenario terminare; secundam denarii principium et eiusdem incrementum, sed fine carere; tertiam ex utrisque confectam utrisque participare.

*De multiplicatione primae speciei.* Primae multiplicationis speciei summa in hac regula et in hac figura continetur.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | | | | | |
| 2 | 4 | 3 | | | | | | |
| 3 | 6 | 9 | 4 | | | | | |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 5 | | | | |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 6 | | | |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 7 | | |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 8 | |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 9 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Si quis primae speciei aliquem eiusdem multiplicaverit, differentia maioris 27v,1 de minori demere et | de reliquo denominationem facere et iterum differentias eorum inter se ductas eidem addere oportet.

*De multiplicatione secundae speciei.* Porro secundae speciei multiplicationis ac tertiae communis est haec regula. Inferiarum differentiarum prima sub superioris dispositis ultima ponitur, et una quaeque superiorum cum omnibus inferioribus confertur. In qua collatione, si quis primae speciei excreverit, presentialiter collatam locetur, secundae ad secundam transferatur convenit. Verbi gratia secundae speciei dispositio sic fiat. Ponatur prima multiplicandi sub extrema multiplicantis hoc modo $\begin{array}{r}10\phantom{0}\\10\end{array}$. In prima differentia est circulus, qui nichil significat, sed secunda unitas, quae 10 significat, qui denarius est multiplicator. Inferior autem denarius multiplicandus est, qui inter se conferantur ita. Semel unitas unitas est, qui supra ultimam inferioris ponatur sic $\begin{array}{l}110\\10\end{array}$. Semel nihil nihil est hoc modo $\begin{array}{l}100\\10\end{array}$. Inferioribus ablatis centum sunt hac positione 100. Item aliud exemplum. 40 in 300 ducantur sic $\begin{array}{r}300\phantom{0}\\40\phantom{00}\end{array}$. Ter 4 sunt 12; super 4 fit 2, sed 10 ad superiorem differentiam erigantur hoc modo $\begin{array}{c}12300\\40\end{array}$. Ter nihil nihil est, hac scilicet descriptione 12000.

*De multiplicatione tertiae speciei.* Proponatur ergo nobis in tertia specie 1024 per 306 multiplicare hoc modo $\begin{array}{r}1024\phantom{00}\\306\phantom{000}\end{array}$. Semel 3 et nil et 6 idem sunt sic $\begin{array}{l}306024\\306\end{array}$. Reducantur inferiores a nullo circulo, ex quo nil crescit, hoc modo $\begin{array}{r}306024\\306\phantom{0}\end{array}$. Bis 3 6 sunt, 6 et 6 12, cuius binarius in loco 6 remaneant, 10 ubi nil est locetur. Bis autem 6 . 12 . 2 ibi remaneant, sed 10 in secunda ponatur taliter $\begin{array}{r}312124\\306\end{array}$. Iterum reductis inferioribus quater 3 12 sunt, 2 cum unitate, 10 in secunda cum 2 numeretur. Quater nil nil confert. Quater 6 24 sunt. 4 assunt, sed 2 cum 2 ibi 40 significat hac ratione 313244.

*De probatione multiplicationis.* Cum multiplicationem probare voluerimus, ipsam novenario dividemus, residuumque pro nota servemus. Iterum multiplicantem multiplicatumque novenario dividentes et superfluos inter se ductos itidem novenario dispositione separantes reliquum sine errore similem notae inveniemus.

*De additione.* Si vero addere voluerimus, unumquodque sub uno | genere conponatur, exigit. Si autem excreverit in aliqua differentiarum denarius, ad superiorem dirigatur. Sed si in aliqua nil remanserit ciffrae ponatur. $27^{v}$,2

*De diminutione integrorum.* In diminutione quoque unusquisque ponendus est in propria statione, et minor de maiore auferendus est vel minor minuendus. Sed si superior minor fuerit vel etiam nihil habuerit, unitas auferenda erit de sequentibus. Si de secunda, in prima denarium, idem in caeteris significabit. Est autem notandum in additione et diminutione initium a primis debere sumi.

*De mediatione integrorum.* Cum autem mediare iubemur sumentes initium a prima differentia si numerus impar fuerit, mediando parem pro unitate sub eadem differentia 30 ex 60 ponemus, in secunda quoque vel aliis differentiis mediatis paribus pro unitate in posteriori differentia 5 reponemus.

*De duplicatione.* In duplicatione quoque principium ab ultima sumentes inferiora superioribus copulemus, in quibus si denarius excreverit superoribus aggregetur.

*De probatione duplicationis.* Si duplicationem probare voluerimus, quae duplaveramus novenario dividamus, reliquumque duplatum itidemque divisum notam notae integri duplati eademque divisi similem ostendit.

*De divisione integrorum.* Haec hactenus de multiplicatione. Nunc autem de divisione loquamur. Ultima divisoris sub ultima dividendi ponitur, si minor vel aequalis fuerit numerus. Si vero maior, secundatur; caeterae vero in propriis differentiis. Ultima dividenti quotiens in ultima vel ultimis dividendi fuerit denominatione super primam divisoris posita totiens de reliquo sequens aufertur. Verbi gratia 25920 partes omnes fere continens per 24 dividantur hoc modo $\begin{array}{l}25920\\24\end{array}$. Ponatur talis numerus super primam dividentis, qui per ultimam eiusdem demat ultimam vel ultimas dividendi, tali tamen conditione, ut de reliquo per denominationem sequens minuatur sic $\begin{array}{l}1\\1920.\\24\end{array}$ Semel 2 2 sunt, qui de ultima dividendi auferantur. Minuatur sic, ut nihil remaneat. Et semel 4 4, et de secunda minuatur sic. Iterum | reducatur, ut idem fiat $\begin{array}{c}108\\1920.\\24\end{array}$ Octies itaque binario de 19 sublato 32, qui remanserant, idem etiam octonarius per quaternarium ductus prima et tertia differentia ciffre sumpta regulariter aufert hoc modo $\begin{array}{r}1080\\000.\\24\end{array}$ Si vero in reductione circulum inveneris, cave ne praeteteras, ut in multiplicatione fecisti.

[$28^r,1$]

*De probatione divisionis.* Sed si divisionem probare cupis, multiplica

dividentem per id, quod de divisione evenerit, addendo tamen reliquias, et si integer numerus restaurabitur, bene divisisti. Sin errasti, reitera.

### INCIPIT LIBER SECUNDUS DE MINUTIARUM NOTIS.

Et quia de integrorum multiplicatione, additione, diminutione, duplatione, mediatione et divisione compendiose diximus, nunc idem de minutiis ratio competenter postulat, ostendamus. Gradus autem integer est, cuius pars est minutum 60., secundum 3600., tertium 216000.

*De multiplicatione minutiarum.* Omnis itaque minutia ducta in se ipsam vel aliam decrescet in totam sui vel illius, quota est integri. Verbi gratia 12 minuta in 24 minuta ducta in 288 secunda decrescunt, et 14 minuta in 15 secunda 210 tertia fiunt. Et idem in caeteris, quarum haec est figura:

| Gr | I | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | Γ | Γ | | | | | | | |
| Γ | ⊢ | ϥ | ⊢ | | | | | | |
| ⊢ | ϥ | ɛ | 6 | ϥ | | | | | |
| ϥ | ɛ | 6 | 7 | ꝩ | ɛ | | | | |
| ɛ | 6 | 7 | ꝩ | ϥ | ˥ | 6 | | | |
| 6 | 7 | ꝩ | ϥ | ˥ | ח | Π | 7 | | |
| 7 | ꝩ | ϥ | ˥ | ח | Π | ɼ+ | Π˥ | ꝩ | |
| ꝩ | ϥ | ˥ | ח | Π | ɼ+ | Π˥ | ɛ | ⊢6 | |
| ϥ | ˥ | ח | Π | ɼ+ | Π˥ | ɛ | ⊢6 | ⊢) | ꝩ |

Harum minutiarum in se vel inter se collectarum summa sumit earundem minutiarum aggregatas denominationes.

*De multiplicatione integrorum per minutias.* Omnis autem integer si ducatur in aliquam fractionem, ex genere illius fractionis efficitur. Erunt quidem 25 gradus in 5 minuta 125 minuta, et 4 integra in 6 secunda 24 secunda. Idem in caeteris. At si unum et dimidium per unum et dimidium multiplicare voluerimus, unum et dimidium minuta faciemus, et erunt 90. Similiter de alio. Quos inter se | multiplicemus, eruntque 8100 secunda. Quae si per 60 dividantur, ad minuta redibunt, quae iterum eadem divisione 2 gradus et 15 minuta erunt. Et iterum ponamus aliud exemplum integrorum et minutiarum et aliter. Sint quoque verbi gratia 2 gradus et 45 minuta, quae per 3 gradus et 10 minuta ac 30 secunda ducantur. Resolvatur itaque per 60 unusquisque ad suam ulti- 28r,2

mam differentiam, id est minuta et secunda scilicet 165 et 11430, quae si inter se ducantur, erunt 1885950. Quae omnia si per 60 dividantur ad secunda reducentur, eruntque 31432 secunda, et remanebunt 30 tertia. Quae secunda eadem divisione 523 minuta remanentibus 52 secundis ostendunt, et hi itidem divisa 8 gradus indicant 43 minutis supereminentibus

hoc modo: 8<br>43<br>52.<br>30

*De divisione minutiarum.* Si vero eas dividere voluerimus, primo deducantur ad ultimam differentiam. Tunc si alterum per alterum dividi potuerit, integer restituitur. Sed si quid superfuerit, qui dividi non poterit, tota integri condenominatione sumenda est, quota illud residuum fuerit dividentis. Si vero pars denominationis non fuit, tunc summa denominationis integri et residui inter se primis divisor prioribus partiatur. Verbi gratia 15 tertiae si per 6 tertias dividantur, 2 et dimidium restituuntur, quia 15 tertiae 5 integros creant. Si medietas per medietates, quartae per quartas, et minuta per minuta, secunda per secunda. Iterum dividamus 10 secunda per 5 minuta. Ut hoc fiat, minuta in secunda resolvamus, 300que fient. Quod quia fieri non potest, dicimus, inde nullum integrum posse creari. Unde oportet ipsa per 60 multiplicare, et orientur 600 tertia, quae divisa unumquodque 2 secunda ostenditur

habere hoc modo 2<br>600.<br>300

*De constitutione integrorum et minutiarum.* Dum vero constituere integros et fractiones voluerimus, integros ut supra ponemus sic, sub prima et secunda minuta recto ordine collocabimus. 1224 quidem gradus suas sedes possideant, 30 quoque minuta sub his assistant, quae 45 secunda sequantur, sub quibus etiam 50 quarta interposita ciffrae statuantur hoc

modo 1224<br>30<br>45.<br>00<br>50

*De additione minutiarum.* Cum autem addere voluerimus, incipiemus

28v,1 ab inferioribus, in quibus | si 60 excreverint, unitas pro ipso superiorem

differentiam petat hoc modo 2999<br>59<br>59.<br>59<br>59

*De diminutione minutiarum.* Si vero minuere necesse fuerit, ab inferioribus principium diminutionis erit. Sed si in aliqua differentiarum minus vel nihil erit, a superiori unitas sexagecupla sumenda est ut in superiori figura.

*De duplicatione et mediatione minutiarum.* In duplicatione vero a superiori differentia, sed in mediatione ab inferiori, ut supra, incipiendum est.

*De multiplicatione minutiarum diversorum generum.* Si vero numerum cum fractionibus vel etiam fractiones multiplicare vel dividere quemque iubemus, ut sunt quintae et $9^{ae}$ et his similes, praedicta ratione utemur, deducendo ad inferiorem omnia differentiam. Verbi gratia si 3 septimas in 4 novenas multiplicare volumus, quasi minuta eas multiplicemus, postquam fient quasi ex genere secundorum. Cumque ipsas ad integros elevare cupimus, ⟨per⟩ easdem differentias utriusque generis inter se ductas dividendo reducemus. Dicimus autem differentias generis minutiarum denominationes esse, siquidem $5^{ae}$ a quinario, $7^{ae}$ a septenario, undecimae quoque ab undenario denominantur. Si autem ex divisione aliquis occurrerit, integer erit; si vero non, partes illius generis, per quod partiebatur, ut 3 septimae in 4 novenos 12 partes ex 63 unius, cuius haec est

7
3
figura 12. .63 .
4
9

*De multiplicatione integrorum et minutiarum diversorum generum.* Si autem 3 et dimidium per 8 et 3 undecimas ducere vel etiam partiri prae-

2
3
1
cipimur, eos in propriis sedibus prius collocamus oportet hoc modo
8
3
11

Tres posuimus, sub quo unum pro dimidio, sub quibus 8, hinc 3 minutias, utrarumque vero minutiarum denominationes, scilicet duos et undecim, extra figuram. Oportet etiam unamquamque ad suam fractionem retrahere hac ratione: bis 3 sex fiunt, quibus addatur unitas, eruntque 7, scilicet

2
medietates, quae in loco trium et unius ponantur hoc modo 7. Sic undecies 8 88 fiunt, quibus additis tribus 91 fiunt, quae in loco 8 et 3 undecimarum erunt hoc modo 91.
11
Quarum inter se multiplicatarum numerum,

scilicet 637, per numerum denominationum inter se ductarum, scilicet 22,

$28^{v},2$ divida|mus sic

$$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ & \boxed{7} & \\ \boxed{637.} & & \boxed{.22} \\ & \boxed{91} & \\ & 11 & \end{array}$$

. Qui numerus de divisione excreverit, integer erit, residuum vero partes erunt dividentis, ut. 28 integri et viginti et una pars de 22 partibus unius hoc modo

$$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ & \boxed{7} & \\ \boxed{28\cdot} & 21 & \boxed{\cdot 22} \\ & \boxed{91} & \\ & 11 & \end{array}$$

. Harum inter se ducendarum minutiarum oriendae minutiae componunt denominationes, ut in hoc exemplo et hac figura monstratur: Duae tertiae per 3 quartas, ex quibus inter se ductis $12^{ae}$ efficientur. 2 tertiae per 3 quartas si ducantur 6 $12^{ae}$ surgunt, nam tertiarum denominatio 3, quartarum 4, ex quibus inter se ductis 12 efficitur. In figura vero si ypotenusa per cathetum ducatur, in superficie denominationes minutiarum minutiarumque minutiarum directo inveniuntur hoc modo.

| I | M | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | 4 | t | | | | | | | |
| t | 6 | 9 | q | | | | | | |
| q | 8 | 12 | 16 | Q | | | | | |
| Q | 10 | 15 | 20 | 25 | ſ | | | | |
| ſ | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | S | | | |
| S | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | O | | |
| O | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | N | |
| N | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | |

*De divisione minutiarum diversorum generum.* Has autem minutias supradicta doctrina et resolvendo eas ad ultimum genus partiemus. Exempli causa 20 et duas partes et 13 per 3 et tertiam dividamus. Et quia non habent 13 tertiam, multiplicanda est tertiarum denominatio, id est 3, per differentiam partium, id est 13, ut sint unius generis, fietque numerus 39. Post haec ducas 20 per 39, eritque 780, quibus addantur duae partes de 13 ductae per denominationem tertiarum, id est 3, quae sunt 6, quia una pars 13 in 39 sunt 3, ut de 39 est 3, et erit 786. Iterum multiplica 3 in 39, ut sint unius generis; unde 130 partes additione 13, tertiae 39,

nascentur. Itaque utraque genera erunt aequalia. Ex divisione vero unius per alterum integer numerus progreditur, scilicet 6. Reliquum vero partes dividentis, scilicet 6, sic

```
            13
      39 | 20 | 786
         |  2 |
    |  6 · 6 · 130 | .
      39 |  3 | 130
         |  1 |
             3
```

INCIPIT LIBER TERTIUS DE INVENTIONE RADICIS.

Quoniam quod multociens necessaria est radix, | qualiter inveniri possit, breviter doceamus. Verumtamen radix, quae in geometria latus dicitur, est cuiuslibet numeri numerus, qui in se ipsum ductus, ipsum efficiet, ut 3 novenarii. In duorum inter se radicem habentium summa radix invenitur, unde in 4 et 9 6 est radix. Si duorum ad invicem dividendorum denominatio radicem habuerit, et eorum in se summa. Verbi gratia denominatio octonarii 18 dividentis est 2 et quarta habens radicem, et e converso in 4 novenis 18 octonarium dividente radix invenitur; habet itaque 144 radicem summa scilicet 8 et 18. Prima itaque differentia et ita omnes impares radicem possident, secunda vero et quarta, omnesque pares nequaquam. Hoc idem in minutiis spectatur. Prima quippe minutiarum differentia, scilicet minuta, radice caret, in secunda vero invenitur; tertia quoque non habet, sed quarta cum sexta continere probatur, et idem in reliquis, ut omnibus paribus sint radices, imparibus vero minime. Similiter in partibus minutiarum, ut medietatibus.

$29^r$, 1.

*De inventione radicis integrorum.* Cum vero radicem alicuius extrahere voluerimus, sub impari differentia talis numerus apponatur, quod in semetipsum ductus superiores consumat, et ibidem geminatus in secundam differentiam versus trans dextram transmutetur. Cui iterum talis subponatur a dextris, qui per duplatum et semetipsum multiplicatus diminuat superiores. Dupla itidem secundum et mutando eum ad secundum apponas eidem alterum, qui per differentias omnes et se ipsum superiores auferat, et id facias apponendo sive numerum sive ciffre, quousque superiores demas. Sed si aliquid remanserit, quod auferri non possit, erit pars inferioris duplati. Postea, quos duplaveras, media, et erit vera radix. Verbi gratia volo extrahere radicem de 5625, quorum positio est haec 5625. Quoniam sunt pares differentiae, sub impari haec figura 7 ponatur hoc modo $\begin{matrix}5625\\7\phantom{00}\end{matrix}$, quae in se ducta 49 efficit. Quibus de 56 ablatis 7 restant sic $\begin{matrix}725\\7\phantom{00}\end{matrix}$. In-



feriores duplati ibidem transferantur hoc modo $\frac{725}{14}$, quos 14 sequatur 5 taliter $\frac{725}{145}$, qui quinarius cum unitate 5 de 7 semovit, qui etiam cum 4 29r,2 20, qui | remanserant, abstulit, per semetipsum vero 25 consumit hoc modo 145. Sed cum perveneris ad circulos, post quos non erit numerus, tuum numerum in suo loco geminabis et sub circulis transferes, cui apponendus est circulus, qui per duplatum et se ipsum superiores demat; et iterum transferas non geminando circulos, sed simplices reponendo, et hoc, quousque omnes consumes; vel medietas circulorum sumenda est.

*De inventione radicis minutiarum.* Si autem fractionum radicem invenire desideras, verte ipsas in ultimum genus. Deinde, ut in integris docuimus, faciamus. Sed si nihil remanserit, erit vera radix, et quod exierit, reducas ad integrum, ut poteris. Sed si aliquid superfuerit, non habet radicem. Tunc minuas, quia, quantocumque plus minues, eo magis numerum verae radicis propinquiorem generabis. Verbi gratia, si 120 minutorum radicem quaeris, vertas ea in differentiam habentem radicem, id est in secunda, fientque 7200, et si poneres quarta vel sexta, esset opus verius. Post haec extrahamus radicem 7200 secundorum, et sunt 84 minuta et fractio quaedam, quod sublevantes ad numerum integrum fit unum et 24 partes de 60, quae sunt minuta.

*De inventione radicis integrorum et minutiarum diversorum ordinum.* Radix duorum tertiaeve ac terciae decimae sic invenitur. Primo quidem omnia ad genus infimum ducenda sunt. Sed quoniam haec minutia sunt diversorum generum ex earum denominatione commune genus multiplicatione inveniendum est. Ex tribus enim et 13 39 consurgunt. Ad hoc ergo genus integra, ut sunt quasi minuta, deducantur hoc modo $\frac{2}{39}$, quibus 3 et 13 addatur ita $\frac{78}{16}$. Sunt etenim 94. Igitur ut sint secunda per suum genus iterum multiplicentur. Omnis autem genus harum est 39, quoniam ad modum praedictarum 3666 consurgunt, quarum itaque radix, ut praedocuimus 60 scilicet tricesimae nonae partes unius, supereminentibus 66 secundis, invenitur. Est autem radix ad integra reducta unum et 21 partes integri divisi in 39, quod leviter probanti illud patebit.

*Item alia regula de inventione radicis.* Cum volueris extrahere radicem, 29v,1 pone ipsum | numerum per differentias suas, sintque circuli versus dextram dumtaxat pares sive 4 sive 6, quia quanto plures fuerint circuli, tanto plus erit sic subtilis $\frac{260000}{5}$. Post haec extrahe radicem numeri

una cum circulis suis, quos addidisti, et quod exierit de numero integro mediato serva sic 509. Si vero aliquid superfuerit proice eum, et non cures de eo sic: 509. Et scito tunc, quod numerus ille non habet radicem; et si nihil remanserit, erit vera radix sine fractione. Post haec numera a dextris ab initio differentiarum radicis medietatem circulorum, et accipe, quod superfuerit, et scribe eum seorsum, et minue eum de loco suo hoc

00 9

modo 5 09, et multiplica, quod manserit, in 60 hoc modo 60, et numera similiter medietatem circulorum, quos addidisti, super numerum, et accipe superfluum, et scribes eum sub numero integro et minue eum de loco suo

00

sic: 5 40. Et quod remanserit multiplicabis iterum in 60, et numerabis

00

medietatem circulorum sic 2400, et accipies superfluum, et scribes eum sub numerum, quem scripsisti, et erunt secunda. Et si iterum aliquid remanserit, multiplicabis eum in 60, ut prius, et divides ut prius, et exibunt integri, minuta, secunda, $3^a$, $4^a$, $5^a$, secundum circulos, quos posuimus

| | |
|---|---|
| 5 | int. |
| 5 | min. |
| 24 | $2^a$ |

ante numerum. Integrorum vero et minutiarum radices inventae sunt. Si quidem omnia ad inferiorem differentiam deducenda sunt, quae deducta si fuerint secunda, habebit radix minuta, si $4^a$ $2^a$, si $6^a$ $3^a$; quia ista inter se illa producunt, quando radices ad sua integra reducantur, ut possunt. Hactenus de radicibus.

## Nachschrift.

Es ist nachträglich gefunden worden, dass der Schreiber des *Clm 13021* für den hier in Frage kommenden Theil der unter dem Abte Eberhard des Klosters Prüfning bei Regensburg (1163—1168) schreibende Frater Sigsboto gewesen ist, welcher auch den Cassiodorius des *Clm 13027* gefertigt hat. Dadurch ist die Entstehungszeit des Codex auf die Mitte des XII. Jahrhunderts fest bestimmt. Durch die hier gegebene Beschreibung der Handschrift bitte ich das in den *„Monatsheften für Mathematik und Physik“* VIII, 193—194 über dieselbe Gesagte zu vervollständigen, beziehungsweise zu berichtigen.

Thorn, 29. November 1897. M. Curtze.

DE

# INQUISICIONE CAPACITATIS FIGURARUM.

## ANONYME ABHANDLUNG AUS DEM FÜNFZEHNTEN JAHRHUNDERT.

HERAUSGEGEBEN VON

**MAXIMILIAN CURTZE**

IN THORN.

---

MIT 33 FIGUREN IM TEXT.

Die nachfolgende zum ersten Male gedruckte Abhandlung ist der Handschrift der königlichen Hof- und Staatsbibliothek zu München *Clm Nr. 56*[1]) entnommen, welche in der ersten Hälfte des 15. Jahrhunderts von einem gewissen Magister Reinhard von Wurm geschrieben ist. Es ist eine Foliohandschrift von 231 Blättern, welche oben rechts mit den Ziffern 2—232 foliirt sind, so dass wahrscheinlich ein Blatt vorn verloren gegangen ist. Auf der Rückseite des Deckels liest man folgendes Inhaltsverzeichniss:

„*In isto libro continentur infra scripta.*"

„*Primo almagesti abreviatum per Magistrum Thomam de Aquino Et continet libros sex incipit fol. 3.*"

„*Item liber theoreumatum tocius quadruuij et continet tractatus plures. Primus est de theoreumatibus arismetrice fol. 123. Secundus geometrice 131. Tercius musice 138. Quartus astronomie 145.*"

„*Item Alius tractatus theoreumatum astronomie circa theoricas planetarum et prius solis secundo lune deinde trium superiorum et veneris atque mercurij. fol. 161.*"

„*Item tractatus de quantitate trium solidorum magistri Iohannis schindel folio 197.*"

„*Item tractatus quidam bonus de capacitate figurarum folio 207.*"

Darunter das *Ex Libris* der Elektoralbibliothek zu München.

Auf dem untern Rande des Blattes 3ª befindet sich folgende Bemerkung, welche über die Schicksale der Handschrift Auskunft giebt:

„*Iste liber est conventus wienensis fratrum ordinis praedicatorum in austria. eidem attulit frater Iohanes fleckel Anno domini 1457 ante professionem suam de seculo, et fuit quondam magistri Reinhardi de Vurm, quem propria manu scripsit.*"

„*Quapropter scitote omnes et singuli, prout superius est narratum, quod idem liber est datus a prefato conventu Burchardo Keck civi Salzburgensi, prout habetur in literis sibi ab eodem conventu datis, pro pecunia satis legali.*"

---

1) Siehe *Catalogus Codicum manuscriptorum Bibliothecae Regiae Monacensis Tomi III pars I. Codices latinos continens Monachii 1868.* p. 10. Die dort gegebene Beschreibung ist unvollständig.



Danach ist also der Band von Magister REINHARDUS DE VURM geschrieben, kam nach dessen Tode in den Besitz eines gewissen JOHANNES FLECKEL, welcher ihn bei seinem Eintritt in den Predigerorden seinem Kloster in Wien überwies. Von diesem kaufte ihn später der Salzburger Bürger BURKARD KECK, nach dessen Tode er endlich in die Elektoralbibliothek zu München gelangte. Die königliche Hof- und Staatsbibliothek zu München besitzt noch einen zweiten Handschriftenband, der ein Bruder des vorliegenden genannt werden darf. Es ist dies *Clm 10662.*[1]) Derselbe hat auf Blatt 2$^{a}$ folgende Bemerkung:

„*Iste liber est conventus wienensis fratrum ordinis predicatorum in austria, quem eidem attulit de seculo frater Iohannes Fleckel Anno dm̄i 1457, et fuit quondam magistri Reinhardi.*"[2])

Darunter steht dann:

„*Collegii Soc. JESU Molshemij*",

während auf dem vordern Deckel die Notiz steht:

„*Ex Bibliotheca Palatina Mannh. No. VI. 1298.*"

Auch dieser Band ist von REINHARD DE VURM selbst geschrieben. Seine weiteren Schicksale sind jedoch etwas anders verlaufen, bis sich beide Codices in derselben Bibliothek wieder zusammengefunden haben.

Blatt 3$^{a}$ bis 120$^{a}$ umfasst den nach obigem Inhaltsverzeichniss von THOMAS VON AQUINO verfassten Auszug aus dem Almagest. Er beginnt mit den Worten: „*Omnium recte philosophancium non solum verisimilibus coniecturis credibilibusque argumentis argumentandis, sed et firmissimis racionibus deprehensum est, formam celi spericam esse.*" Am Schlusse: „*Explicit Almagesti minor finitus Anno X 1434$^{0}$.*"

Blatt 120$^{b}$ bis 122$^{b}$ ist leer. Von Blatt 123$^{a}$ bis 153$^{b}$ schliesst sich dann der *liber theoreumacie* an. Anfang: „*Cum Ptolomeus in almagesti edisterat, quod bonum fuit sapientibus visum esse.*" Am Schlusse heisst es: „*Explicit liber theoreumacie finitus Salzburgi anno 1436.*"

Blatt 154—160 sind leer. Blatt 161$^{a}$ bis 181$^{b}$ beginnt eine *Theorica planetarum*, welche, datiert von 1342, auch in der Thorner Handschrift R. 4$^{0}$. 2[3]) sich befindet. Anfang: „*Philosophiae singulari excellentissimo doctori Magistro Johanni de ganduno Petrus de gluclina mathematicarum et*

1) Siehe *Catal. Cod. manuscript. Bibl. Regiae Monac. Tomi IV pars I. Monachii 1874*, p. 155.

2) Die Worte „*conventus wienensis fratrum ordinis predicatorum*" sind in der Handschrift ausradiert. Dieselben sind aber noch zweimal an andern Stellen derselben wiederholt, so dass an der richtigen Ergänzung Zweifel ausgeschlossen ist.

3) Siehe *Zeitschrift für Mathematik und Physik, Supplementheft zum XIII. Bande,* Seite 79—80.

*veracibus disciplinis cum studio intendere* u. s. w." und schliesst: „*Et vos amantissimi magistri, qui astrorum et omnis phisice contemplacionis vacari proponitis et potestis, insufficienciam subportetis, quando poteritis, quociens videritis hoc opusculum in meam commemoracionem.*"

Es folgt, im Inhaltsverzeichniss auf der Rückseite des Deckels ausgelassen, eine Abhandlung „*De quadratura circuli*". Blatt $182^a$—$186^b$. Sie beginnt: „*Ad probandum, quod sit dare quadratum equale aree circuli, assumitur ista proposicio Archimenidis.*" Wenn aus dem „*sit dare*" der Schluss richtig wäre, welchen Suter[1]) und nach ihm Cantor[2]) daraus gezogen haben, so müsste Albertus de Saxonia der Verfasser sein. Von der durch Suter veröffentlichten Arbeit ist jedoch die unsere wesentlich verschieden. Sie schliesst: *per* $17^{am}$ *tercii igitur bf erit minor ipso.*"

Blatt $187^a$ bis $188^a$ umfasst dann eine kurze Abhandlung, welche in andern Handschriften „*Proposicio bona*" betitelt ist. Auch sie ist im Inhaltsverzeichniss übergangen.[3]) Sie beginnt: „*Si ab aliquo puncto signato, quod tantum distat a circumferencia alicuius circuli, quanta est semidyameter ipsius circuli, ducantur due linee una secans predictum circulum et transiens per centrum eius, alia contingens eum, tunc inter dua puncta circumferencie predicta, scilicet punctum sectionis et punctum contactus, continetur eiusdem circumferencie pars sexta precise.*" Dieser Satz wird dann auf astronomische Fragen angewendet. Blatt $188^b$, 189 bis 196 sind leer. Auf Blatt $197^a$ beginnt dann der „*Tractatus de quantitate trium solidorum*", welchen das Inhaltsverzeichniss, sowie eine ganze Reihe anderer Handschriften dem Jsohannes Schindel[4]) zuweisen. Derselbe erstreckt sich bis Blatt $206^b$.

---

1) Suter, *Zeitschrift für Mathematik und Physik. Historisch-litterarische Abth.* XXXII, 41—42.

2) Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II, 131.

3) Sie fehlt auch in dem oben erwähnten Handschriftenkatalog.

4) Dass Johannes Schindel mit Johannes de Gamundia identisch ist, dürfte aus folgenden Handschriften der k. k. Hofbibliothek zu Wien hervorgehen:

1. Nr. $5412^3$, Blatt $155^b$—$160^b$. *Johannes Schindel de Gamundia, Tabulae stellarum fixarum partim verificatae per Georgium praepositum Neuburgensem.*
2. Nr. $5415^2$, Blatt $133^a$—$160^a$. *Johannes Schindel de Gamundia, Canones pro ecclipsibus solis et lunae.*
3. Nr. $5418^4$, Blatt $128^a$—$145^a$. *Johannes Schindel de Gamundia, Tractatus de quadrante horario.*
4. Nr. $5418^5$, Blatt $146^a$—$164^b$. *Johannes Schindel de Gamundia, Tractatus de composicione cylindri.*
5. Nr. $5501^1$, Blatt $1^a$—$19^a$. *Johannes Schindel de Gamundia, Calendarium.*

Hiervon gehören Nr. 4 u. 5 sicher dem bekannten Johann von Gmunden an, so dass über die Identität kaum Zweifel bleiben kann. Der Wiener Handschriften-

Dort heisst es: „*Explicit tractatus de quantitate trium solidorum secundum sentenciam ptolomei in Almagesti etc.*“ Es handelt sich um Grösse und Entfernung von Erde, Mond und Sonne untereinander.

Nun kommt Blatt 207ᵃ—218ᵇ unsere Abhandlung, der sich Blatt 219ᵃ bis 222ᵃ diejenigen Sätze anschliessen, welche ich in etwas anderer Reihenfolge im 8. Jahrgange der „*Bibliotheca Mathematica*“ veröffentlicht habe. Die Blätter 222ᵇ bis 232 sind leer.

Was nun die vorliegende Abhandlung betrifft, so wird der Werth derselben sich aus dem anschliessenden Commentare ergeben. Orthographie habe ich insoweit geändert, als ich überall *ae* statt des einfachen *e* gesetzt habe, um leicht möglichen Missverständnissen aus dem Wege zu gehen. Auch habe ich „*sphaera*“ statt „*spera*“ drucken lassen, dagegen habe ich *c* statt *t* beibehalten. Die Handschrift unterscheidet sehr genau zwischen beiden Buchstaben, und es ist jedenfalls für das Verständniss des Textes durch Beibehaltung dieses Unterschiedes kein Schade geschehen. Der anonyme Verfasser kennt ausser Euclides in der Ausgabe des Campanus den *liber trium fratrum de geometria;* er citiert das Buch: Archimenides *de curvis superficiebus*, eine Bearbeitung der Abhandlung *de cono et cylindro* von einem gewissen Johannes de Tlñ. Auch Johannes de Lineriis wird angeführt, doch ist es mir nicht möglich gewesen, die fragliche Schrift, auf welche Bezug genommen wird, aufzufinden. Sie muss sich mit trigonometrischen Untersuchungen befassen. Sonst habe ich alle von unserem Verfasser angeführten Stellen unter dem Texte als Anmerkungen im Wortlaute abdrucken lassen. Es folgt daraus, dass sein Euclides z. B. nicht vollständig mit der gedruckten campanoschen Uebersetzung gestimmt hat. Auch bei Archimenides *de curvis superficiebus* ergiebt sich an einer Stelle eine andere Satzzählung. Da in letzterer Abhandlung die Oberfläche eines Kegels richtig angegeben ist, so berührt es eigenthümlich, dass hier der Verfasser eine auch sonst mehrfach im Mittelalter auftretende absolut falsche Formel der Berechnung zu Grunde legt, obwohl er die Oberfläche des Cylinders unter Berufung auf die Abhandlung *de curvis superficiebus* richtig berechnet.

Die in den einleitenden Worten erwähnten *penthadonae domini* Moysis, können doch wohl kaum etwas anderes als den *Pentateuch* des Moses bedeuten. Doch ist freilich von dem, weshalb sie citiert werden, nichts zu

---

katalog hat daher im *Index nominum* bei Johannes Schindel nur den Vermerk *vide* Johannes de Gamundia.

Nach dem *Codex Amplonianus Qu. 278* stammte Johannes de Gemunden aus Schwaben. Es heisst dort: *Scholae et sophismata a magistro* Johanne de Gemunden *Suevo de suppositionibus* Marsilii de Ingen *instituta.*

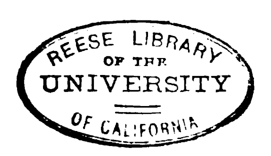
finden. Oder sollte doch irgend eine andere Schrift eines gewissen Moses gemeint sein?

Figuren sind sehr sauber und exact gezeichnet; so ist z. B. in § 8 die Seite der vierfachen Fläche eines gegebenen Kreises genau gleich $3\frac{1}{7}$ des Durchmessers gemacht worden.

Zwischen § 7 und § 8 schiebt das Manuscript wörtlich das nochmals ein, was ebenfalls nach dem Manuscript bei uns als letzter Paragraph gedruckt ist. Da an erster Stelle der in den einleitenden Worten angedeutete Grundgedanke der Abhandlung, nach dem die Kreisberechnungen denen der geradlinigen Gebilde vorausgehen sollen, unmotiviert unterbrochen wird, dagegen an der letzten Stelle ähnliche Betrachtungen nur weiter fortgesetzt werden, so dürfte die Auslassung an dieser ersten Stelle wohl als gerechtfertigt erscheinen. Ebenso habe ich den § 29, welcher zwischen § 39 und § 40 im Manuscript sich findet, an seine richtige Stelle gebracht. Dass er hier vergessen war, giebt die sonst dort beliebte folgerichtige Anordnung der Paragraphen deutlich zu erkennen, während wieder die im Codex beliebte Stelle den Gedankengang unterbrechen würde. Die Paragraphenzahlen, welche in der Handschrift sich nicht finden, es sind dort nur Absätze und grosse bunte Initialen hervorgehoben, habe ich hinzugefügt. Dass jedoch solche beabsichtigt waren, wird durch Rückbeziehungen, wie „*in 14ª huius*“ und ähnliche zur Gewissheit.

Vielleicht veröffentliche ich später auch die Abhandlung *De quadratura circuli,* welche auch neben der des Albertus de Saxonia Interesse beanspruchen darf.

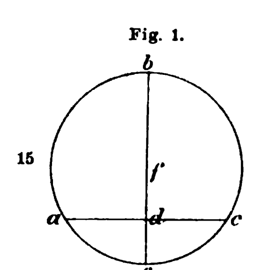
Thorn, 9. Mai 1895. **M. Curtze.**



## DE INQUISICIONE CAPACITATIS FIGURARUM.

| Aliquid de inquisicione capacitatis figurarum et quibusdam arismetricis orsurus dico, quod figurae capacitas dupliciter ad presens. Sumitur uno modo pro superficie tantum, et sic est planicies, area, podismus, campus, spacium, pedatura, fundus, embadum, seu superficies figurae absoluta vel linea seu lineis interclusa. Alio modo est tota moles solidi in relacione alicuius mensurae eam mensurantis considerata etc. Et quia circulus est figura omnium figurarum simplicissima, una enim tantum, ut vult EUCLIDES[1]) in primo suorum elementorum, linea continetur, a qua ideo non immerito, ut testatur dominus MOYSES in principio suarum penthadonarum,[2]) illud universale rerum commune opus incipit: ab illa igitur hic principium facere non indigne complacuit.

Fig. 1.




*1. Dati circuli centrum invenire.* (Fig. 1.)

Sit circulus datus $abc$, in quo ducam lineam rectam extremitates suas circumferenciae circuli applicantem, quomodocumque contingat; quae sit $ac$, quam per 10am primi EUCLIDIS[3]) diuidam per medium in puncto $d$. A quo puncto per 11am eiusdem primi duco perpendicularem ad lineam $ac$, quam applico transscendere circulum ex utraque parte, quae sit $edb$; quam rursus divido per aequalia in puncto $f$, quem dico centrum circuli esse.

Patet per primam tercii EUCLIDIS[4]) et per CAMPANUM[5]) ibidem.

---

1. Fehlt im Mscrpt. — 11. *ille universalis rerum opus commune opus.* — 23. Hier schiebt das Mscpt. ein, was wir unten in § 8 am Schlusse haben abdrucken lassen: *Radix quadrata . . . 36 2*ª.

---

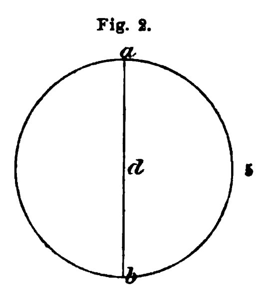
1) EUCLIDES I, *Def.* 19 (ich citiere nach der Campanoschen Ausgabe): *Circulus est figura plana, una quidem linea contenta, quae circumferencia nominatur.*

2) Worauf sich diese Bemerkung beziehen soll, weifs ich nicht.

3) EUCLIDES I, 10: *Proposita recta linea eam per aequalia dividere.*

4) EUCLIDES III, 1: *Circuli propositi centrum invenire.*

5) Es ist hier offenbar der Beweis des EUCLIDES dem CAMPANUS zugeschrieben, wie dies so häufig geschehen ist. Die von unserem Autor beliebte Construction ist nichts weiter als die Euclidische.




2. *Datae dyametri circumferenciam circuli invenire.* (Fig. 2.)

Esto, ut sit circulus *ab*, et dyametrus eius data, verbi gracia 14, sit *ab*. Quam dyametrum tripla, et proveniunt 42. Producto si $\frac{1}{7}$ dyametri praedictae, scilicet 2, addideris, | 44, quae sunt circuli circumferencia, producuntur.

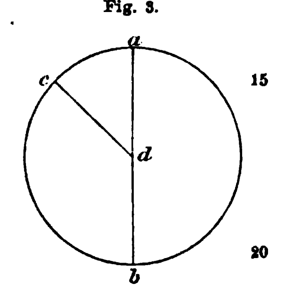
107′

Patet per 7<sup>am</sup> geometriae trium fratrum.[6])

3. *Datae circumferenciae circuli dyametrum indagare.*

Sit circumferencia circuli data, ut supra, verbi gracia 44. Ab ipsa igitur aufer 22<sup>am</sup> partem, scilicet 2, et residui tercia pars, scilicet 14, fit dyameter circumferenciae circuli praedictae.

Patet per dictam 7<sup>am</sup> geometriae trium fratrum.[7])




4. *Dati circuli embadum invenire.* (Fig. 2.)

Datum autem dico circulum, cuius dyameter est data.

Esto igitur circulus *ab*, cuius centrum *d*, et dyameter *adb* verbi gracia 14, et circumferencia 44. Ducta igitur medietate dyametri, scilicet *ad*, ut septem, in medietatem circumferenciae, ut in 22, provenit 154, quae sic dati embadum circuli producunt.

Patet per quartam trium fratrum.[8])

5. *Arcus dati sectoris aream invenire.* (Fig. 3.)

Circuli sector, ut vult Euclides[9]) diffinicione 10<sup>a</sup> tercii libri, est figura, quae sub duabus a centro ductis lineis et sub arcu, qui ab eis comprehenditur, continetur.

Esto sector *adc* in dato circulo *acb*, cuius centrum *d*, dyameter *adb* ut 14, et circumferencia *acb* tota 44, arcus autem, scilicet *ac*, ut 11,

---

20. *quae sunt dati. — producuntur.*

---

6) Hier citiere ich nach meiner Ausgabe: Der liber trium fratrum de geometria. Halle 1884. Das Citat ist so, wie es gegeben ist, falsch. Es muss heissen: „per 6<sup>am</sup>". Es heisst dort nach Archimedes Kreismessung: *iam ergo manifestum est ex eo, quod narravimus, quod proporcio lineae continentis circulum ad dyametrum eius est maior proporcione trium et decem parcium de septuaginta et una partibus ad unum, et est minor proporcione trium et septima unius ad unum, et illud est, quod declarare voluimus.*

7) Hier ist dieselbe Stelle des liber trium fratrum gemeint.

8) Liber trium fratrum, IV: *Medietatis dyametri omnis circuli multiplicacio in medietatem lineae continentis ipsum est embadum superficiei eius.*

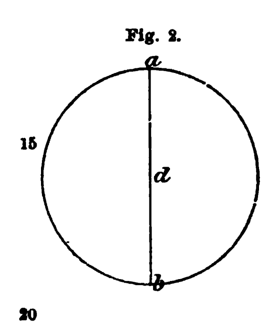
9) Euclides III, *Def.* 10: *Sector circuli est figura, quae sub duabus a centro ductis lineis et sub arcu, qui ab eis comprehenditur, continetur.*

embadum circuli per praecedentem 154. Sicut igitur se habet tota circumferencia *acb* ad arcum sectionis *ac*, sic se habet totum embadum circuli *acb* ad embadum sectoris *adc*.

Patet per Ptolemaeum[10]) in almagesti dictione sexta capitulo 7⁰, ubi 5 dicit: „*Et quia proportio orbium ad arcus erit aequalis proporcioni superficierum ipsorum ad superficies sectorum.*" Idem patet per corrolarium quartae trium fratrum.[11])

Duc igitur arcum sectoris, ut numeri secundi, in circuli embadum, ut tercium, et divide per primum, scilicet per circumferenciam circuli, | 203 10 et 38 et $\frac{1}{2}$ unius, quod est embadum sectoris, producitur.

Fig. 2.




6. *Sphaerae, cuius maximus fuerit datus circulus, planiciem indagare* (Fig. 2.)

Esto sphaera, cuius maximus datus circulus sit *ab*, et dyameter tota verbi gracia 14. Ergo per 15 quartam huius embadum circuli erit 154, quod si quadrupletur, exurgit embadum sphaerae praedictae, scilicet 616.

Patet per 15^am trium fratrum.[12])

Quod idem est, ac si dicatur: dyametrum in cir-20 cumferenciam circuli multiplica. Idem enim producitur.

7. *Datum circulum incrassare.* (Fig. 2.)

Circulum incrassare[13]) voco sphaerae molem seu magnitudinem, cuius maior circulus fuerit datus, invenire.

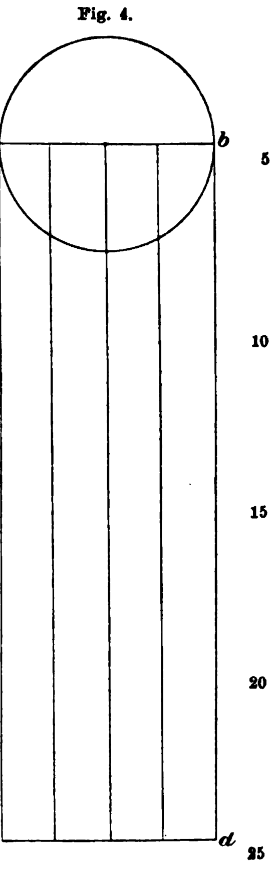
---

10) Ptolemaeus citiere ich nach der Uebersetzung des Gerhard von Cremona in der Ausgabe: Almageſtū CL. Ptolemei | Pheludienſis Alexandrini Astronomoꝝ principis: | opus ingens ac nobile omnes Celorū mo-|tus continens. Felicibus Aſtris eat in | luceꝫ: Ductu Petri Liechtenstein | Coloniēſis Germani. Anno | Virginei Partus. 1515. | Die. 10. Ja. Venetijs | ex officina eiuſ-|dem litte-|raria. |*.*| Cum privilegio. In dieser Ausgabe heisst es Blatt 68ª, Dictio Sexta, Capitulum septimum, Zeile 44—45: *Et quia proportio orbium ad arcus est equalis proportioni superficierum earum ad superficies sectorum.*

11) Liber trium fratrum, IV, S. 19, Z. 5ff.: *Et iam scitur ex illo, quod narravimus, quod, cum sumitur ex circulo abg arcus, quicumque arcus sit, et protrahuntur ex duabus extremitatibus eius duae lineae ad centrum circuli, est embadum huius trianguli, quem continet iste arcus et duae lineae, quae protractae sunt ab extremitatibus eius ad centrum, illud, quod fit ex multiplicacione medietatis dyametri circuli abg in medietatem arcus assumpti ex eo, et illud est propositum.*

12) Liber trium fratrum XV: *Multiplicacio medietatis dyametri omnis sphaerae in terciam embadi suae est embadum magnitudinis sphaerae.*

13) Das Wort *incrassare circulum* für Berechnung des Rauminhaltes einer Kugel kommt meines Wissens zuerst bei Gerbert vor. Dort heifst es: *Circulum incrassare si vis* etc. (*Olleris,* C. LVI; LXXXII), obwohl Blume in den *Gromatici*




Esto circulus datus, cuius volo crassitudinem, *ab*, cuius dyameter *ab* ut 14, quam cubabo, et proveniunt 2744, quae sunt cubus dyametri circuli dati. Qui cubus per 10^am ARCHIMENIDIS[14]) de curvis superficiebus habet se ad sphaeram dati circuli, sicut 21 ad 11. Ducatur igitur 11 in cubum, scilicet in 2744, et dividatur per 21, et 1437 et $\frac{1}{3}$ unius, quae sunt moles seu crassitudo circuli
208′ dati, producuntur. |

8. *Dati circuli orthoparallelogrammum quadruplum invenire.* (Fig. 4.)

Unde manifestum est, quod latus tetragonicum quartae orthoparallelogrammi praedicti est latus quadrati dato circulo aequalis.

Esto datus circulus *ab*, cuius dyameter *ab*. A terminis igitur dyametri *ab* ducam duas lineas rectas perpendiculares ad lineam *ab*, et ut quaelibet illarum sit aequalis circumferenciae circuli dati *ab*, quae sint *ac* et *db*, et complebo orthoparallelogrammum ducta linea *cd*: ergo per sextam ARCHIMENIDIS[15]) de curvis superficiebus ipsum orthoparallelogrammum *acdb* est aequale embado sphaereae circuli dati, ergo per 15^am geometriae trium fratrum ipsum orthoparallelogrammum est quadruplum ad circulum datum *ab*, quod erat assump-
209 tum. Rursus ex ultimo praedicti orthoparallelogrammi | quarta est aequalis circulo dato. Cuius quartae si per 40^am primi et ultimam secundi

---

7. *erit 1437.* — 8. Hier schiebt das Mscpt. den § 40 ein. Siehe die Einleitung. — 9. *orthoparalelogramum* und so immer. — 19. *sunt.*

---

*veteres* (II), behauptet die Stelle bei GERBERT nicht aufgefunden zu haben. In den beiden vorhandenen Ausgaben steht sie sogar an zwei verschiedenen Stellen.

14) Von der Schrift ARCHIMENIDES de curvis superficiebus ist der Wortlaut der Theoreme in der Heiberg'schen Ausgabe III, LXXXVII—LXXXVIII zum Abdruck gekommen. Unser Verfasser muss die Sätze X und XI als einen betrachtet haben. Nur Satz XI enthält das, was er ausspricht: *Cuiuslibet sphaerae proportio ad cubum suae dyametri est tanquam proportio undecim ad 21.*

15) ARCHIMENIDES de curvis superf., VI: *Cuiuslibet sphaerae superficies est aequalis quadrangulo rectangulo, quod sub lineis aequalibus dyametro sphaerae et circumferencia maximi circuli continetur.*

EUCLIDIS[16]) latus tetragonicum quaesieris, ipsum erit latus quadrati circulo dato aequalis. Radix quadrata areae circuli, scilicet 154, 14 $\frac{41}{100}$ fere, vel in phisicis 12 integra 24 M$^a$. 36 2$^a$.

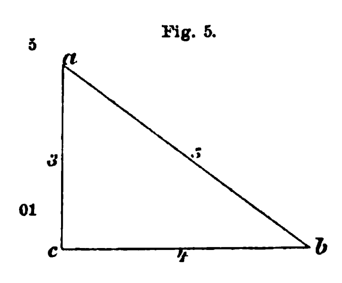


Fig. 5.

*9. Trigoni orthogoni omnium aut tamen duorum datorum laterum aream scrutare.* (Fig. 5.)

Sit triangulus orthogonus $abc$, cuius si duo latera angulum rectum ambiencia nota fuerint, verbi gracia $ac$ ut 3, $cb$ ut 4, duc unum in aliud, et producti medietas est area trianguli.

Patet haec per 41$^{am}$ primi EUCLIDIS.[17])

Si vero latus recto angulo oppositum, scilicet $ab$, cum uno tantum rectum angulum ambiencium, verbi gracia $bc$, nota fuerint, tunc subtrahe quadratum lateris $cb$, scilicet 16, de quadrato lateris $ab$, scilicet de 25, et remanet quadratum lateris $ac$, quod est 9, cuius radix quadrata est 3, et hoc latus $ac$. Quo cognito ut prius operatur.

Patet hoc per penultimam primi EUCLIDIS.[18])

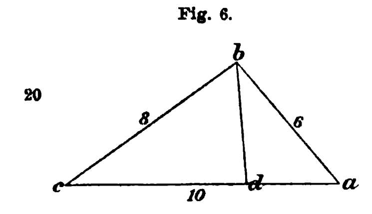


Fig. 6.

*10. In trigonis oxigoniis et ampligoniis datorum laterum cathetum invenire.* (Fig. 6.)

Cathetum voco lineam ab angulo oxigonii vel ampligonii ad latus oppositum perpendiculariter descendentem. In orthogonio enim illud quaerere non oportet: quaelibet enim linearum angulum rectum ambiencium potest dici, si placet, cathetus.

Sit igitur triangulus $abc$ notorum laterum $ab$ ut 6, $bc$ ut 8, $ca$ ut 10. Ab uno igitur angulorum trianguli ducatur linea perpendicularis super

2—3. *Radix.* — *2$^a$* steht in der Handschrift an der oben erwähnten Stelle. — 17. *Patet* bis *Euclidis* steht im Mscpt. vor *quod est 9.* — 19. *oxigonii et ampligonii.*

16) Das Citat EUCLIDES I, 40 ist falsch, es muss heissen I, 42. Dort heisst es: *Aequidistantium laterum superficiem designare, cuius angulus sit angulo assignato aequalis, ipsa vero superficies triangulo assignato aequalis.* — Das weitere Citat bedeutet II, 14: *Dato trigono aequum quadratum describere.*

17) EUCLIDES I, 41: *Si parallelogrammum triangulusque in eadem basi atque in eisdem alternis lineis fuerint constituta, parallelogrammum triangulo duplum esse conveniet.*

18) EUCLIDES I, 46, der Pythagoreische Lehrsatz: *In omni triangulo rectangulo quadratum, quod a latere recto angulo opposito in semetipso ducto describitur, aequum est duobus quadratis, quae ex duobus reliquis lateribus conscribuntur.*

09′ latus | eidem angulo oppositum, quae sit verbi gracia *bd*. Est enim illa, quae quaeritur. Et quia per penultimam secundi EUCLIDIS[19]) et CAMPANI[20]) ibidem quadratum lateris *ab*, quod opponitur angulo acuto *c*, minus est duobus quadratis duarum linearum *ac* et *bc* tantum, quantum est ex *ac* in *dc* bis, duo igitur quadrata, scilicet *bc*, quod est 64, et *ac*, 5 quod est 100, simul iungantur, et 164 proueniunt. De quibus demam quadratum *ab*, quod est 36, et remanent 128, et est illud, quod ex *ac* in *dc* bis sumptum. Cuius si medietatem acceperis, scilicet 64, et per lineam *ac*, scilicet 10, diviseris, 6 et $\frac{2}{5}$ unius, quae sunt linea *dc*, producuntur. Quadratum igitur *dc*, scilicet 40 partes 58 M^a^, subtrahamus 10 de quadrato *bc*, scilicet de 64, et remanent 23. et 2, quod est quadratum *bd*, cuius radix est 4.48, quae sunt cathetus *bd*, qui quaerebatur. Vel sic. Subtrahe quadratum *ab* de quadrato *bc*, et residuum divide per lineam *ac*, et producti medietatem adde super medietatem lineae *ac*, scilicet super 5, et proveniet maior pars lineae *ac*, scilicet *dc*, et si sub- 15 traxeris, minor pars producitur.

*11. Trigoni oxigonii seu ampligonii datorum laterum aream inquirere.* (Fig. 7.)

Sit trigonus quicumque iam dictorum *abc* datorum laterum *ab* verbi gracia ut 5, *bc* ut 8, *ca* ut 10. Et cathetus *bd* per praecedentem notus, 20 verbi gracia 3 . 58, ducatur in lineam *ac*, et producitur orthoparallelogrammum *aefc* 39 . 40, quod per 41^am^ primi EUCLIDIS[21]) est duplum ad datum triangulum *abc*. Medietas 25

210 | igitur eius, scilicet 19 . 50 est area trianguli *abc*, quod erat assumptum.

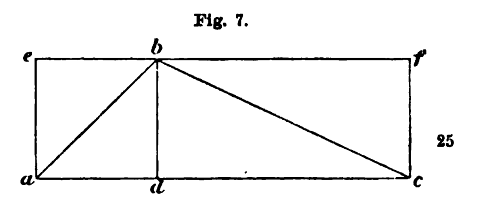


Fig. 7.

*12. Trigoni orthogonii, ampligonii seu oxigonii duorum tantum laterum et unius anguli, aut duorum angulorum et unius lateris, aut omnium datorum angulorum et ignotorum laterum, aut e converso aream invenire.* 30

5. *ac in dc* 𝔄 *Bis duo.* — 7. *et eius duplum est illud.* — 9. *10* fehlt.

19) EUCLIDES II, 13: ***Omnis oxygonii tanto ea, quae acutum respicit angulum, ambobus lateribus angulum acutum continentibus minus potest, quantum est, quod bis continetur sub uno eorum, cui perpendicularis intra superstat, eaque sui parte, quae perpendiculari anguloque acuto interiacet.***

20) Das bezieht sich wohl auf den von CAMPANUS hinzugefügten Schlusssatz zu obiger Proposicio: ***Notandum autem per hanc et praecedentem et penultimam primi, quod cognitis lateribus omnis trianguli cognoscitur area ipsius, et auxiliantibus tabulis de chorda et arcu cognascitur omnis eius angulus.***

21) Siehe oben Anmerkung 17.

In his variacio diversa occurrit, ideo de hiis in hoc breviloquio figurarum subticeo, quia de hac materia in tractatu de triangulorum noticia satis scripsi. Ideo de invencione arearum praedictarum cum tractatu praedicto et cum cordis et earum arcubus et cum tribus praecedentibus te 5 coadiuves, et habebis etc.[22])

Orthogonius autem est, cuius duorum laterum quadrata quadrato tercii lateris sunt aequalia. Si vero maiora fuerint, est oxigonius; si minora, ampligonius.

*13. Si latera trianguli nota fuerint, et volumus scire cuiuslibet lateris* 10 *oppositos angulos,* quadra latera et quadrata simul iunge. Et quod productum sit primus numerus, et quadratum cuiuslibet lateris parciale sit secundus numerus, et duo anguli recti, quos quilibet triangulus rectilineus per corrolarium 32ae primi Euclidis habet, sit tercius numerus. Duc igitur secundum in tercium et divide per primum, et sic angulos trianguli 15 invenies.[23])

Quod si anguli noti fuerint, et latera ignota, circumscribe triangulo circulum. Quia sunt noti, arcus erunt ipsis subscipientes noti, quorum arcuum quaere cordas et habebis latera nota.[24]) | 210′

Fig. 8.

a b d c

20 *14. Orthoparallelogrammi datorum laterum aream inquirere.* (Fig. 8.)

Esto orthoparallelogrammum $abcd$. Duc unum eius laterum in aliud angulum unum ambiencium, verbi gracia $ad$ in aliud, scilicet 25 in $dc$, et per primam diffinicionem secundi Euclidis[25]) producitur area orthoparallelogrammi praedicti.

*15. Datorum laterum et angulorum almuhaim et sibi similium aream invenire.* (Fig. 9.)

---

10. *angulos* fehlt. — 23. *aliud* fehlt.

---

22) Hieraus geht hervor, dass unser Verfasser ein Buch mit dem Titel: *Tractatus de triangulorum noticia* geschrieben haben muss. Vielleicht ist es möglich aus dieser Bemerkung den unbekannten Autor wieder zu erkennen.

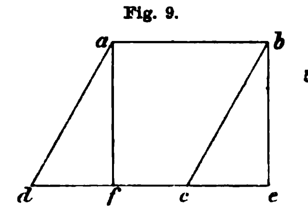
23) Euclides I, 32: *Omnis trianguli angulus extrinsecus duobus intrinsecis sibi oppositis est aequalis.* Omnes autem tres angulos eius duobus rectis angulis aequos esse necesse est.

24) Dass hier nur die relative Grösse der drei Seiten gefunden werden kann, ist von unserem Verfasser nicht scharf genug hervorgehoben worden.

25) Euclides II, *Def.* 1: *Omne parallelogrammum rectangulum sub duabus lineis angulum rectum ambientibus dicitur contineri.*

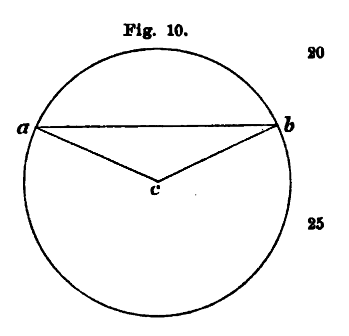
Almuhaim vero quadrangulum aequilaterum sed non aequiangulum. Similis almuhaim est quadrangulum solum laterum et angulorum sibi oppositorum aequalium.

Fig. 9.




Sit igitur almuhaim *abcd* datorum laterum, verbi gracia quodlibet ut 6, et angulo $d$ $\frac{2}{3}$ recti. A punctis ergo $a$ et $b$ ducam perpendiculares ad *cd* ea ultra tracta, quae sint *af* et *be*, et quaeram quantitatem lineae *af*, secundum quod linea *ad* est 6. Triangulo *adf* per 5^am^ quarti Euclidis[25a]) ymaginabor transscribi circulum *adf*, et quia $f$ est angulus rectus, erit per 30^am^ tercii[25b]) *ad* dyameter circuli *adf*, et arcus *afd* 180 gradus. Et quia angulus $d$ per ypothesin $\frac{2}{3}$ recti, erit per ultimam sexti[25c]) arcus *af* similiter $\frac{2}{3}$ de 180, quod est 120 g^s^, et corda eius *af* secundum quantitatem, qua dyameter *ad* est 120, erit 103 p^s^ et 55 minuta. Ergo secundum quantitatem, qua *ad* est 6, erit *af* 5 partes et 11 M^a^. Patet posito *ad*, prout est 120, pro primo numero, *af*, prout est 103 partes 55 minuta, pro secundo, et *ad*, prout est 6, pro tercio etc. Duc igitur *af* in *fe*, et producitur quadratum *abef*, quod est aequale almuhaim datae.

Fig. 10.




Patet sic. Quia duo triangli *adf* et *bce* sunt aequales, nam duo anguli | $d$ et $f$ unius sunt aequales duobus angulis $c$ et $e$ alterius per 29^am^ primi,[25d]) et duo latera *ad* et *af* unius sunt aequalia duobus lateribus *bc* et *be* alterius, ergo etc.; unde constat, quomodo quadratum aequale datae almuhaim describitur.

Et similis modus est recte de simili almuhaim.

*16. Porcionis circuli dati arcus aream scrutari.* (Fig. 10.)

Portio circuli est superficies inter datum arcum et cordam eius consistens.

Sit circulus *ab*, cuius centrum $c$, et arcus datus porcionis circuli,

---

3. *inaequalium.*

---

25a) Euclides IV, 5: *Circa trigonum assignatum, sive illud sit orthogonium, sive amplygonium, sive oxygonium, circulum describere.*

25b) Euclides III, 30: Siehe Anm. 30.

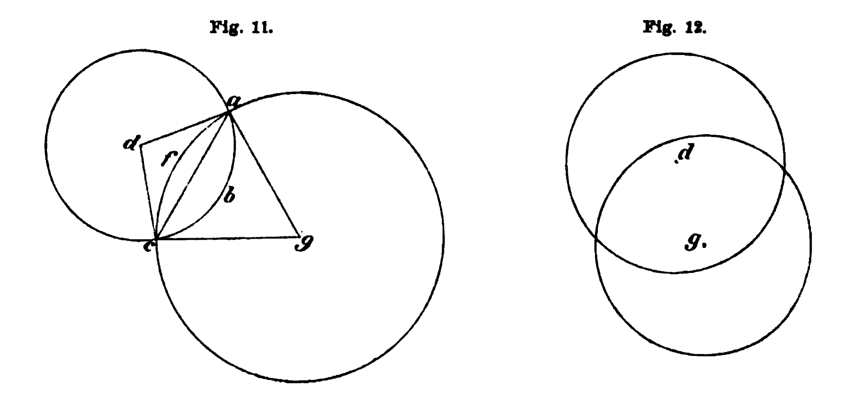
25c) Euclides VI, 32: Siehe Anm. 31.

25d) Euclides I, 29: *Si duabus lineis aequidistantibus linea supervenerit, duo anguli coalterni aequales erunt, angulusque extrinsecus angulo intrinseco sibi opposito aequalis, itemque duo anguli intrinseci ex alterutra parte constituti duobus rectis angulis aequales.*

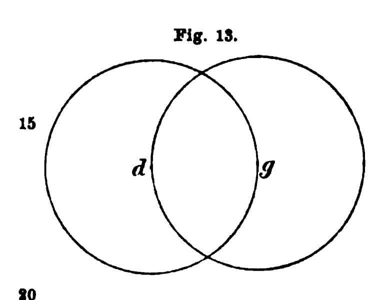
quae quaeritur, $ab$, cuius corda $ab$. Quia igitur arcus $ab$ est notus, erit corda eius $ab$ nota, et lineae $ac$ et $cb$, quia semidyametri dati circuli, notae. Ergo per 5[am] huius sector $acb$ erit notus, et per 11[am] huius trigonus $acb$ erit notus. Subtrahatur igitur trigonus de sectore, et residuum est porcio
5 circuli inter arcum et cordam $ab$ contenta.

*17. Porcionis circuli seu figurae ovalis datorum arcuum inter duos se ipsos secantes contentae circulos aream perquirere.* (Fig. 11.)

Sint duo circuli $afc$, cuius centrum $g$, et $abc$, cuius centrum $d$, in punctis $a$ et $c$ se intersecantes, ducanturque lineae $ag$ et $gc$, $ad$ et $dc$,




10 et linea $ac$. Quaerantur igitur per praecedentem areae duarum circuli portionum, scilicet $afc$ et $abc$, quas $ac$ corda mediat, et sic inventae simul iungantur, et area figurae ovalis $afcb$ producitur. Unde (Fig. 12) manifestum est, si circuli aequales se intersecantes alter alterius
15 arcum 132 graduum et 23 minutorum resecuerit, figura ovalis inter duos arcus praedictos inclusa erit fere medietas circuli cuiuslibet praedictorum. Et si (Fig. 13) duo circuli aequales se supra centra eorum | 211'
20 alterutri transeuntes intersecuerint, quilibet eorum aream inter alterutrius arcus inclusam continebit bis et fere 25 m[a].



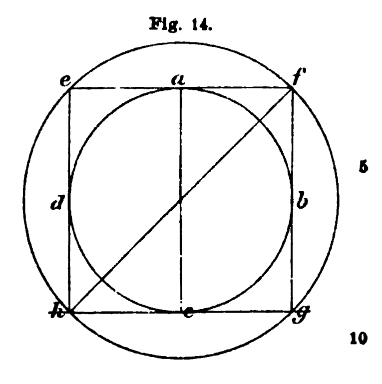

*18. Dato circulo duplum circulum depingere.* (Fig. 14.)

Sit circulus $abcd$, cuius dyameter $ac$, cui per 7[am] quarti circum-
25 scribatur quadratum $efgh$. Item per 9[am] quarti Euclidis eidem quadrato

7. *ipsum.*

*efgh* transscribam circulum *efgh*. Quia igitur quadratum lineae *fh*, quae est dyameter circuli maioris, per penultimam primi est duplum ad quadratum lineae *fg*, quae est aequalis dyametro circuli minoris: ergo per $2^{am}$ duodecimi[26]) circulus, cuius dyameter est *fh*, est duplus ad circulum, cuius dyameter est *ca*.

Fig. 14.

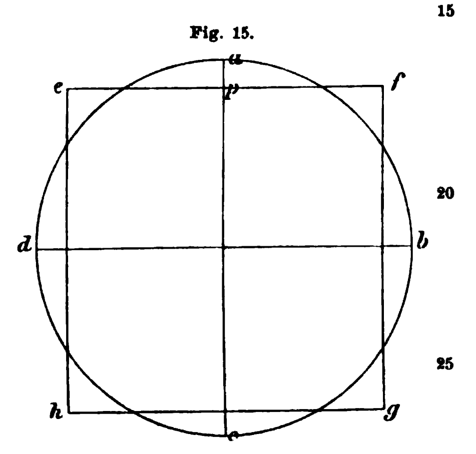



*19. Excessus quadrati datorum laterum ad circulum sibi inscriptum et e converso verisimiliter indagare.* (Fig. 14.)

Sit quadratum *efgh* datorum laterum, cuius scias aream per $14^{am}$ huius. Deinde similiter scias aream circuli quadrato praedicto inscripti per quartam huius. Subtrahatur itaque unum ab alio, et habebitur intentum. Et similiter e converso, ut supra in figura, excessus quadrati inscripti ad circulum erit $\frac{8}{11}$ ipsius circuli.

*20. Dato circulo quadratum aequale verisimiliter depingere.* (Fig. 15.)

Fig. 15.




Sit circulus *abcd*, quam quadrabo duabus dyametris *ac* et *bd*, cuius dyameter ut 14, circumferencia 44 et area 154. Huius igitur areae quaeram radicem quadratam, et est 12 partes 24 $m^a$ 35 $2^a$; et hoc est latus quadrati dato circulo aequalis, super quod si constituo quadratum per $45^{am}$ primi Euclidis,[27]) habeo, quod intendo. Si vero quadratum aequale circulo super idem centrum circuli depingere voluerim, radicem praedictam a toto dyametro demam, et residuum est 1 pars 35 $m^a$ 25 $2^a$; cuius accipio medietatem, scilicet 47 $m^a$ 42 $2^a$, quae sunt fere una $17^a$, $\frac{1}{17}$ dyametri, et eam signabo in dya-

---

12. *per 13am.* — 17. *circulum et* $\frac{3}{11}$.

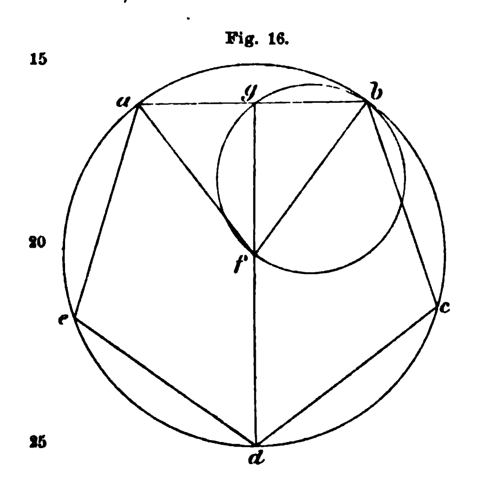
---

26) Euclides IV, 7: *Circa propositum circulum quadratum describere.* — IV, 9: *Circa assignatum quadratum circulum describere.* — XII, 2: *Omnium duorum circulorum est proportio alterius ad alterum tanquam proportio quadrati suae diametri ad quadratum diametri alterius.*

27) Euclides I, 45: *Ex data linea quadratum describere.*

metro per lineam *ap*. Posito igitur *ap* synu verso, quaeram arcum eius per quartam primi Magistri de Lineriis,[28]) et habetur sic. Primum convertam eum in numerum, quo dyameter est 120 partes. Sit 14 primus numerus, et sinus praedictus, scilicet 47 m^a^ 42 2^a^, secundus, 5 et 120 tercius. Ducatur igitur secundus in tercium etc., et proveniunt 6 partes 48 m^a^ 51 2^a^, quae sunt sinus versus praedictus secundum quantitatem, qua dyameter est 120 partes, cuius arcus est 27 gr^a^ 34 m^a^. | A 211 qualibet igitur extremitate ambarum dyametrorum accipiam distanciam 27 graduum et 34 minutorum, prout circumferencia circuli est 360 partes, 10 vel 3 partes et $\frac{1}{8}$ fere, prout circumferencia est 44 partes, quae sit verbi gracia *am* et *an*; et sic de aliis dyametrorum extremitatibus signando semper tales distancias per puncta. Deinde per illa puncta trahantur lineae rectae, donec extra circulum concurrant, et producitur quadratum, quod quaeritur. Unde constat, quod de 15 qualibet dyametro in utraque eius extremitate resecabitur per costas quadrati minus $\frac{1}{17}$ et plus $\frac{1}{18}$ quasi per medium. Constat eciam triangulos et porciones circuli inter quadratum 20 et circumferenciam circuli contentas sibi invicem esse aequales.

Fig. 16.




*21. Figurarum poligoniarum datorum aequalium laterum, ut pentagoni, exagoni, ebdagoni etc. arcam invenire.* (Fig. 16.)

25 Notandum autem, quod omnis figurae poligoniae regularis, secundum quod vult Campanus[29]) commento 32^0^ primi Euclidis, omnes anguli simul sumpti valent tot rectas, quot sunt | eius omnes anguli duplicati 212' 30 demptis inde quatuor.

---

8. *eam*

---

28) Das Werk des Magister de Lineriis, welches hier gemeint ist, kenne ich nicht. Es dürften vielleicht die *Canones primi mobilis* gemeint sein, welche am Anfange sich mit Trigonometrie beschäftigen.

29) In der berühmten Anmerkung des Campanus zu dem oben Anmerkung 23 angeführten Satze, welche die Sternpolygone behandelt, heisst es: *Similiter quoque patet, quod omnis figurae polygoniae anguli omnes extrinseci quatuor rectis angulis sunt aequales: sunt enim intrinseci et extrinseci bis tot rectis aequales, quot*

Esto igitur pentagonus *abcde*, cuius centrum *f*. A vicinis ergo angulis, scilicet *a* et *b*, ducam lineas *af* et *bf*, et a medio lineae *ab* lineam *gf*. Pentagoni igitur illius tocius omnes anguli simul sumpti valent sex rectos, ergo quilibet angulus eius singillatim valet unum rectum et $\frac{1}{5}$ unius; et medietas eius, scilicet angulus *fbg*, erit $\frac{1}{2}$ recti et $\frac{1}{10}$ eius, quod est $\frac{3}{5}$ unius recti, ergo reliquus angulus *bfg*, residuum unius recti, erit $\frac{2}{5}$ recti, cum angulus *g* sit rectus. Ergo per 30$^{am}$ tercii Euclidis[30]) latus *fb* erit dyameter circuli circumscripti triangulo *fbg*. Et quia duo anguli recti in quolibet triangulo contenti valent 180 gr$^{a}$ circuli sibi circumscripti, ergo per ultimam sexti Euclidis[31]) arcus *gf* habebit eciam $\frac{3}{5}$ de 180, scilicet 108, cuius corda 97 partes 5 m$^{a}$; et arcus *bg* habebit secundum hoc $\frac{2}{5}$, residuum scilicet de 180, quod est 72 gradus, cuius corda est 70 partes 38 m$^{a}$. Posito igitur, quod latus pentagoni sit ut 6, medietas eius *gb* erit ut 3, ergo secundum eandem proporcionem latus *fg* erit 4 partes et 8 m$^{a}$. Cum igitur duxeris *bg*, scilicet 3, in *gf*, scilicet in 4 partes et 8 m$^{a}$, producitur area trianguli *abf*, scilicet 12 partes et 24 m$^{a}$. Quae si quinquies accipies 62 proveniunt, area scilicet tocius, quod erat assumptum. Et per eundem modum de omnibus aliis figuris poligoniis aequilateris operare.

Si vero ex eis aliquae earum inaequalium laterum occurrant, prius in triangulos resolvantur, | deinde per undecimam huius operare.

Fig. 17.

*22. Pentagoni Salemonis*[32]) *aream invenire.* (Fig. 17.)

Sit igitur pentagonum Salemonis *fdehg*, cui circumscribam circulum *fdehg* super centrum *c*, et lineam *fe* dividam per medium in puncto *a*, et

---

7. $\frac{1}{5}$ *recti.* — *per* 3$^{am}$ *tercii.* — 24. *decimam.*

---

***habuerint angulos per 13 propositionem. Intrinseci autem sunt bis tot rectis aequales, quot habuerint angulos, demptis inde quatuor*** etc.

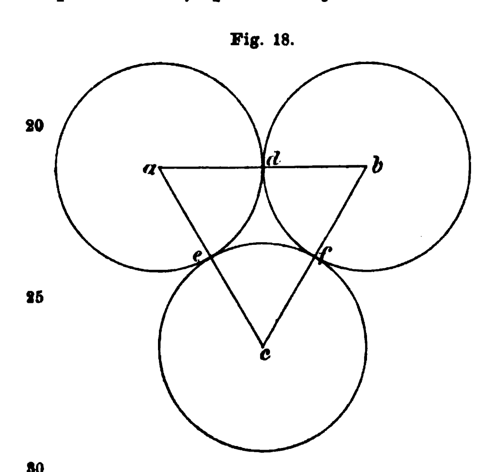
30) Euclides III, 30: *Si rectilineus angulus in semicirculo supra arcum consistat, rectus est.*

31) Euclides VI, 32: *Si in circulis aequalibus supra centrum sive supra circumferentiam anguli consistant, erit angulorum proportio tanquam proportio arcuum illos angulos suscipientium.*

32) In geometrischen Abhandlungen tritt uns hier wohl zuerst das Sternfünfeck als Salomonisches Fünfeck entgegen.

in punctis intersectionum laterum pentagoni iuxta *a* signabo *k*, *b*, dividamque arcum *de* per medium in puncto *r*, et protraham lineas *cb* usque ad *r* et *ca* usque ad *d*; igitur per terciam tercii Euclidis[33]) cadit perpendiculariter super *fe*, et quia arcus *de* est $\frac{1}{5}$ circuli, ipse erit 72 gr^a^.
5 Igitur sinus eius *ae* est 57 partes 4 m^a^ secundum quantitatem, qua semidyameter *ce* est 60 parcium. Ergo per penultimam primi Euclidis[34]) erit *ca* secundum eandem quantitatem 18 partes et 32 m^a^. Quare eciam arcus *dr* per ypotesin est 36 gr^a^, et angulus *acb* 36 gr^a^ similiter continebit, ergo sinus *ab* arcus circuli, cuius dyameter ymaginatur esse *cb*,
10 est 35 partes 16 m^a^, et angulus *abc*, qui est residuum recti, prout rectus continet 90 partes, est 64 partes, et sinus eius *ac* 42 p^a^ 32 m^a^ secundum quantitatem, qua est *cb* 60 partes. Ergo secundum quantitatem, qua *ca* sunt 18 p^a^ 32 m^a^ et *ae* 57 p^a^ 4 m^a^, erit *ab* 13 p^a^ 28 m^a^. Posita igitur semidyametro *cd* ut 7, erit *ca* 2 p^a^ 10 m^a^, et *ad* 4 p^a^ 50 m^a^, et *ab* se-
15 cundum eandem quantitatem 1 p^a^ 34 m^a^. Quia igitur *ab* et *ad* secundum quantitatem, qua semidyameter *dc* erit 7, sunt nota, erit per 11^am^ huius area trianguli *dkb* et cuiuslibet sibi comparium 7p^a^ 34 m^a^, quibus quinquies sumptis exurgit area omnium
20 triangulorum | sibi comparium pen- 213 tagoni praedicti, scilicet 37 p^a^ et 50 m^a^. Et quia *ab* est 1 p^a^ 34 m^a^, erit *kb* 3 p^a^ 8 m^a^, et quia *kblmn* pentagonus est aequilaterus, erit per
25 praecedentem area eius 17 partes, cui si iungatur area triangulorum praedictorum, scilicet 37 p^a^ 50 m^a^, 54 p^a^ 50 m^a^, quae sunt tocius area praedicti pentagoni producuntur.
30 Unde eciam constat proporcio circuli ad pentagonum ipsum circumscribentis.

Fig. 18.




*23. Figurae curvilineae inter tres aut quotlibet circulos datos aequales se ipsos contingentes contentae aream invenire.* (Fig. 18.)

Sit igitur triangulus curvilineus *def*, contentus inter tres circulos

---

13. *ac 47 p^a^ 4 m^a^.*

---

33) Euclides III, 3: *Si lineam intra circulum praeter centrum collocatam alia a centro veniens per aequa secet, orthogonaliter super eam insistere, et si in eam orthogonaliter steterit, eam per aequalia dividere necesse est.*

34) Euclides I, 46: Der pythagoreische Lehrsatz. Siehe oben Anm. 18.

aequales, scilicet $de$, cuius centrum $a$; $ef$, cuius centrum $c$; et $fd$, cuius centrum $b$, et trahantur lineae rectae $ac$, $cb$, $ba$. Ergo per $11^{am}$ tercii EUCLIDIS[35]) omnes tres lineae praedictae transibunt per puncta contactus circulorum, et per consequens per fines trianguli $def$. Quia igitur latera trianguli nota sunt, quia aequalia dyametris circulorum, et sit verbi gracia quilibet ut 14, ergo per $11^{am}$ huius area trianguli est 84. Deinde omnium trium sectorum latera sunt nota, arcus autem sic scientur. Angulos figurae per lineas inter centra circulorum tractas causatae dupla, et erunt verbi gracia in triangulo sex. De quibus deme quatuor, et remanent duo anguli recti, quos duos rectos divide per numerum angulorum figurae, scilicet per 3, et proueniunt cuilibet angulo trianguli $\frac{2}{3}$ unius recti. Et quia cuilibet angulo recto super centrum circuli constructi prout circumferencia circuli est | 360, correspondent 90 $gr^a$, ergo $\frac{2}{3}$ unius recti correspondent $\frac{2}{3}$ de 90 gradibus, quae sunt 60 $gr^a$, et idem est arcus cuiuslibet sectoris. Prout autem circumferencia est 44 partes, uni recto correspondent 11 $p^a$, scilicet $\frac{1}{4}$ circuli, et duabus terciis recti correspondent 7 partes et $\frac{1}{3}$ unius. Igitur per ultimam sexti EUCLIDIS[36]) quilibet arcus sectoris erit totidem, scilicet 7 partes et $\frac{1}{3}$ unius. Ergo per quartam huius area unius porcionis erit 25 $p^a$ et 35 $m^a$, et omnium trium simul 76 $p^a$ et 45 $m^a$. Dempta igitur area omnium sectorum de area trianguli remanent 17 $p^a$ 15 $m^a$, quae sunt area figurae curvilineae $def$, quae quaerebatur.

Fig. 19.

*24. Columpnae rotundae datorum basis et altitudinis aream invenire.* (Fig. 19.)

Columpna rotunda, ut vult EUCLIDES[37]) $11^{ma}$ diffinicione undecimi, est transitus parallelogrammi rectanguli latere rectum angulum continente fixo ipsaque superficie, donec ad suum locum redeat, circumducta.

Columpnae datae basis circumferenciam, verbi gracia ut 44, duc in

---

27. *lateris.*

---

35) EUCLIDES III, 11: *Si circulus circulum contingat, lineaque per centra transeat, ad punctum contactus eorum applicari necesse est.*

36) EUCLIDES VI, 32: Siehe Anm. 31.

37) EUCLIDES XI, *Def.* 11: *Figura corporea rotunda, cuius bases sunt circuli duo plani extremitatibus et crassitudine, id est altitudine, aequales, est transitus parallelogrammi rectanguli latere rectum angulum continente fixo ipsaque superficie, donec ad locum suum redeat, circumducta. Diciturque haec figura columna rotunda.*

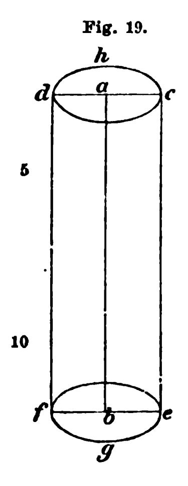


Fig. 19.

axem seu altitudinem columpnae, ut in 12, et per secundam ARCHIMENIDIS[38]) provenit tota curva superficies columpnae, scilicet 528. Cui si areas duorum circulorum columpnae per quartam huius scitas adiunxeris, totalis superficies columpnae exurgit, scilicet 836.

*25. Columpnae rotundae datorum basis et altitudinis capacitatem seu crassitudinem invenire.* (Fig. 19.)

Sit columpua ut prius, cuius basis *fge* verbi gracia 154, et altitudo *ba* ut 12. Duc igitur basim in eius altitudinem, et proveniunt 1848, quae sunt crassitudo columpnae praedictae.

Et de hiis columpnis rotundis et doleis et vasibus et eorum capacitatibus satis | prius dictum est in tractatu collacionum de virga visoria, ideo hic non repetam illud.[39])

*26. Piramidis rotundae basis circulo et eius ypotenusa datis aream invenire.* (Fig. 20.)

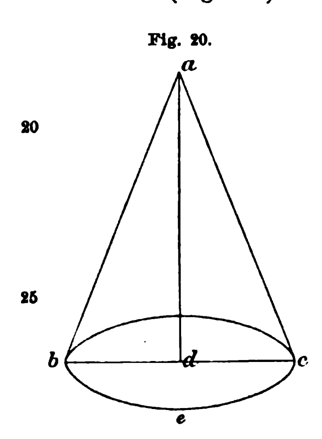


Fig. 20.

Piramis rotunda est transitus trianguli rectanguli alterutro suorum laterum rectum angulum continencium fixo, donec ad locum, unde cepit, redeat, triangulo ipso circumducto. Haec EUCLIDES[40]) sui 11$^0$. Quid autem sit ypotenusa patet in hiis versibus:

Protracta linea basis est, erecta cathetus;
Tenditur ad fines ypotenusa duos.

Sit rotunda piramis *abc*, cuius sit basis nota, scilicet circulus *bec*, et similiter nota ypotenusa *ac*; et sit eius axis sive altitudo *ad*. Duc igitur circumferenciam circuli *bce* in altitudinem *ad*, et producti medietatem accipe, quia ipsa est id, quod quaeritur, addita ei area circuli basis per 4$^{am}$ huius nota. Si vero nescieris quantitatem altitudinis *ad*, duc medietatem dyametri circuli *bec*

5. *scilicet 836* fehlt.

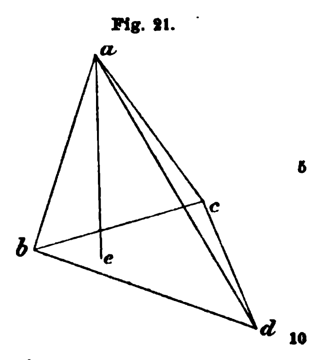
38) ARCHIMENIDES de curv. superfic. II: *Cuiuslibet columpnae rotundae curva superficies aequalis est tetragono, qui continetur sub lineis aequalibus axi columpnae et circumferenciae basis.*

39) Unser Verfasser hat also auch eine Abhandlung *de virga visoria* geschrieben.

40) EUCLIDES XI, *Def.* 10: *Pyramis rotunda est figura solida estque transitus trianguli rectanguli alterutro suorum laterum rectum angulum continentium fixo, donec usque ad locum, unde moveri coepit, redeat, triangulo ipso circumducto.*

in se, et similiter unam ypotenusarum in se, et subtrahe unum quadratum ab alio, et residui radix quadrata est ipsa altitudo.

Fig. 21.

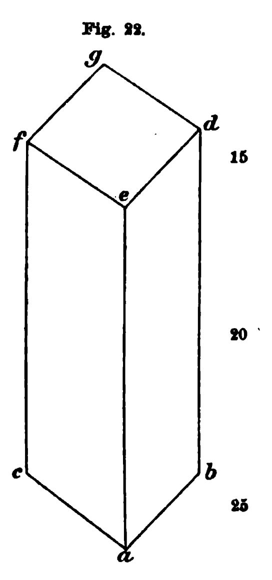



*27. Piramidis ortholateratae basi et ypotenusa datis aream inquirere.* (Fig. 21.)

Istae piramidis lateratae sunt superficies plures triangulae. Ideo area illarum quaeratur per $11^{am}$ huius, et area basis per eandem vel $20^{am}$, et omnia sic inventa simul iungantur, et constat propositum.

*28. Piramidis rotundae aut lateratae regularis* | *datae basis et altitudinis crassitudinem invenire.*

Fig. 22.




Duc superficiem basis eius in suam altitudinem, et provenit crassitudo columpnae basis praedictae. Cuius si $\frac{1}{3}$ acceperis, ipsa eadem $\frac{1}{3}$ erit crassitudo piramidis praedictae.

Patet per $9^{am}$ duodecimi EUCLIDIS[41]) et per $12^{am}$ addicionis CAMPANI[42]) ibidem.

*29. Cubi et columpnae orthoquadrilaterae datorum laterum aream invenire.* (Fig. 22.)

Age per $14^{am}$ huius et habebis intentum. Omnes enim horum superficies orthoparallelogrammi sunt.

*30. Cubi et columpnae orthoquadrilaterae datorum laterum capacitatem invenire.* (Fig. 22.)

Sit cubus seu columpna orthoquadrilatera *dbcf*, cuius basis orthoquadrangula nota per $14^{am}$ huius *defg*, altitudo vero *ea*. Duc igitur aream basis *defg* in altitudinem huiusmodi corporis, scilicet in *ea*, et producitur moles seu capacitas eius.



*31. Solidi almuhaim seu sibi similis datorum laterum et angulorum aream invenire.* (Fig. 23.)

---

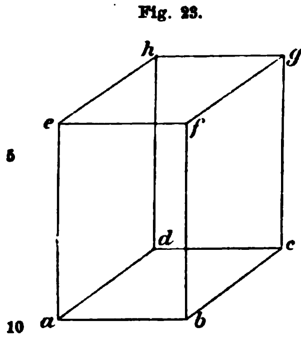
4—5. *circulo basis et ypotenusa.* — 7. *triangulos.* — 19—22. Finden sich im Manuscript zwischen § 39 und 40 eingeschoben. Siehe Einleitung. — 26. *per 13am.*

---

41) EUCLIDES XII, 9: *Omnis columna rotunda pyramidi suae tripla esse comprobatur.*

42) Es muss heissen: *per addicionem 8ao* CAMPANI *ibidem.* Dort heisst es nämlich: *Omnis laterata columna tripla est ad suam pyramidem.*

Fig. 23.



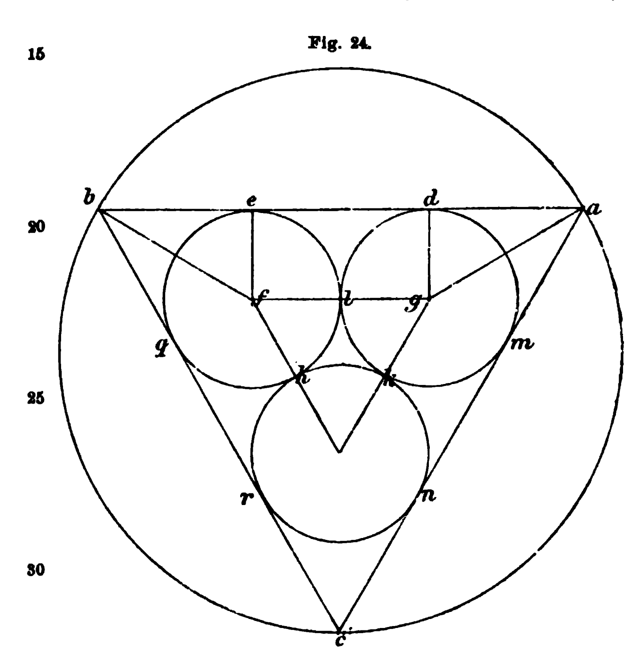

Primo duarum superficierum corporis supradicti almuhaicarum quaere aream per $15^{am}$ huius. Deinde aliarum superficierum quaere areas per $14^{am}$ huius, et eas omnes simul iunge, et habebis intentum.

Capacitatem autem eius seu molem vel crassitudinem scias sic. Postquam inveneris eius aream, ut praedicitur, duc aream basis eius in altitudinem eius, et productum est crassitudo eius, etc.

*32. Trianguli aequianguli datis tribus circulis aequalibus se ipsos tangentibus iis circumscripti aream invenire.* (Fig. 24.)

Sint tres dati circuli *dlk*, cuius centrum *g*; *elh*, cuius centrum *f*; et *hkn*, cuius centrum *p*, aequales se ipsos in punctis *l*, *k*, *h* tangentes, quibus circumscribatur triangulus aequilaterus *abc* eos in punctis *d*, *e*; *q*, *r*; *n*, *m* secundum sua latera contingens, cui triangulo circumscribam circulum *abc*. | Dico, quod si noti fuerint circuli praedicti, notus erit et triangulus eis circumscriptus, unde manifesta erit ex hoc proporcio circuli magni praedicto triangulo circumscripti ad quemlibet circulorum parvorum triangulo inscriptorum. Ducantur lineae *ag*, *dg*, *fb*, *ef* et *fg*. Ergo per $17^{am}$ tercii Euclidis[43]) lineae *fe* et *gd* sunt perpendiculares ad lineam *ab*, et quia

Fig. 24.




2 *per 14am.* — 4. *per 13am.* — 28. *manifestum.*

43) Euclides III, 17: *Si circulum linea recta contingat, a contactu vero ad centrum linea recta ducatur, necesse est eam super lineam contingentem esse perpendicularem.*

arcus *bc* circuli *abc*, quia est tercia pars eius per ypotesin, est 120 gr$^{a}$, ideo per ultimam sexti EUCLIDIS[43a]) angulus *bac* praedictum arcum suscipiens est eciam 120 gr$^{a}$, et medietas eius, scilicet angulus *gad*, est 60 gr$^{a}$. Ergo posita dyametro *ga* arcus *gd* erit eciam 60 gr$^{a}$, et corda eius *dg* erit similiter 60 gr$^{a}$. Ergo arcus, qui est super *da*, scilicet residuum de 180, erit 120 gr$^{a}$, et corda eius 103 partes et 55 minuta. Ergo secundum quantitatem, qua *gd* semidyameter est ut 7, erit linea *da* 12 p$^{a}$ et 7 m$^{a}$. Patet posito *da*, scilicet 103 p$^{a}$ 55 m$^{a}$, pro primo numero, *dg* ut 60 pro secundo, et *da* tercio incognito, et *dg* ut 7 quarto. Duc igitur primum in quartum et divide per secundum, et patet. Et eadem racione *be* erit 12 p$^{a}$ 7 m$^{a}$. Et quia *gf* per 11$^{am}$ tercii vadit per contactum circulorum, scilicet punctum *b*; ipsa est duae semidyametri, ideo est 14; ergo per 33$^{am}$ primi EUCLIDIS[44]) erit *ed* eciam 14 partes. Quare tota linea *ab* erit 38 p$^{a}$ 14 m$^{a}$ secundum quantitatem, qua *gd* fuit 7 partes, et per consequens lineae *bc* et *ca* quaelibet earum erit similiter 38 p$^{a}$ 14 m$^{a}$. Ergo per 11$^{am}$ huius area trianguli *abc* erit 633 partes et 4 minuta secundum partes, quibus area circuli *dlkm* est 154. | Cathetus enim huius trianguli est 33 p$^{a}$ 7 m$^{a}$. Item per 13$^{am}$ huius orthoparallelogrammum *efgd* est 98 partes, et per 5$^{am}$ huius quilibet sectorum *efl* et *dlg* est 38 p$^{a}$ et 30 m$^{a}$; qui si simul iuncti subtrahantur de orthoparallelogrammo *efgd*, remanet quantitas figurae curvilineae *eld* et cuiuslibet duarum sibi similium, scilicet *hqr* et *nkm*, 20 partes. Quilibet circulus *dmkl* fuit 154 partes; et per 22$^{am}$ huius figura curvilinea *lhk* est 7 partes et 15 m$^{a}$. Quibus igitur hiis quatuor figuris curvilineis simul iunctis 67 p$^{a}$ et 15 m$^{a}$ producuntur. Nunc omnia simul a totali area trianguli, scilicet 633 p$^{a}$ 4 m$^{a}$ aufferantur, et 103 p$^{a}$ 49 m$^{a}$ remanebunt, quae per 3 parciantur, et 34 p$^{a}$ 36 m$^{a}$, quae sunt quantitas cuiuslibet triangulorum, scilicet *adm*, *qbe* et *rnc*, producuntur, quod erat assumptum. Et quia arcus circuli magni *ab* est 120 gr$^{a}$, erit corda eius *ab* 103 . 55 secundum quantitatem, qua dyameter circuli *abc* est 120; ergo secundum quantitatem, qua linea *ab* fuit 38 p$^{a}$ et 14 m$^{a}$ et similiter circuli parvi *dg* 7 partes, erit dyameter circuli magni *abc* 43 p$^{a}$ et 53 m$^{a}$. Patet posita dyametro circuli *abc* 120 pro primo numero, et corda *ab* 103 p$^{a}$ 55 m$^{a}$ pro secundo, et dyametro eadem priusquam ignota pro tercio, et *ab*, prout est 38 . 14,

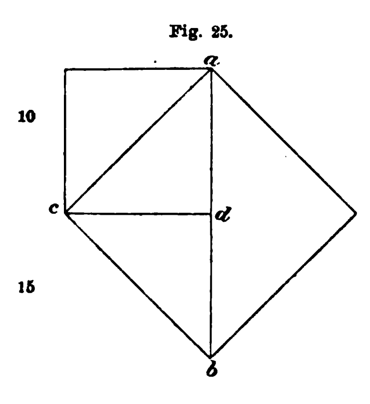
22. *scilicet lhg*. — 26. *et* fehlt.

43a) EUCLIDES VI, 32: Siehe Anm. 31.

44) EUCLIDES I, 33: *Si in summitatibus duarum linearum aequidistantium et aequalis quantitatis aliae duae lineae coniungantur, ipsae quoque aequales et aequidistantes erunt.*

pro quarto. Ducatur igitur primus in quartum et diuidatur per secundum etc. Ergo circumferencia circuli magni secundum eandem eius dyametrum iam inventam et secundum quantitatem, qua circumferencia circuli parvi *dmkl* est 44 partes, erit 138 partes et minutum unum. | Et secundum 216' 5 hoc erit area eiusdem circuli magni *abc* 1514 partes et 33 m^a^, quibus area circuli parvi *dmkl* est 154 partes. Nunc si aream trianguli *abc*, scilicet 633 p^a^ et 4 m^a^, de area circuli *abc*, scilicet de 1514 et 33 minutis, subtraxeris, et residuum, scilicet 881 et 29 10 minuta fueris in tres partes partitus, producetur 293 et 50 m^a^, quod est cuiuslibet porcionis circuli extra triangulum relictae quantitas singillatim.

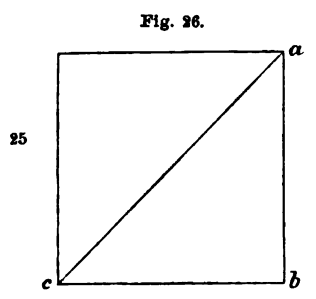
Fig. 25.




*33. Dyametri quadrati ad costam esse medic- 15 tatem duplae proporcionis ostendere.* (Fig. 25.)

Sit quadratum *adb*, cuius dyameter *ab*. Quam dyametrum dividam per medium in puncto *c* et describam super hanc medietatem dyametri *ac* aliud quadratum minus *acd*, et quia proporcio *ab* ad *ac* est 20 dupla per ypotesin, ergo *ab* ad *ad* est medietas duplae. Patet sic. Sicut se habet *ab* ad *ad*, sic se habet *ad* ad *dc* vel ad *ac*. Patet hoc per ultimam primi EUCLIDIS.[45]) Sed quia proporcio extremorum, scilicet *ab* ad *ac*, colligitur ex proporcionibus mediorum, scilicet 25 ex *ab* et *ad* et ex *ad* ad *ac*, ut vult EUCLIDES[46]) per 19^am^ diffinitionem septimi EUCLIDIS, et proporciones intermediae sunt continuae, ergo *ab* ad *ac* est medietas duplae, et similiter *ac* ad *dc* alia medietas duplae patet.

Fig. 26.




30 *34. Dyametrum quadrati ad costam eiusdem secundum proporcionem racionabilem esse incommensurabilem demonstrare.* (Fig. 26.)

Esto quadratum *abc*, cuius dyameter *ac* et costa *ab*. Dico, quod, qui-

---

30. *Dyametrorum.*

---

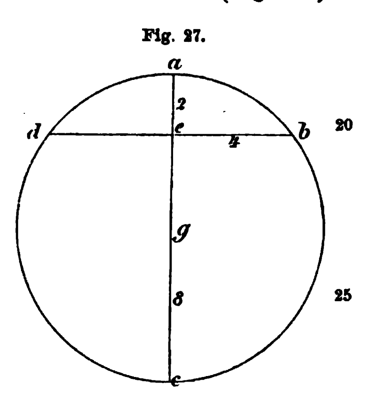
45) EUCLIDES I, 47: Dieser Satz, die Umkehrung des Pythagoras, hat hier jedenfalls mit dem Beweise nichts zu schaffen. Es kommt auch in dem Euclidischen Beweise nichts vor, was mit der Behauptung unseres Verfassers Aehnlichkeit hätte.

46) EUCLIDES VII, *Def.* 19: *Cum continuatae fuerint eaedem vel diversae proportiones, dicetur proportio primi ad ultimum ex omnibus composita.*

cumque numerus imponetur dyametro *ac*, nullus in universitate numerorum
217 numerus | dabitur costae *ab*, qui eum numeret secundum partes numeri *ac*. Sin autem sit, prout verbi gracia est dyameter *ac* 4, costa *ab* 3 est, non 4, neque 5, neque quicumque aequalis vel maior, quia esset contra 20^am primi elementorum EUCLIDIS.[47]) Et quia per penultimam primi EUCLIDIS[48]) 5 quadratum dyametri est duplum ad quadratum costae, quadretur igitur dyameter, scilicet 4, et proveniunt 16; quadretur eciam costa, scilicet 3, et proveniunt 9. Ergo per eandem EUCLIDIS[48]) penultimam primi 16 est duplum ad 9. Sed quia 16 est duplum ad 8, ideo per communem conceptionem, scilicet quaecumque uni et eodem sunt eadem, 10 inter se sunt eadem, 9 et 8 erunt aequalia, scilicet superhabundancia erunt aequalia.

*35. Sit circulus abcd, cuius sinus versus ae ut 2, et sinus rectus eb ut 4, et volueris scire residuum dyametri, scilicet lineam ec,* multiplica sinum rectum, scilicet 4, per se, et proveniunt 16, et divide per sinum 15 versum, scilicet per 2, et proveniunt 8, et illud est linea *ec*. (Fig. 27.)

Fig. 27.




Si vero sciveris *ec* et *ae*, et volueris *eb*, tunc multiplica *ec* per *ae*, et residui extrahe radicem, et provenit *eb*. Et per 20 primam partem poteris cognoscere altitudinem turris, si funis dimissus fuerit ad infra facta parte circuli cum fune etc.

*36. Si circulum in sex partes aequales diviseris, quod fit non mutato circino*, dum praedictum circinasti, et unam sextam in 25 duas partes aequales diviseris, et a centro
217' circuli ad illam medietatem lineam | duxeris, et aliam lineam intersecantem primam a proximis punctis divisionum feceris; dico, quod linea, quae est a centro usque ad intersectionem, est latus eptagonii circulo praedicto inscripti. 30 Verbi gracia sit in circulo exagonus *abcdef*, cuius centrum *g*. Dividatur ergo latus *ab* in duo media in puncto *h*, et ducatur linea *gh*: dico quod ipsa est latus eptagonii praedicto circulo inscripti. (Fig. 28.)

---

15. *rectum, scilicet per 4 et proveniunt.*

---

47) EUCLIDES I, 20: *Omnis trianguli duo quaelibet latera simul iuncta reliquo sunt longiora.*

48) EUCLIDES I, 46: Der Pythagoras. Siehe Anm. 18 u. 34.

Et si a sexta parte circuli subtraxeris unam terciam $\frac{1}{3}$ illius sextae, remanebit arcus nonagoni; et si $\frac{2}{5}$, remanebit arcus lateris decagoni.

37. *Et si volueris habere latus octogoni,* subtrahe de sexta parte circuli prius habita $\frac{1}{4}$ eius, et residuum est arcus lateris octogoni.

5 Si vero curiosius velis invenire latus octogoni eciam praeter circulum, forma quadratum *abcd*, in quo trahe dyametrum *ac*, cuius medietas sit

Fig. 28.

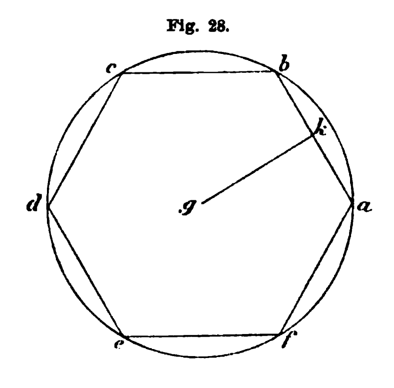
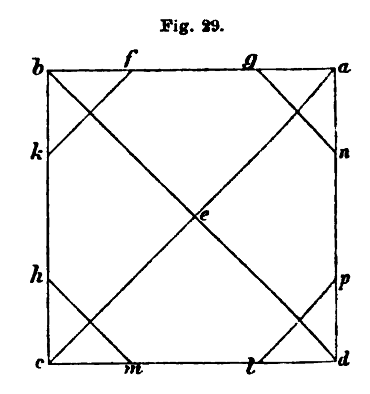
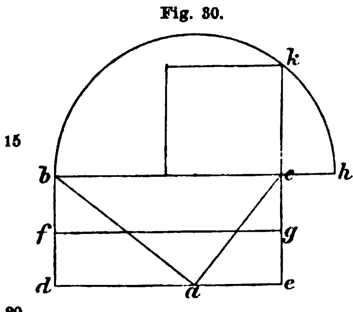



Fig. 29.




*ae*. Accipe igitur de linea *ab* secundum quantitatem *ae*, et sit linea *af*; et similiter de linea *ba*, quae sit *bg* et *bh*; et *ck* et *cl*; et *dm* et *dn*; et *ap* omnes sint aequales medietati dyametri *ae*. Tunc trahe lineas *fk*, 10 *hm*, *lp*, *ng*, etc.: dico igitur, quod haec figura *fkhmlpng* est octogonus aequilaterus aequiangulus. (Fig. 29.)

Fig. 30.




38. *Dato trigono aequum quadratum describere.* (Fig. 30.)

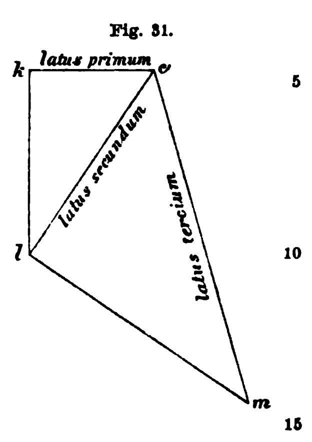
Sit trigonus *abc*. Ducam lineam *de* 15 aequalem et aeque distantem *be* et coniungam *bd* et *ec*; ergo per quadragesimam primam primi Euclidis[49]) parallelogrammum *bced* est duplum ad trigonum *abc*, ergo medietas parallelogrammi *bcgf* est aequalis trigono *abc*. 20 Huius ergo parallelogrammi | *bcgf* quaeratur 218 latus tetragonicum sic. Lateri *bc* adiungam in continuum et directum lineam *ch* aequalem *ge*, et facta dyametro *bh* et centro in medio eius

1—4. In der Hdschr. ist Z. 3—4 vor 1—2 gesetzt. Der Fortsetzung halber habe ich die Reihenfolge umgekehrt. — 16. *primam* fehlt: es ist vor *primi* ausgefallen. — 22. *ch* fehlt.

49) Euclides I, 41: Siehe Anm. 17.

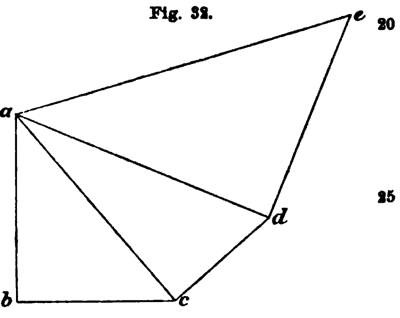
circinabo semicirculum *bkh* et producam *ck*: dico igitur, quod linea *ck* est latus tetragonicum parallelogrammi *bcgf*, et per consequens trianguli *abc*.

*39. Si vero velis latus tetragonicum duorum vel trium vel plurium triangulorum, vel parallelogrammorum,* tunc expedies te de primo, ut dictum est, et sit illud latus verbi gracia, ut prius, *ck*. Deinde de secundo expediens ipsum prioris extremitate orthogonaliter in directo coniunge, quod verbi gracia sit *kl*, et protrahe lineam *cl*, et ipsa erit latus tetragonicum amborum triangulorum. (Fig. 31.)




Si vero volueris latus trium triangulorum vel parallelogrammorum, tunc invento latere tercii per modum iam dictum ipsum lateri iterum orthogonaliter coniunge, quod sit verbi gracia *lm*. Deinde duc lineam *cm*, et ipsa est latus tetragonicum omnium trium triangulorum vel parallelogrammorum, de quibus operatus fueris.

*40. Datae figurae rectilineae cuiuscumque latus tetragonicum invenire.* (Fig. 32.)




Latus tetragonicum dicitur illud, quod, si in se ducatur, constituit quadratum aequale figurae datae.

Si igitur data figura rectilinea fuerit multi|angula, ipsam, ut facit Campanus in commento 32ae primi Euclidis,[50]) aut secundum quod tibi figura ostendit, in triangulos ductis hincinde ab angulis eius lineis resolve, et cuiuslibet trianguli per ultimam secundi Euclidis[51]) quadratum aequale singillatim quaere, quia quodlibet latus quadrati huiusmodi est latus tetragonicum trianguli illius, cui quadratum aequale invenisti. Dum igitur omnium triangulorum, in quos data figura fuit resoluta, sicut praedicitur, scilicet cuiuslibet singillatim, latus tetra-

17. Hier ist im Mscpt. der oben als § 29 abgedruckte Abschnitt eingefügt. — 27. *inter angulos.*

50) Campanus *ad* Euclidis I, 32: Es zerlegt hier Campanus die Vielecke entweder durch Diagonalen, oder durch Radien bei regulären Vielecken, in Dreiecke. Hierauf verweist unser Verfasser.

51) Euclides II, 14: Siehe Anm. 16.

gonicum inveneris, ea in unum latus tetragonicum omnia sic convertas. Sit verbi gracia latus primi $ab$, secundi $bc$, tercii $cd$. Igitur applicabo $bc$ orthogonaliter cum $ab$ et protraham lineam $ac$; ergo per penultimam[52]) primi Euclidis latus $ac$ est latus tetragonicum primi et secundi triangu-
5 lorum. Deinde iterum cum linea $ac$ coniungam orthogonaliter lineam $cd$, et protraham lineam $ad$, et per eandem eiusdem erit linea $ad$ latus trium triangulorum etc., si plures habueris. Et latus ultimo repertum est latus tetragonicum figurae datae, quod latus si quadraveris, habebis quadratum figurae datae aequale.

---

## COMMENTAR.

Die im Vorstehenden abgedruckte Abhandlung dürfte als eine werthvolle Bereicherung unserer Kenntnisse über das Wissen der ersten Hälfte des XV. Jahrhunderts auf dem Gebiete der Geometrie erkannt werden. Ihren Verfasser zu ergründen ist mir bisher nicht möglich gewesen. Ob es etwa der Schreiber der Handschrift *Magister* Rheinhardus de Vurm gewesen, muss unentschieden bleiben. Jedenfalls ist derselbe auch in der Trigonometrie ganz wohl bewandert. Meinen Commentar will ich in der Art durchführen, dass ich ihn an die einzelnen Paragraphen anschliesse. Wo eine Erklärung nicht nöthig ist, setze ich nur die von dem Verfasser benutzte Formel hin.

In der Einleitung erklärt der Verfasser zunächst den Unterschied der in dem Worte *capacitas* liegt je nachdem es Fläche oder Volumen bedeutet. Von Interesse ist die Fülle von Ausdrücken für Fläche, der nur ein solcher für körperlicher Inhalt gegenübersteht. Eigenthümlich muthet es uns jetzt an, dass von dem Kreise als einfachster Figur, da sie nur von *einer* Linie begrenzt sei, der Ausgangspunkt genommen wird. Verfasser bezieht sich dabei auf den Pentateuch des Moses, doch kann ich die Stelle, welche er meinen könnte, nicht auffinden.

§ 1. *Die Auffindung des Mittelpunktes eines gegebenen Kreises* wird mit unbedeutender Aenderung nach Euklid III, 1 gegeben, also nicht durch Durchschnitt zweier Mittelsenkrechten von Sehnen, sondern dadurch, dass man eine solche zum Durchmesser erweitert und diesen dann halbiert. Der bei Euklid vorhandene Beweis wird hier dem Campanus zugeschrieben, wie allgemein im Mittelalter nur die Lehrsätze als Euklid gehörig betrachtet

---

1. *eam.*

---

52) Euclides I, 46: Der pythagoreische Satz. Siehe Anm. 18, 34, 48.

und die Beweise etc., das *commentum*, wie man sagte, als CAMPANO gehörig angesehen wurden.

§ 2. *Bestimmung des Umfanges eines Kreises von gegebenem Durchmesser.* Dem Verfasser ist $3\frac{1}{7}$ der genaue Werth von $\pi$, was um so eigenthümlicher ist, als die aus dem Buche der drei Brüder angezogene Stelle denselben deutlich nur als Näherungswerth erkennen lässt. Die Wahl des Durchmessers gleich 14 ist, soweit ich die entsprechende Litteratur kenne, allen Autoren des Mittelalters gemeinsam, sobald es sich um ein Beispiel handelt.

§ 3. Die umgekehrte Aufgabe *bei gegebenem Umfang den Durchmesser zu bestimmen.* Hier wird $\pi$ in der Form $\frac{22}{7}$ benutzt.

§ 4. *Die Fläche des Kreises zu bestimmen.* Sie wird nach den drei Brüdern gleich Halbmesser mal halben Umfang gesetzt. Für das Folgende ist festzuhalten, dass für den Durchmesser 14 der Umfang 44, die Fläche 154 wird. Nur diese und keine andern Werthe werden benutzt.

§ 5. *Fläche des Kreisausschnittes, wenn der Bogen bekannt ist.* Verfasser benutzt die Proportion $U : \alpha = J : S$, welche er dem Almagest des PTOLEMAEUS VI, 7 entnimmt. Letztere Stelle wird zu ähnlichem Zwecke in mittelalterlichen Schriften häufiger angewendet. Die Figur deckt sich hier nicht mit dem Beispiel, das den Viertelkreis gleich $38\frac{1}{2}$ berechnet.

§ 6. *Oberfläche der Kugel zu bestimmen, wenn der grösste Kreis gegeben ist.* Das ist zugleich wenn der Durchmesser gegeben ist, da in § 4 gesagt wurde, der Kreis sei gegeben, wenn sein Durchmesser bekannt sei. Wunderbar ist jedenfalls, dass hier *planities* statt *superficies* gesagt ist, das unpassendste Wort, das gewählt werden konnte. Die Fläche ergiebt sich als das Vierfache des grössten Kreises. Spätern Gebrauches halber wird aber auch darauf hingewiesen, dass man auch Durchmesser mal Umfang des Hauptkreises rechnen könne.

§ 7. *Den Körperinhalt der Kugel zu berechnen*, oder wie der Verfasser sich ausdrückt *einen gegebenen Kreis körperlich machen* (*incrassare*). Es ist diese Ausdrucksweise, welche unseres Wissens zuerst bei GERBERT auftritt, im Mittelalter ausnahmslos gebraucht. ADELBOLD spricht von *crassitudo sphaerae*, was klassisch ist, da *crassitudo* als Körperinhalt sich schon bei CICERO findet. Nach der mittelalterlichen Bearbeitung des Buches *de cono et cylindro* des ARCHIMEDES, welche sich in mehreren Handschriften erhalten hat, wird $v = \frac{11}{21} d^3$ gerechnet, was wieder auf $\pi = \frac{22}{7}$ führt.

§ 8. *Ein Rechteck zu bestimmen, welches das Vierfache eines gegebenen Kreises ist.* Unter Benutzung der zweiten Betrachtung des § 6 wird ein

Rechteck aus dem Durchmesser und dem Umfang construiert, welches nach der ersten Art von § 6 viermal so gross ist als der Kreis. Durch Parallelen zu der längern Seite theilt der Verfasser dasselbe in vier gleiche Theile und fügt nun hinzu, dass, wenn man diesen vierten Theil in ein Quadrat verwandele, man damit den Kreis quadriert habe. Zugleich setzt er die $\sqrt{154} = 12{,}41$ um eine Kleinigkeit zu gross. Er rechnet es in Sexagesimalbrüche um zu genau 12 . 24 . 36. Bei späterer Anwendung jedoch nimmt er die Wurzel zu 12 . 24 . 35.

§ 9. Nachdem die vom Kreise abhängigen Figuren vorläufig zu Ende sind, beginnt jetzt das Dreieck, trotzdem auch hier das Rechteck die einfacher zu berechnende Figur ist.

Zunächst in diesem Paragraph das rechtwinklige Dreieck. Sind die Katheten $a$, $b$ gegeben, so ist $J = \frac{ab}{2}$. Ist dagegen $c$, $a$ gegeben, so findet sich $J = \frac{a\sqrt{c^2 - a^2}}{2}$, das Letzte durch den Pythagoras bewiesen.

§ 10. *Im spitz- und stumpfwinkligen Dreieck die Höhe zu finden.* Zunächst Erklärung der Höhe. Im rechtwinkligen Dreieck ist diese Berechnung unnöthig, da jede der beiden Katheten als Höhe betrachtet werden kann. Verfasser geht von der Formel aus, dass, wenn $c$ einem spitzen Winkel gegenüber liegt, $c^2 = a^2 + b^2 - 2bp$, wo $p$ die Projection von $a$ auf $b$ ist. Er zieht daraus die Folgerung $p = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$, dann ist $h = \sqrt{a^2 - p^2}$.

Das Beispiel ist auf das rechtwinklige Dreieck 6, 8, 10 angewendet. Natürlich wird die Höhe auf 10 gesucht. Der Verfasser rechnet nun so. Es ist $64 + 100 = 164$, davon 36 abgezogen giebt 128. Das ist also $2bp$. Folglich ist $p = 6\frac{2}{5} = 6 \cdot 24$. Davon das Quadrat ist $40 \cdot 57 \cdot 36$, was auf $40 \cdot 58$ abgerundet wird, da nur ausnahmsweise mit zweiten Sechszigsteln gerechnet wird. $a^2 - p^2$ ist also $64 - 40 \cdot 58 = 23 \cdot 2$, folglich $h = \sqrt{32 \cdot 2} = 4 \cdot 48$, wo die Wurzel wieder um eine Kleinigkeit zu gross angenommen ist. Dass es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt, ist dem Verfasser entgangen.

Aus der zweiten Art folgt, dass, unter Bezeichnung des Halbierungspunktes von $ac$ durch $e$, dem Verfasser bekannt ist, dass $de = \frac{p - q}{2}$ ist. Seine zweite Rechnung kommt eben darauf zurück, dass $a^2 - b^2 = p^2 - q^2$ ist, und man also $p - q$ erhält, wenn man $a^2 - b^2$ durch $p + q = ac$ dividiert. Durch Addition von $\frac{1}{2}ac$ erhält er dann $p$ genau wie oben. Es ergiebt sich nämlich $de = 1\frac{2}{5}$, also $p = 6\frac{2}{5}$ wie vorher.

§ 11. *Die Fläche eines beliebigen Dreiecks zu berechnen.* Es ist $J = \frac{g \cdot h}{2}$. Das Beispiel lautet $c = 5$, $a = 8$, $b = 10$. Hier ist wieder $a^2 + b^2 = 164$, also $a^2 + b^2 - c^2 = 139$, daher $p = 6 \cdot 57$, $p^2 = 48 \cdot 18$. also $a^2 - p^2 = 15 \cdot 42$, und daher $h = 3 \cdot 58$, wiederum eine Kleinigkeit zu gross. Der doppelte Inhalt ist also $39 \cdot 40$, und daher $J = 19 \cdot 50$.

§ 12. Aus diesem Paragraphen folgt, dass unser Verfasser eine Abhandlung über Trigonometrie geschrieben haben muss unter dem Titel *De triangulis* oder *De triangulorum noticia.* Vielleicht lässt sich einst durch Auffindung eines ähnlichen Werkes der Verfasser näher bestimmen, Dass ihm Trigonometrie eine ganz bekannte Sache war, werden wir in den spätern Paragraphen sehen. Die beiden Fälle freilich, welche

§ 13 behandelt, sind nicht dazu angethan, das, was ich eben sagte, zu beweisen. Zunächst will dieser Paragraph aus den Seiten die Winkel durch folgende Proportionen bestimmen.

$$(a^2 + b^2 + c^2) : a^2 : b^2 : c^2 = 2R : \alpha : \beta : \gamma.$$

Wie man auf diese Idee verfallen ist, welche nur für das gleichseitige Dreieck richtig wäre, ist kaum zu ergründen. Ich habe sie jedoch auch bei andern Autoren angetroffen.

Die Berechnung der Seiten aus den Winkeln ist natürlich so zu verstehen, dass dem umgeschriebenen Kreise ein bekannter Durchmesser verliehen wird, etwa der, für welchen unser Verfasser eine Sehnentafel besitzt, d. h. 120.

§ 14. *Inhalt des Rechtecks.* Nach der Formel $J = ab$. Nach allen Kreis- und Dreiecksberechnungen also jetzt erst das Rechteck

§ 15. *Inhalt des Rhombus (Almuhaim) und des Rhomboids (similis Almuhaim).* Verfasser berechnet die Höhe des Rhombus und verwandelt mit Hilfe derselben den Rhombus in ein Rechteck. Er erhält so $J = gh$.

Die Höhe aber findet er so. Er benutzt die Cordentafel des Almagest I, 11. Beschreibt er um das durch eine Seite und die Höhe gebildete rechtwinklige Dreieck den Kreis, so ist die Seite Durchmesser und, weil der Winkel des Rhombus gegeben ist, so kennt er auch den zu dem Winkel gehörigen Bogen dieses Kreises, also nach der Sehnentafel auch die zugehörige Sehne $h$, wenn er die Seite des Rhombus zu 120 annimmt. Ist aber die Seite $a$, so findet er $h$ aus der Proportion 120: der gefundenen Sehne $= a : h$. In seinem Beispiele ist die Seite $= 6$, der Winkel des Rhombus $= 60^0$. Der zu diesem Winkel zugehörige Bogen ist $120^0$, welchem nach der Sehnentafel eine Sehne von $103 \cdot 55$ entspricht — die 23 zweiten Sechszigstel vernachlässigt er —, also ist für den Durchmesser $d = 6$ die

Höhe $h$ nahezu $5 \cdot 12$. Multiplikation mit der Seite des Rhombus liefert dann den Inhalt zu $31 \cdot 12$.

Beim Rhomboid ist in derselben Weise vorzugehen.

Durch Congruenz von Dreiecken zeigt Verfasser am Schlusse noch, weshalb der Rhombus mit dem construirten Rechteck inhaltsgleich sein muss.

§ 16. *Die Fläche eines Kreisabschnittes bei gegebenem Bogen zu bestimmen.* Nach Erklärung des Kreisabschnittes geht Verfasser so vor. Nach § 5 kann man den Kreissektor berechnen und, weil nach der Sehnentafel die Sehne des gegebenen Bogens bekannt ist, nach § 11 auch das von dieser und den beiden Radien gebildete Dreieck. Die Differenz beider Flächen ist der gesuchte Inhalt des Abschnittes. Man sieht also, dass nur der kleinere Abschnitt berechnet wird. In andern Abhandlungen wird zwischen *portio minor* und *portio maior* unterschieden. Die *portio maior* wird dann gefunden, indem man die *portio minor* von der Kreisfläche abzieht.

§ 17. *Anwendung des vorhergehenden Paragraphen zur Bestimmung des gemeinsamen Stückes zweier sich schneidender Kreise.* Angenommen wird natürlich, dass von beiden Kreisen die abgeschnittenen Bogen, beziehungsweise Centriwinkel gegeben sind. Da nach vorigem Paragraph von jedem Kreise der Abschnitt berechnet werden kann, welcher durch die gemeinsame Sehne entsteht, so giebt die Summe beider Abschnitte das gesuchte linsenförmige Stück. Verfasser behauptet dabei 1. dass, wenn bei gleichen Kreisen der jeweils abgeschnittene Bogen $132^0\ 23'$ beträgt, die gesuchte Figur nahezu die Hälfte jeder Kreisfläche darstelle und 2. dass, wenn ebenfalls bei gleichen Kreisen der Mittelpunkt eines jeden auf der Peripherie des andern liegt, jeder Kreis ungefähr das $2\frac{5}{12}$fache des linsenförmigen Stückes sei. Wir untersuchen seine Behauptung im Folgenden. Der im Kreise vom Durchmesser 14 zu $132^0\ 23'$ gehörige Sektor ist auf 60tel genau $56 \cdot 38$. Nach der Sehnentafel des Almagest ist die Sehne des Bogens von $132^0\ 23'$ gleich $109 \cdot 47$ für den Radius 60 oder den Durchmesser 120, also für den Radius 7 gleich $12 \cdot 53$. Daher ist die Höhe des Dreiecks $\sqrt{49 - (6 \cdot 26)^2} = \sqrt{7 \cdot 37} = 2 \cdot 46$. Daher der Inhalt des Dreiecks $2 \cdot 46 \times 6 \cdot 26 = 17 \cdot 48$, so dass für jeden Abschnitt $56 \cdot 38 - 17 \cdot 48 = 38 \cdot 50$, also für das linsenförmige Stück $77 \cdot 40$, das heisst nahezu die Hälfte von 154 herauskommt.

Im zweiten Falle ist der Bogen natürlich $120^0$, also jeder Sektor $= 51 \cdot 20$. Die zugehörige Sehne für $r = 60$ ist $103 \cdot 55$, also für $r = 7$ gleich $12 \cdot 7$. Da hier die Höhe jedesmal $3 \cdot 30$ sein muss, so ist die Summe der beiden abzuziehenden Dreiecke gleich $12 \cdot 7 \times 3 \cdot 30 = 42 \cdot 25$, also bleibt von dem doppelten Sektor $102 \cdot 40$ für den Meniscus $60 \cdot 15$

übrig. Nun ist aber $60 \cdot 15 \times 2 \cdot 25$ nur $= 145 \cdot 30$, also hat hier der Verfasser sich geirrt. Vielleicht hat er für 145 gelesen 154, oder es muss 33 *minuta fere* heissen.

§ 18. *Einen Kreis zu construiren, welcher das Doppelte eines gegebenen ist.* Verfasser beschreibt um den gegebenen Kreis das Quadrat und dann wieder um dieses Quadrat den Kreis. Dieser Kreis ist der gesuchte.

§ 19. *Den Ueberschuss des umgeschriebenen Quadrates über den Kreis und des Kreises über das eingeschriebene Quadrat zu bestimmen.* Man braucht nur die nach früheren Paragraphen berechenbaren Werthe der einzelnen Flächen zu suchen und in geeigneter Weise von einander zu subtrahieren. Für $\frac{3}{11}$ müsste eigentlich $\frac{2}{7}$ stehen, beide Brüche sind aber nahezu gleich.

§ 20. *Das Quadrat zu construiren, welches näherungsweise dem Kreise gleich ist.* Schon in § 8 ist die $\sqrt{154} = 12 \cdot 24 \cdot 35$ gefunden. Das Quadrat über dieser Geraden ist das gesuchte. Nun aber will Verfasser das Quadrat so construiren, dass es mit dem Kreise denselben Mittelpunkt hat. Zu dem Ende zieht er $12 \cdot 24 \cdot 35$ von dem Durchmesser 14 ab, und erhält $1 \cdot 35 \cdot 25$. Nimmt er nun die Hälfte davon, das ist $0 \cdot 47 \cdot 42$, auf jeder Seite des Durchmessers ab, so erhält er so die Seite des gesuchten Quadrates. Das Abgezogene ist aber nahezu $\frac{1}{17}$ des Durchmessers, oder wie später gesagt wird zwischen $\frac{1}{17}$ und $\frac{1}{18}$. Nimmt man $\frac{1}{18}$, so erhält man für $\pi$ den Aegyptischen Werth $\left(\frac{16}{9}\right)^2$, bei $\frac{1}{17}$ kommt $\left(\frac{30}{17}\right)^2$. Man sieht also, dass der bei den Aegyptern bekannte Werth auch auf den Werth $\pi = 3\frac{1}{7}$ zurückführt. Um aber die Construction genauer zu erhalten geht Verfasser weiter so vor: $0 \cdot 47 \cdot 42$ ist der Sinus versus des halben durch die Quadratseite vom Kreise abgeschnittenen Bogens, wenn der Radius $= 7$ ist, ist aber der Radius 60, so ist der Sinus versus entsprechend $6 \cdot 48 \cdot 51$. Für einen Durchmesser $= 120$ ist der Bogen $27^0\ 34'$, wobei der Kreis in $360^0$ getheilt ist. Das ist nahezu $3\frac{1}{3}$, wenn, wie hier, der Umfang 44 Theile hat. Nun trägt er von zwei auf einander senkrechten Durchmessern aus diese Stücke auf dem Umfange ab, und verbindet je zwei benachbarte Punkte durch gerade Linien, welche sich ausserhalb des Kreises schneiden, so ist damit die Aufgabe gelöst.

Am Schlusse macht Verfasser die richtige Bemerkung, dass die ausserhalb des Kreises liegenden dreieckigen Stücke des Quadrates genau so gross sein müssen als die ausserhalb des Quadrates liegenden Kreisabschnitte.

§ 21. *Die Flächen regulärer Vielecke zu berechnen.* Wie das zu machen, wird an dem Beispiel des regelmässigen Fünfeckes gezeigt. Da nach

Campanus im bekannten Scholium zum 32. Satze des ersten Buches von Euklid in jedem Vielecke die Summe der Winkel gleich $2n - 4$ Rechten ist, so ist im Fünfeck diese Summe gleich 6 Rechten, also im regelmässigen Fünfeck jeder Winkel $1\frac{1}{5}$ Rechte. Zerlegt er nun das Fünfeck durch Radien vom Mittelpunkte aus in gleichschenklige Dreiecke und zieht in einem derselben die Höhe, so ist jeder Basiswinkel $\frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$ Rechten, und der von einem Radius und der Höhe gebildete Winkel daher $= \frac{2}{5}$ Rechten. Also lässt sich, da das Dreieck rechtwinklig ist, um dasselbe ein Kreis beschreiben, und es ist folglich der zu $\frac{3}{5}$ Rechten gehörige Bogen $= 108^0$, und seine Sehne nach der Sehnentafel $97 \cdot 5$; der zu $\frac{2}{5}$ gehörige Bogen ist ebenso $= 72^0$ und seine Sehne $= 70 \cdot 33$. Ist nun die Seite des Fünfecks $= 6$, so ist seine Hälfte gleich 3, und diese entspricht der Sehne $70 \cdot 33$. In demselben Verhältnis entspricht daher der Sehne $97 \cdot 5$, d. i. der Höhe des Dreiecks, nahezu $4 \cdot 8$. Die Fläche eines der fünf Dreiecke ist daher $3 \times 4 \cdot 8 = 12 \cdot 24$, und folglich ist die Fläche des Fünfecks selbst $= 5 \times 12 \cdot 24 = 62$.

Ist jedoch das Vieleck nicht regelmässig, so zerlegt man dasselbe durch Diagonalen in Dreiecke und berechnet jedes nach § 11 einzeln. Die Summe aller ist dann die gesuchte Fläche des Vielecks.

§ 22. *Die Fläche des regelmässigen Sternfünfecks* (**Pentagonum Salomonis**) *zu bestimmen.* Der Verfasser beschreibt um das Sternfünfeck den Kreis und halbiert eine Seite des Fünfecks $fe$ in $a$, er nennt die beiden Schnittpunkte dieser Seite durch die andern Seiten $k$, $b$ und zieht $ca$, $c$ ist der Mittelpunkt, so wie $cb$. Dann steht erstens $ca$ senkrecht auf $fe$ und geht durch den dritten Eckpunkt $d$ des Fünfecks, $cb$ aber halbiert den Bogen $de$ in $r$. Nun ist der Bogen $de = 72^0$, folglich dessen Sinus $ae = 57 \cdot 4$, wenn $ce$, der Halbmesser des Kreises, $= 60$ gesetzt wird; $ca$ erhält man nun nach dem Pythagoras $= \sqrt{60^2 - (57 \cdot 4)^2} = 18 \cdot 32$. Bogen $dr$ ist $36^0$, also auch $\sphericalangle\, acb = 36^0$. Für $cb = 60$ ist also $ab$, der Sinus dieses Winkels, $= 35 \cdot 16$ und $ac$, der Sinus des Complementes von $54^0$, ist $42 \cdot 32$. Nach dem Verhältnis aber, nach welchem $ca = 18 \cdot 32$ und $ce = 57 \cdot 4$ war, ist $ab = 13 \cdot 28$. Nimmt man jetzt den Radius des Kreises $= 7$, so erhält man $ca = 2 \cdot 10$ also $ad = 4 \cdot 50$, $ab = 1 \cdot 34$, immer auf ganze Minuten abgerundet. Die Fläche des Dreiecks $kbd$ ist also $1 \cdot 34 \times 4 \cdot 50 = 7 \cdot 34$; alle 5 ähnlichen Dreiecke zusammen sind daher $5 \times 7 \cdot 34 = 37 \cdot 50$. Nun ist die Seite des innern regelmässigen Fünfecks $kb = 2ab = 3 \cdot 8$, also nach dem vorigen Paragraph seine Fläche $= 17$ (was um eine Kleinigkeit zu klein ist). Die Gesammtfläche des

Sternfünfecks ist folglich 54 · 50. Der Kreis ist daher fast um 100 grösser als die Fläche des eingeschriebenen Sternfünfecks. Hier hat der Verfasser also eine Sinustafel benutzt. Ob Magister JOHANNES DE LINERIIS eine solche berechnet hat, den er oben für den Sinus versus in Anspruch nahm? Oder hat er die Peurbachsche Tafel gebraucht?

§ 23. *Wenn drei oder mehr gleiche Kreise sich so von aussen berühren, dass jeder zwei benachbarte berührt, so soll die Fläche des innerhalb liegenden krummlinigen Vielecks gefunden werden.* Verbindet man die Mittelpunkte je zweier benachbarter Kreise, so müssen diese Geraden durch die Berührungspunkte gehen und eine jede gleich dem Durchmesser eines Kreises sein. Man erhält so ein regelmässiges Vieleck. Nach der oben benutzten Regel ist jeder Vieleckswinkel gleich $\frac{2n-4}{n}$ Rechten, folglich kann man in jedem Kreise den zu diesem Winkel gehörigen Kreisausschnitt, also auch die Summe aller berechnen. Aber nach § 20 kennt man auch den Inhalt des regulären Vielecks: daher ist die gesuchte Fläche gleich diesem Vieleck minus der Summe der Sektoren. Durchgeführt ist die Rechnung nur für drei Kreise. Sind die Radien wieder jeder = 7, so hat das gleichseitige Dreieck den Inhalt 84, es ist also die Gerbertsche Regel angewendet, dass die Höhe des gleichseitigen Dreiecks um $\frac{1}{7}$ kleiner sei als die Seite. Die einzelnen Centriwinkel sind aber je 60°, also ist jeder Kreisausschnitt der sechste Theil von 154 = 25 · 35 (zu klein gerechnet), also alle drei = 76 · 45. Subtraktion ergiebt dann für den Inhalt des krummlinigen Dreiecks 7 · 15. Richtig käme jeder Sektor = 25 · 40, alle drei = 77, das gesuchte Dreieck also 7.

Mit dem folgenden Paragraphen geht Verfasser nun zur Stereometrie über.

§ 24. *Die Oberfläche eines geraden Kreiscylinders (columpna rotunda) zu bestimmen.* Die Mantelfläche ist Umfang der Grundfläche mal Höhe. Addiert man noch beide Grenzkreise hinzu, so erhält man die Gesammtoberfläche. Als Beispiel ist genommen der Radius der Grundfläche = 7, die Höhe = 12, dann ist der Mantel = 12 $\times$ 44 = 528; dazu die Summe der beiden Grundkreise 308 giebt 836 als Gesammtoberfläche.

§ 25. *Den Körperinhalt eines Cylinders zu bestimmen.* Volumen = G · h. Für den in § 24 behandelten Fall also 154 $\times$ 12 = 1848. Hier erwähnt der Verfasser eine dritte von ihm verfasste Schrift den *Tractatus collationum de virga visoria.* Dort habe er weitläufig über diese und ähnliche Dinge gehandelt, weshalb er hier sich nicht weiter dabei aufhalte.

§ 26. *Die Oberfläche eines Kegels (Piramis rotunda) von gegebener Grundfläche und Seitenkante zu finden.* Trotzdem er in dem für die Ober-

fläche des Cylinders angerufenen *Tractatus de curvis superficiebus* des ARCHIMENIDES in dem ersten Satze die richtige Berechnung der Kegeloberfläche finden konnte, benutzt unser Verfasser doch die grundfalsche Formel: Oberfläche = halber Umfang mal Höhe, wozu noch der Grundkreis zu addieren ist. Er lehrt sogar, wenn die Höhe nicht direkt bekannt ist, dieselbe aus Seitenlinie und Radius zu berechnen.

§ 27. *Die Oberfläche einer n-seitigen geraden Pyramide (ortholaterata) zu berechnen.* Die einzelnen Seitenflächen sind Dreiecke, die Grundfläche ein Vieleck. Man berechne nach früheren Paragraphen die einzelnen und suche ihre Summe: das ist die gesuchte Oberfläche.

§ 28. *Das Volumen eines Kegels oder einer regelmässigen n-seitigen Pyramide zu finden.* $V = \frac{1}{3} G \cdot h$.

§ 29. *Die Oberfläche eines geraden vierseitigen Prisma oder Würfels (Cubi et columpnae orthoquadrilaterae) zu bestimmen.* Da alle Seitenflächen Rechtecke sind, so findet man nach § 14 die einzelnen, und hat in ihrer Summe die verlangte Oberfläche.

§ 30. *Für dieselben Körper das Volumen zu bestimmen.* $V = G \cdot h$.

§ 31. *Oberfläche und Volumen eines geraden Prisma mit rhombischer Grundfläche (solidum almuhaim) zu bestimmen.* Nach § 15 kennt man die beiden rhombischen Grundflächen, nach § 14 die rechteckigen Seitenflächen. Die Summe aller ist die gesuchte Oberfläche.

Das Volumen ergiebt sich, wenn man die rhombische Grundfläche mit der Höhe vervielfacht.

§ 32. Der vorliegende Paragraph scheint von dem Verfasser mit grosser Freude ausgearbeitet zu sein. Er zeigt auch das wirkliche Können des Mannes. Auch heute liesse sich die Aufgabe als solche für obere Klassen der Gymnasien wohl gebrauchen.

*Um drei gleiche sich gegenseitig von aussen berührende Kreise ist das gleichseitige Tangentendreieck beschrieben, es soll der Inhalt des Dreiecks, des ihm umgeschriebenen Kreises und aller in der Figur vorhandenen einzelnen Flächen bestimmt werden.* Unter Voraussetzung der Figur ist der Winkel $bac = 60^0$, also $\sphericalangle\, dag = 30^0$. Denkt man sich aber um das Dreieck $dag$ den Kreis beschrieben, so ist Bogen $dg = 60^0$ und Bogen $da = 120$, also ist Sehne $dg = 60$, Sehne $da = 103 \cdot 55$; ist aber $dg = 7$, so ist $da = 12 \cdot 7$, also ist auch $be = 12 \cdot 7$. Es ist aber $ed = gf = 14$, also ist $ab = 38 \cdot 14 = bc = ca$. Die Höhe des Dreiecks ist aber nahezu $33 \cdot 7$ und also das Dreieck $abc = 633 \cdot 4$. Nun ist aber das Rechteck $efgd = 7 \times 14 = 98$ und jeder der beiden Sektoren $gld$ und $fle$ gleich $38 \cdot 30$ als Quadrant, folglich ist das krummlinige Dreieck $eld = 20$. Das

krummlinige Dreieck *lhk* ist schon in § 22 zu 7 · 15 berechnet, folglich ist die Summe aller vier krummlinigen Dreiecke 67 · 15. Dazu die Summe der drei gegebenen Kreise giebt 529 · 15. Zieht man dies von der Dreiecksfläche *abc* ab, so bleibt 103 · 49, wovon der je dritte Theil die Eckdreiecke *dma*, *elq*, *rcn* kennen lehrt zu 34 · 36. Da ferner Bogen $ab = 120^0$ ist, so wäre, wenn der Durchmesser des um *abc* beschriebenen Kreises 120 wäre, die Sehne $ab =$ 103 · 55, sie ist aber in Wirklichkeit oben zu 38 · 14 berechnet, also ist der Durchmesser des grossen Kreises = 43 · 53 und sein Umfang 138 · 1 (etwas zu gross gerechnet), daher sein Inhalt = 1514 · 33. Zieht man hiervon den Inhalt des Dreiecks $abc =$ 633 · 4 ab und dividiert den Rest durch 3, so entsteht die Fläche jedes der drei Abschnitte des grossen Kreises ausserhalb des Dreiecks = 293 · 50. Alle Werthe sind hier stets auf ganze 60stel abgerundet.

§ 33. *Das Verhältnis der Diagonale eines Quadrates zu einer Seite ist gleich der Quadratwurzel aus 2 (medietas duplae).* Wird in der Art der Figur über der Seite des Quadrates als Diagonale ein neues Quadrat construiert, so verhält sich das Quadrat *ab* zu dem Quadrat *ac* wie 2 : 1, folglich verhalten sich die Diagonalen selbst wie $\sqrt{2} : 1$.

§ 34. *Die Diagonale und die Seite eines Quadrates sind incommensurabel.* Ist z. B. die Diagonale = 4, so muss jede Seite mindestens grösser als 2 sein, wenn also ganze Zahlen genommen werden sollen, mindestens 3. Dann wäre aber nach dem Pythagoras 16 das Doppelte von 9, also da 16 auch das Doppelte von 8 ist, 8 = 9. Damit glaubt der Verfasser seine Behauptung richtig bewiesen zu haben.

§ 35. *Aus Sinus und Sinus versus eines Bogens die Ergänzung des Sinus versus zum Durchmesser zu berechnen, und umgekehrt aus Sinus versus und Ergänzung den Sinus zu finden.* Man hat Ergänzung = $(\textit{sinus})^2 : \textit{sinus versus}$ und $\textit{sinus} = \sqrt{\textit{sinus versus} \times \textit{Ergänzung}}$. *Sinus* ist die halbe Sehne des doppelten Bogens, *sinus versus* der Pfeil des Bogens.

Die am Schlusse befindliche Bemerkung über die Auffindung der Höhe eines Thurmes mittelst der ersten Forderung ist absolut unverständlich.

§ 36. Das Sechseck construiert durch sechsmaliges Abtragen des Radius. Halbiert man die Seite des Sechsecks und verbindet den Punkt mit dem Centrum, so ist diese Gerade Seite des Siebenecks, d. i. die bekannte indische Regel, es sei die Hälfte der Dreiecksseite die Siebenecksseite.

Den Bogen der Neunecksseite erhält man, wenn man vom sechsten Theile des Kreises $\frac{1}{3}$ abschneidet; schneidet man jedoch $\frac{2}{5}$ ab, so bleibt der Bogen des Zehnecks übrig. Wie man die Theilung ausführen soll, wird nicht gesagt.

5*

§ 37. Um das Achteck zu construieren, nehme man $\frac{3}{4}$ des Bogens der Sechsecksseite, die zugehörige Sehne ist die verlangte Seite; oder man trage von den vier Ecken eines Quadrates auf den Seiten je die halbe Diagonale ab und verbinde je zwei benachbarte Punkte. Letztere Construktion findet sich auch anderweitig. M. s. z. B. CANTOR, *Vorlesungen* II.

§ 38. *Verwandlung eines Dreiecks in ein Quadrat.* Verwandlung des Dreiecks in ein Rechteck von gleicher Grundlinie und halber Höhe und dieses Rechtecks durch den Satz von der Höhe des rechtwinkligen Dreiecks in ein Quadrat.

§ 39. *Die Seite des Quadrats zu finden, das gleich der Summe mehrerer Dreiecke oder Rechtecke ist.* Jedes Dreieck wird einzeln in ein Quadrat verwandelt und dann die einzelnen Quadrate durch mehrfache Anwendung des pythagoreischen Satzes in ein einziges zusammengezogen.

§ 40. Anwendung des vorigen Paragraphen auf Verwandlung eines beliebigen Vielecks in ein Quadrat durch Zerlegung des Vielecks vermittelst Diagonalen in Dreiecke.

## Nachschrift vom 5. December 1897.

In der Handschrift *Codex Vindobonensis Palatinus 5277* findet sich die vorliegende Abhandlung ebenfalls. In dieser heisst die S. 36, Z. 10—11 stehende Stelle so: *„a qua itu non immerito ut testatur dominus Moysis in principio suorum Pentadonarum illud universalis opificis commune mundi opus incepit“.* Es ist also der Weltkreis bei Erschaffung der Welt gemeint. Ebenso steht S. 45 neben MAGISTRI DE LINERIIS auf dem Rande *„Canones Linerij“*; die in der Anmerkung ausgesprochene Vermuthung ist also dadurch bestätigt.




# DIE ERSTE ENTWICKLUNG

DER

# ELEKTRISIRMASCHINE

VON

FERDINAND ROSENBERGER.

---

MIT 8 ABBILDUNGEN.

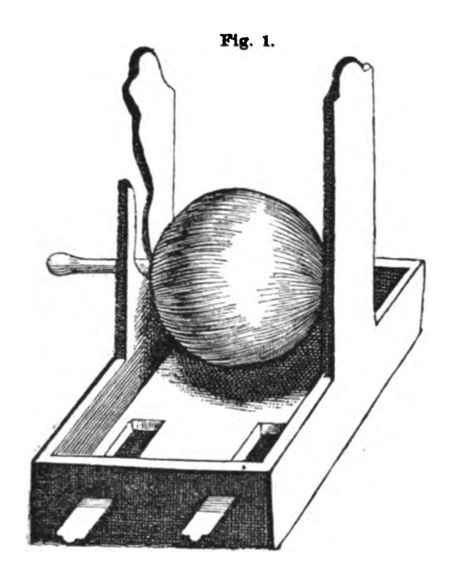



Man ist in der Geschichte der Elektricität im allgemeinen darüber einig, dass der Leipziger Professor Hausen im Jahre 1743 die Construktion der Elektrisirmaschine mit der Benutzung einer schnell rotirenden Glaskugel als Reibkörper begonnen, dass der Wittenberger Professor Bose im folgenden Jahre den Conduktor hinzugefügt und dass der Leipziger Professor Winkler danach endlich die Maschine mit dem Anbringen des Reibzeuges vollendet habe. Zu diesen Angaben sollen hier im Interesse eines richtigen Verständnisses der historischen Entwickelung einige Ergänzungen gegeben werden. Man darf nämlich bei ihnen nicht übersehen, dass alle Theile der Elektrisirmaschine, auch der Conduktor nicht ausgenommen, einzeln schon lange vor den genannten Jahren vorhanden waren, und dass die Verdienste der obigen Männer weniger auf originellen Neuschöpfungen, als auf der geschickten Zusammenstellung und zweckmässigen Zusammenpassung der Theile zu einer einheitlichen Maschine beruhen.

Wenn man den Namen Elektrisirmaschine im weitesten Sinne nimmt und dabei ganz allgemein nur an eine Maschine denkt, deren Zweck es ist Elektricität in möglichster Menge zu erzeugen, so muss man ohne jede Zweifelsmöglichkeit unsern grossen Physiker aus der Zeit des dreissigjährigen Krieges, Otto von Guericke, als den Erfinder der ersten Elektrisirmaschine bezeichnen. Bis auf Guericke hatten die elektrischen Arbeiten der Physiker ausschliesslich den Zweck gehabt, alle die Stoffe aufzufinden, welche durch Reiben überhaupt die wunderbare Fähigkeit der elektrischen Anziehung, der einzigen Wirkung, welche man damals von der Elektricität kannte, zu erlangen vermögen. Guericke aber, indem er für seine mannigfaltigen Untersuchungen nur einen einzigen Stoff, den Schwefel, als Reibkörper benutzte, zeigte dadurch, dass es ihm nicht darauf ankam zu erproben, welche Körper elektrischer Anziehungen fähig seien, sondern vielmehr zu erfahren, welche andere Wirkungen geriebene Körper ausser den elektrischen Anziehungen etwa noch hervorzubringen vermöchten. Für solche Absichten Guericke's spricht deutlich schon die Ueberschrift des betreffenden

Abschnitts[1]) in seinem grossen physikalischen Werke von 1672, welche nicht im früheren Sinne heisst „Von den Materien, welche elektrisch werden können,“ sondern die vielmehr lautet „Von einem Versuche, bei welchem die vornehmsten der aufgezählten Kräfte (Naturkräfte) durch Reiben in einer Schwefelkugel erregt werden können.“

Fig. 1.



Die Maschine selbst, welche Guericke für so weittragende Pläne construirte, war freilich noch einfach genug und muss mehr nach dem guten Willen als nach der Kraft beurtheilt werden. Sie bestand, wie aus der nebenstehenden Copie der Guericke'schen Abbildung ersichtlich ist, der Hauptsache nach nur aus einer kindskopfgrossen Schwefelkugel, die um eine durch sie hindurchgehende eiserne Achse in einem Holzgestell drehbar war. Das Reibzeug bildete, wie Guericke's Worte lauten, die recht trockene Hand des Experimentators, und statt eines Conduktors musste, wenn man so sagen darf, die Kugel selbst dienen, die man zu dem Zwecke mit ihrer Achse leicht von dem Gestell abnehmen und überall hintragen konnte, wo man sie gebrauchte.[2])

So unvollkommen aber diese Elektrisirmaschine auch war, so entsprach sie doch in der Hand des genialen Experimentators allen möglichen Anforderungen in überraschender Weise. Guericke vermochte mit ihr nicht bloss die Existenz der bekannten elektrischen Anziehung, sondern auch die noch vollständig unbekannten Erscheinungen einer elektrischen Abstossung, der elektrischen Leitung, des elektrischen Ge-

---

1) Ottonis de Guericke Experimenta Nova (ut vocantur) Magdeburgica De Vacuo Spatio . . . Amstelodami 1672. Liber Quartus: De Virtutibus Mundanis. Caput XV: De Experimento, quo praecipuae hae Virtutes enumeratae per attritum in Globo Sulphureo excitari possunt (p. 147 bis 150).

2) Die beiden, in der Zeichnung vorn am Boden des Maschinengestells bemerkbaren Vertiefungen stellen kleine, durch Schieber verschliessbare Kästchen dar, die zum Aufbewahren der bei den Versuchen gebrauchten Flaumfedern etc. dienen.

räusches[1]) und endlich sogar des elektrischen Lichts, wenigstens eines Glimmlichts, das die geriebene Schwefelkugel im Dunkeln zeigte, nachzuweisen.

Leider waren die Versuche des sonst mit so kräftigen Mitteln arbeitenden Guericke, der den Luftdruck mit sechszehn Pferdekräften demonstrirte und Barometer von Haushöhe verfertigte, auf elektrischem Gebiete so zart und schwächlich, dass weniger geniale Geister als er, ihre Tragweite nicht zu erkennen vermochten; und wenn auch Gelehrte von dem Range eines Huygens und Leibniz sich lebhaft für die wunderbaren neuen Erscheinungen interessirten, die Allgemeinheit nahm davon noch kaum Notiz. Darum ging vorerst der Weg der weiteren Erfolge nicht in Guericke'scher Richtung von der Elektricität zu den anderen Naturkräften, speciell zum Licht, sondern führte umgekehrt auf ganz ungeahnten Bahnen vom Licht zur Elektricität. An der Construktion oder Vervollkommung der Elektrisirmaschine hatte man vorerst noch kein weiteres Interesse.

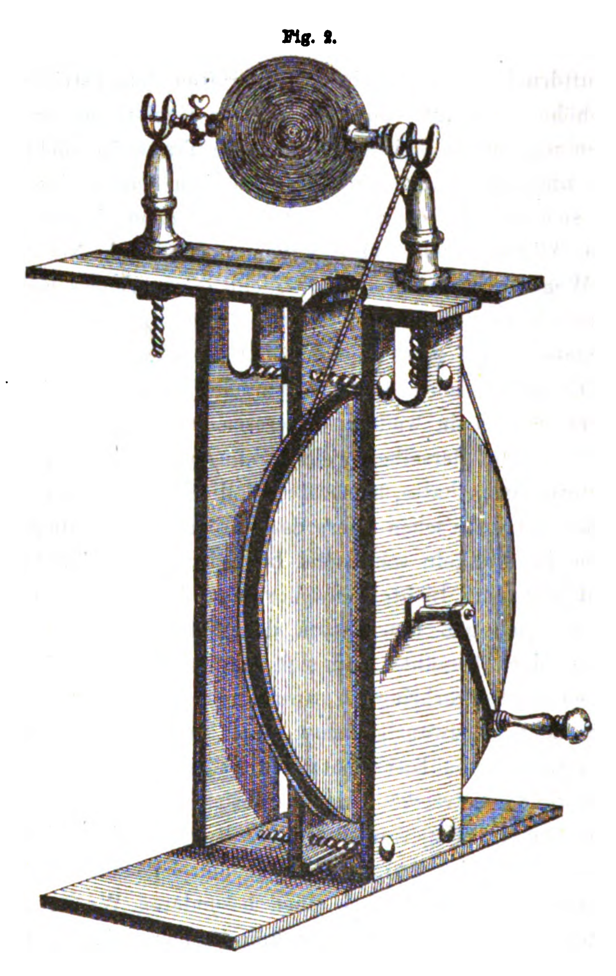
Der Franzose Jean Picard, derselbe, welcher die berühmte Gradmessung in Frankreich unternommen hatte, bemerkte zufällig im Jahre 1675, dass das Quecksilber in der Torricelli'schen Leere des Barometers leuchtend wurde, wenn man dasselbe im Dunkeln schüttelnd bewegte. Man glaubte damals, dass dieses Licht mit dem Lichte phosphorescirender Stoffe verwandt oder identisch wäre und gab ihm darum den Namen des merkurialischen Phosphors; doch bemühte man sich lange Zeit vergeblich sichere Vorschriften zu seiner Hervorbringung aufzufinden. Dies gelang vielmehr erst Hawksbee mehr als zwanzig Jahre später dadurch, dass er die Zusammengehörigkeit dieses Barometerlichts mit den elektrischen Kräften durch viele geistreiche Versuche feststellte.

Francis Hawksbee, der als Experimentator der Royal Society sich nothwendigerweise mit jenen so vieles Aufsehen erregenden Erscheinungen selbstthätig beschäftigen musste, schlug dabei einen besonderen Weg ein, der weit über das erstrebte Ziel einer sicheren Erzeugung des merkurialischen Phosphors hinaus zu einer weitreichenden Verbesserung der Methoden und Mittel Elektricität hervorzubringen führte. Er war in richtiger Erkenntniss bemüht sich bei diesen Untersuchungen von den schwer zu behandelnden und oft ohne sichtbaren Grund versagenden Barometern unabhängig zu machen und versuchte mit Eifer alle Möglichkeiten den merkwürdigen Phosphor mit Hülfe von Glas und Quecksilber im luftleeren Raume ohne

1) Wenn nicht, wie es wahrscheinlich ist, das Rauschen und Knistern, das Guericke in der geriebenen Schwefelkugel hörte, statt von der Elektricität, von dem Zerreissen der Krystalle in der durch das Reiben erwärmten Kugel herrührte.

die Barometer auf die kräftigste, aber doch einfachste Art hervorzurufen. Indem er dabei auf die verschiedenste Weise Glas an Quecksilber, dann Wolle an Glas, dann Wolle an Schwefel u. s. w. im luftleeren und lufterfüllten Raume reibend bewegte und dabei unter günstigen Umständen die Phosphorescenzlichter immer beobachten konnte, kam er zu der Ueberzeugung, dass zur Produktion dieser Lichter nichts weiter als die Reibung besonderer, geeigneter Stoffe, die schon als Elektricitätserreger bekannt, nöthig sei und ging dann direkt zur Construktion einer einfachen, sicheren Maschine für die bequeme Erzeugung und Beobachtung des merkurialischen Phosphors über. Diese Maschine aber erwies sich sogleich nicht bloss als eine äusserst reiche Quelle für Licht, sondern auch, was Hawksbee jedenfalls nicht unerwartet kam, als eine ebenso ergiebige Quelle für Elektricität, entpuppte sich also von selbst als eine Elektrisirmaschine.[1]) Ob Hawksbee bei der Construktion seiner Maschine die Guericke'sche vor Augen gehabt, lässt sich nicht sicher feststellen, da er

Fig. 2.



1) Die Elektrisirmaschine ist in Hawksbee's Werke „Physico-Mechanical Experiments on various subjects. Containing an account of several surprizing Phenomena touching Light and Electricity, producible on the Attrition of Bodies ... London 1709“ auf Plate VII abgebildet. Die hier beigegebene Zeichnung ist eine Copie jener Figur.

selbst alle historischen Angaben unterlässt. Doch darf man aus einzelnen Aeusserungen Hawksbee's, die mit Stellen aus Guericke's Werk wörtlich übereinstimmen, schliessen, dass er dieses Werk recht gut gekannt hat.[1])

Wie die nebenstehende Abbildung zeigt, bestand die Hawksbee'sche Maschine wieder wie bei Guericke, im wesentlichen aus einer Kugel, die aber diesmal nicht eine massive Schwefelkugel, sondern eine hohle Glaskugel war und die mit Hülfe eines grossen Rades nnd einer Schnurenübersetzung durch eine Kurbel sehr schnell um ihre Achse gedreht werden konnte. Als Reibzeug sollte auch wieder die recht trockene Hand des Experimentators dienen; eines Conduktors aber entbehrte diese Maschine noch mehr als die Guericke'sche, denn die Glaskugel konnte nicht von der Maschine getrennt und alle Körper, deren Verhalten gegen die Elektricität untersucht werden sollte, mussten direkt an die Kugel selbst gebracht werden.[2])

Die Maschine war in erster Linie für das Studium der verschiedenartigen Lichterscheinungen bestimmt und dazu noch besonders mit einer hohlen Achse versehen, durch welche man die Glaskugel selbst während des Rotirens beliebig evacuiren oder auch wieder mit Luft füllen konnte. Doch bewies Hawksbee neben dem Studium der Lichterscheinungen durch viele sehr sorgfältige Versuche mit leichten Wollfäden, die er in mannigfaltigster Weise an Drahtbögen neben, über und unter der Kugel aufhing, dass die Lichterscheinungen nie ohne die gleichzeitige Wirkung elektrischer Anziehungen und Abstossungen auftraten, und dass die Lichter überhaupt nie ohne die Elektricität erregt werden konnten. Nur dem Namen nach trennte er die beiden Erscheinungen immer so sorgfältig von einander, dass er nie den naheliegenden Ausdruck eines elektrischen Lichts gebrauchte, und über ihren etwaigen

---

1) In der Bibliothek der Royal Society war Guericke's Werk vorhanden und stand also Hawksbee bequem zu Gebote. In Birch's History of the Royal Society, vol. III, p. 59, wird nach den Büchern der Gesellschaft ausdrücklich berichtet, dass Hooke, der damalige Curator of Experiments, in der Sitzung vom 6. November 1672 jenes Werk vorgelegt habe, und dass auf seine Empfehlung hin auch die Anschaffung desselben beschlossen worden sei. Hooke habe dabei vor allem die Experimente mit der Schwefelkugel als der Wiederholung werth bezeichnet. Die Ausdrücke, welche in Guericke's und Hawksbee's Werken wörtlich übereinstimmen, betreffen die trockene Hand des Experimentators als Reibzeug und die Aehnlichkeit des Leuchtens vom Zucker beim Zerbrechen mit dem Leuchten elektrischer Körper.

2) Nach einer Mittheilung von Prof. Hagenbach-Bischoff in Basel sind die Apparate Hawksbee's aus dessen Nachlass nach Basel verkauft worden und in der Sammlung der dortigen Universität noch vorhanden.

materiellen oder sonstigen ursächlichen Zusammenhang verweigerte er jede Auskunft.

Hawksbee hatte mit seiner Elektrisirmaschine nicht mehr Glück als Guericke mit der seinigen; sie wurden beide von der Mitwelt nicht weiter beachtet und beide bei der Weiterentwicklung zuerst vergessen, die Hawksbee'sche fast noch mehr als die Guericke'sche. Die Hauptschuld lag wohl daran, dass die Maschine des Hawksbee eben in erster Linie eine Lichtmaschine und als solche der nothwendigen Evacuirung wegen, mehr als für eine Elektrisirmaschine erforderlich, complicirt und kostspielig war, und dass sie trotzdem in Bezug auf die Erzeugung von Elektricität nicht auffallend Grosses, sondern eigentlich recht Wenig leistete. Dabei aber darf man, um nicht historisch ungerecht zu werden, nicht übersehen, dass mit der Elektrisirmaschine überhaupt noch nicht und zwar so lange noch nicht viel anzufangen war, als man die Elektricität nicht anders als nur direkt vom Reibkörper zu entnehmen wusste, als man noch nicht gelernt hatte, die Elektricität von einem Körper auf einen andern überzuleiten, auf diesem anzusammeln und dann von ihm auf einmal zu entnehmen. Diese zur Verbesserung der Elektrisirmaschine nothwendigen Entdeckungen aber erfolgten durch Stephen Gray, ebenfalls einem Mitgliede der Royal Society, erst mehr als zwei Jahrzehnte nach der Vollendung der Arbeiten des Hawksbee.

Da Gray, ebenso wie Hawksbee, in seinen Abhandlungen alle historischen Angaben vermieden, so können wir nicht direkt entscheiden, warum Gray bei seinen elektrischen Untersuchungen nicht nur die Hawksbee'sche Maschine gänzlich ausser Gebrauch gelassen, sondern derselben auch nicht einmal Erwähnung gethan hat. Gray ging im Jahre 1729 von der Idee aus, dass man aus dem Uebergange des elektrischen Lichtes von einem Körper zu einem andern, wohl auch auf einen entsprechenden Uebergang der Elektricität zwischen verschiedenen Körpern schliessen dürfe.[1]) Zur experimentellen Prüfung dieser Idee aber war ihm jedenfalls die Hawksbee'sche Glaskugel, die in einem Gestelle fest gemacht war, viel zu wenig beweglich und er griff für die Erzeugung der Elektricität zum Reiben einer ungefähr $3^1/_2$ Fuss langen Glasröhre, die mit Wolle gerieben, nicht weniger Elektricität gab als die Kugelmaschinen und leicht und bequem jedem beliebigen Körper zur Mittheilung von Elektricität genähert werden konnte. Gray erreichte auch damit sein Ziel; die Demonstration der Fortpflanzungsfähigkeit der Elektricität in, wie auch zwischen

1) Philosophical Transactions no. 417, p. 18, auch Philosophical Transactions abridged, vol. VI, pt. II, p. 5 u. f.



den Körpern in kürzester Weise, und als er bei der Durchprüfung der verschiedensten Substanzen auch den menschlichen Körper als leitungsfähig und damit als elektrisirbar nachwies, erwachte auf einmal das allgemeine Interesse für die neue physikalische Kraft, die Elektricität.

Dieses Interesse aber wurde noch weiter in ganz ungewöhnlichem Masse vergrössert, als gleich nach den ersten Entdeckungen Gray's Charles du Fay in Paris nachwies, dass der isolirte menschliche und thierische Körper die Elektricität nicht nur aufzunehmen, sondern auch in beträchtlicher Weise zu verstärken und verstärkt wiederzugeben vermöge. Gray hatte bei seinen Versuchen einen acht- bis neunjährigen Knaben in isolirenden Seilen horizontal aufgehangen und gezeigt, dass der Kopf und die Arme desselben, ganz ebenso wie elektrische Körper selbst, naheliegende leichte Goldblättchen anzogen, sobald nur die Füsse des Knaben mit der geriebenen Glasröhre berührt wurden.

Du Fay[1]) aber bemerkte bei der Wiederholung dieses Experiments die noch viel erstaunlichere Erscheinung, dass der in dieser Weise isolirte menschliche Körper nicht nur elektrische Anziehungskräfte entwickelte, sondern auch bei der Annäherung eines andern Menschen Lichtfunken abgab von einer Stärke, wie man sie bis dahin noch nicht beobachtet hatte. Solche Funken wurden danach zum Entsetzen vieler Beobachter aus lebenden menschlichen oder auch thierischen Körpern mit unfehlbarer Sicherheit durch andere lebende Körper entweder direkt oder auch indirekt mit Hülfe von Metallstäben gezogen. Diese Funken waren schon so stark, dass sie auf der Haut einen stechenden Schmerz verursachten, und der in Seidenschnüren aufgehängte menschliche Körper wurde danach mit Vorliebe dazu gebraucht, diesen interessanten Schmerz zu verursachen, wobei man noch gern die Wirkung dieser menschlichen Conduktoren, wie auch Du Fay selbst dies that, in besonders geheimnissvoller Weise auf die Lebenskraft derselben zurückführen wollte.

Gray aber fasste in physikalisch reinerer Weise besonders den andern von Du Fay erwähnten Punkt in's Auge, dass man nämlich die Funken aus den menschlichen Körpern nicht bloss direkt durch andere menschliche Körper sondern auch indirekt durch Metalle ziehen könne.[2])

---

1) Caroli de Cisternay du Fay: Versuche und Abhandlungen von der Elektricität der Körper, welche er bei der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Paris in den Jahren 1733 bis 1737 vorgestellt und bei denen Versammlungen derselben abgelesen hat. Aus dem Französischen ins Deutsche übersetzt. Erfurth 1745. S. 100 u. f.

2) Philos. Transact. no. 436, p. 16, 28. Januar 1735, auch Phil. Trans. abr., vol. VIII, p. 397.

Er hielt danach für möglich und vielleicht wahrscheinlich, dass die Metalle ebenso wie die lebenden Körper die Elektricität zu verstärken vermöchten und dass man vielleicht ebenso wie aus lebendigen Körpern auch aus Metallstangen die starken Funken ziehen könne. Da er in dem Augenblicke, als ihm der Gedanke kam, nichts anderes Geeigneteres zur Hand hatte, so legte er zuerst seinen Schürhaken, dann die Feuerzange, endlich sogar die Kohlenschaufel auf die isolirende Schnüre und immer mit dem gleichen günstigen Erfolge. Schliesslich aber fand er doch eine eiserne Stange von 4 Fuss Länge und $^1/_2$ Zoll Durchmesser von der kräftigsten Wirkung und eine solche Stange gab dann, wenn sie in seidenen Fäden aufgehängt war, auch gerade so starke Funken wie die lebendigen Körper.[1])

Diese Gray'schen Eisenstangen und Eisenröhren oder auch die ihre Stelle vertretenden lebendigen Körper müssen wir als die ersten Conduktoren im Sinne der Elektrisirmaschine und Gray als ihren Erfinder bezeichnen, denn erstens leisteten sie den Experimentatoren vor der Construktion der Elektrisirmaschinen ganz dieselben Dienste wie später bei dieser selbst und zweitens behielt man bei der Construktion dieser Maschinen die Gray'schen Conduktoren noch lange, nicht bloss ihrer ursprünglichen Form, sondern auch ihrer ursprünglichen Aufhängungsart nach bei. Selbst der Name Conduktor, der von Desagulières[2]) im Jahre 1738 für die in Fäden isolirt aufgehangenen leitenden Körper vorgeschlagen wurde, stammt auch in dieser engeren Bedeutung noch aus der Zeit vor der Erfindung der Elektrisirmaschine.[3])

---

1) Phil. Trans. abr., vol. VIII, p. 398: „We caused to be made an Iron Rod, 4 Foot long and about half an Inch Diameter, pointed at each End, but not sharp, being left about the Bigness of a Pin's Head, this being suspended on the Lines; then the Tube being rubbed, and held near one End of the Rod, and the Finger or Cheek being put near either End of the Rod, the Effect was the same as where an animal had been suspended on the Lines, with respect to the pricking Pain we felt.

2) Phil. Trans. no. 454, p. 193, auch Phil. Trans. abr., vol. VIII, p. 422: „I call Conductors those Strings, to one End of which the rubbed Tube is applied; and Supporters such horizontal Bodies as the Conductor rests upon .... Where it is not mentioned otherwise, an Ivory-Ball hangs at the End of the Conductor; and its Electricity is tried by a Thread applied near it."

(Experiment made before the Royal Society Febr. 2. 1738.)

3) Auch Priestley, der der Entwicklung dieser Dinge noch ganz nahe stand, stellt den Gebrauch des Conduktors noch vor der Erfindung der Elektrisirmaschine fest, indem er in seiner History of electricity (Deutsch von Krünitz, Berlin 1772, S. 335) sagt. „Als man von den Kugeln (Guericke's und Hawksbee's) keinen Ge-

Mit der Entwickelung des Conduktors verband sich dann auch schon eine Verbesserung des Reibzeuges. Man fand es zweckmässig, die langen Glasröhren statt mit der Hand mit Wollen- oder Lederlappen zu reiben, die man mit verschiedenen Pulvern, wie Kreide, Tripel u. s. w. bestreut hatte; und mit diesem so vollendeten Apparate aus Glasstange, Reibzeug und Conduktor vermochte man in der That grössere Mengen von Elektricität auf einmal zu erhalten, so dass geschickte Experimentatoren empfindliche elektrische Schläge austheilen und Zündversuche schon mit Erfolg unternehmen konnten.

Doch aber musste man bei der sich immer mehrenden Zahl und Bedeutung der elektrischen Untersuchungen die Unbequemlichkeit und Unsicherheit des zusammenzustellenden Apparates, bei dessen Gebrauch Gehilfen schwer zu verwenden waren, immer stärker empfinden und musste danach nothgedrungen sich der rotirenden Kugeln Guericke's und Hawksbee's erinnern und ihre Anwendung wieder versuchen.

Der erste Physiker, von dem die Beschreibung einer solchen Kugelelektrisirmaschine veröffentlicht wurde, war der erwähnte Leipziger Professor Christian August Hausen, dessen betreffende Schrift Novi Profectus in Historia Electricitatis im Jahre 1743 kurze Zeit nach seinem Tode erschien. Wie die umstehende Abbildung, welche das Titelkupfer dieser Schrift wiedergiebt, erkennen lässt, enthielt Hausen's Apparat auch schon alle wesentlichen Theile der Elektrisirmaschine, nur in den alten, gewohnten Formen, nämlich erstens die Hawksbee'sche Glaskugel, welche wie bei diesem durch eine Schnurenübertragung mit Hilfe eines grossen Rades in schnelle Rotation versetzt werden konnte, aber der nur für das Studium der Lichterscheinungen nöthigen Vorrichtung für das Evacuiren entbehrte, dann zweitens die trockene Hand des Experimentators als Reibzeug und endlich drittens den Conduktor in Gestalt eines Knaben, der in Schnüren von Seide hängt oder auch auf einem mit Pech ausgegossenen Fasse steht.

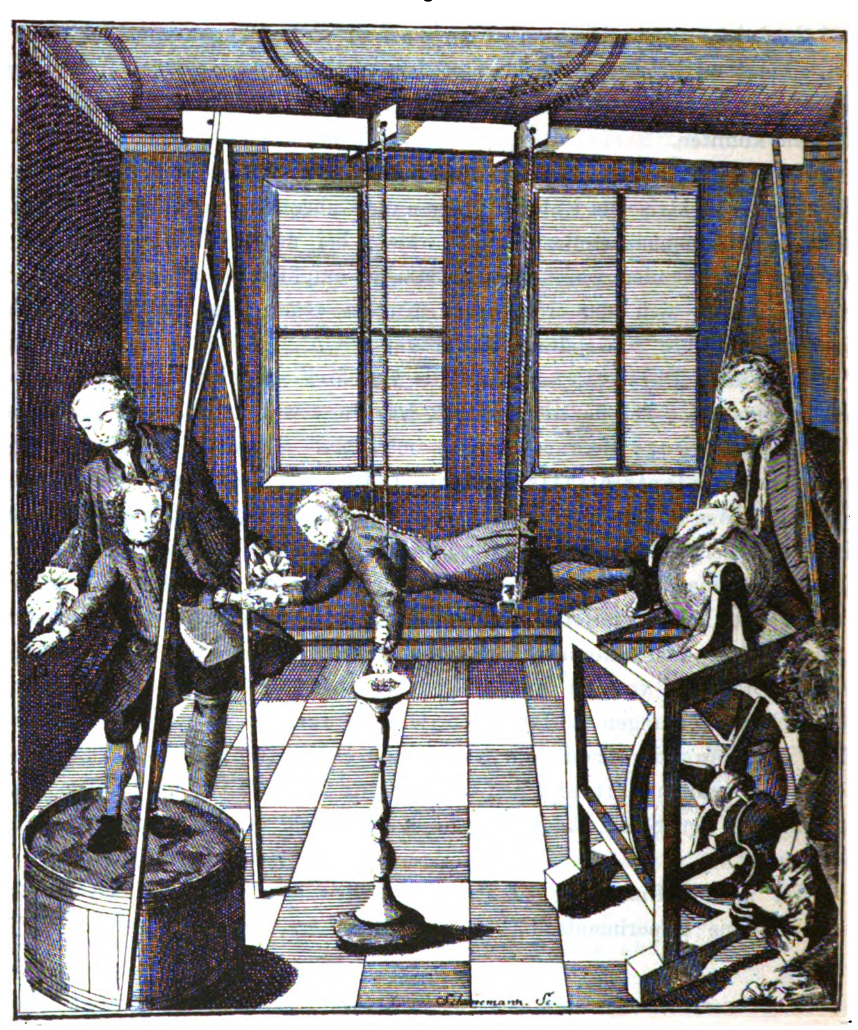
Da in der Einleitung zu Hausen's Schrift ausdrücklich bemerkt ist, dass er seine Experimente mit der Maschine erst kurz vor seinem Tode

---

brauch mehr machen konnte, nahmen die Naturforscher zu einer leichteren und wohlfeileren Geräthschaft, welche in Glasröhren und Schwefel- oder Siegellackstangen bestand, ihre Zuflucht, und die ersten Leiter, deren sie sich bedienten, waren nichts weiter als hänfene Stricke, welche auf seidenen Schnuren ruhten. An deren Statt nahm man bald darauf metallene Stangen. Nachher nahm man abermals zu Kugeln seine Zuflucht, weil dieselben weit geschickter waren, diesen isolirten Leitern die elektrische Materie auf eine mehr einförmige Art zu überliefern.“

begonnen habe, so dürfen wir die Construktion derselben, jedenfalls nicht vor das Jahr 1742 setzen. Darnach aber macht ihm der Wittenberger Professor Matthias Bose in allen Dingen, nicht bloss in der Erfindung

Fig. 3.



des Conduktors und nicht einmal vorzugsweise in dieser, wie man nach den Historien der Elektricität vermuthen sollte, die Priorität streitig. Bose beschrieb gleich nach dem Erscheinen der Abhandlung von Hausen seine eigene Methode, die Elektricität in grössten Mengen hervorzubringen in

mehreren deutschen und lateinischen Schriften.[1]) Darin betonte er, allerdings ohne Hausen zu nennen, aber doch mit deutlicher Beziehung auf diesen, wie er gleich nach seinem Bekanntwerden mit den Dufay'schen Versuchen in Paris vom Jahre 1733 sich darüber gewundert, dass dieser statt der unbequem zu reibenden Glasröhre nicht die millionenmal bequemere Kugel Hawksbee's benutzt, und dass er selbst dann noch im Jahre 1737 bei seinen elektrischen Versuchen die rotirende Glaskugel mit grossem Erfolge angewandt habe.[2])

Auch Bose benutzte zuerst noch vielfach menschliche Conduktoren; er stellte bei seinen Zündversuchen Menschen auf isolirende Substanzen und liess von ihren Fingern, oder (mit Vorliebe) von einem Schwert, oder von einer Eisenröhre, die sie in der Hand hielten, die Funken ausgehen. Dann aber eliminirte auch er den Menschen und hing als Conduktoren lange eiserne Röhren in seidenen Schnüren auf, deren Enden er entweder direkt auf der rotirenden Kugel schleifen liess, oder die er zweckmässiger, nachdem ihm durch das Aufstossen einer solchen eisernen Röhre eine schöne Glaskugel zerstossen worden war, durch Leinenfäden, die aus der Röhre heraushingen, mit der Kugel in leitende Verbindung setzte. Doch rühmte er sich der zweckmässigen Anwendung und Gestaltung dieser Conduktoren nicht weiter, sondern schilderte nur enthusiastisch die starken Wirkungen, die er mit seinen Apparaten erhalten hatte. Die Schriften Bose's enthalten keine Abbildungen seiner Apparate, doch müssen seine Maschinen, abgesehen von der speciellen Form und Lage der Theile, ungefähr so ausgesehen haben, wie die umstehend abgebildete Elektrisirmaschine Nollet's, die trotz ihrer Unvollkommenheit noch lange und viel angewandt wurde.

---

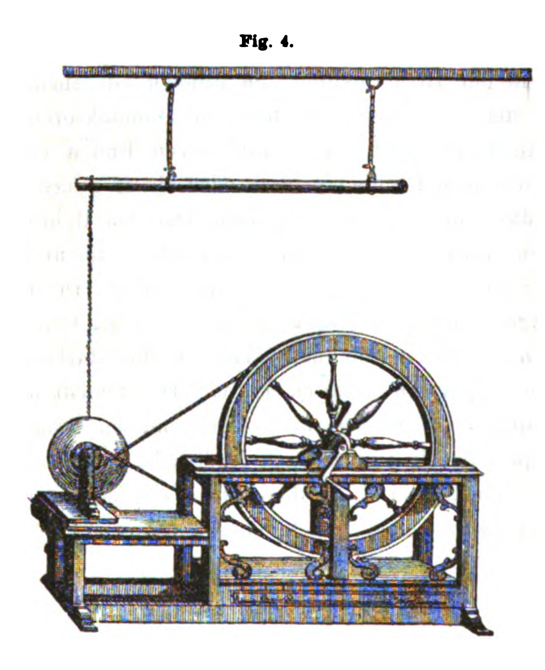
1) Die Elektricität nach ihrer Entdeckung und Fortgang mit Poetischer Feder entworfen von George Matthias Bose. Wittenberg. (Die Widmung dieses Lehrgedichts ist dadirt vom 20. Juli 1744.) Tentamina electrica in Academiis Regiis Londinensi et Parisina primum habita, omni studio repetita, quae novis aliquot accessionibus locupletavit G. M. Bose. Wittenbergae 1744.

2) In „Die Elektricität", S. XXIII, sagt Bose:

„Gepriesener Du Fay, so schön gingst Du mir für,
Das rühm' ich öffentlich. Ich folgte gleich nach Dir . .,
Nur alles was Du thatst, thatst Du mit hohlen Röhren,
Die gut, wenn sie nur nicht so sehr beschwerlich wären.
Ich nahm zu allererst mit viel Bequemlichkeit
Des Hawksbees Kugel an, wodurch in wenig Zeit
Was sonst das Rohr mit Müh, nicht lang und schwach gezeigt,
Unendlich stärker wird, ja alles übersteigt."

Bose erstaunte alle Welt durch die Stärke der elektrischen Entladungen, die er mit seiner Maschine erhalten konnte, dann aber vor allem auch durch die sogenannte Beatification des Menschen, d. i. das Glimmleuchten des ganzen menschlichen Körpers im Dunkeln, wenn derselbe auf den Isolirschemel gestellt und stark elektrisirt worden war. Und da Bose nicht bloss das grosse Publikum, sondern auch die höchsten Herrschaften, deren Besuche in seinem Laboratorium er sehr enthusiastisch beschreibt, für seine Versuche zu interessiren wusste, da ausserdem die gewaltigen Wirkungen der 1745 erfundenen Verstärkungsflasche besonders das Verlangen nach starken Elektricitätsquellen erregten, so begann nun eine Zeit elektrischen Enthusiasmus, in der nicht bloss fast jeder Physiker, sondern auch fast jeder Dilettant seine besonderen Maschinen construirte, die jedoch alle wesentlich nicht viel von einander verschieden waren.

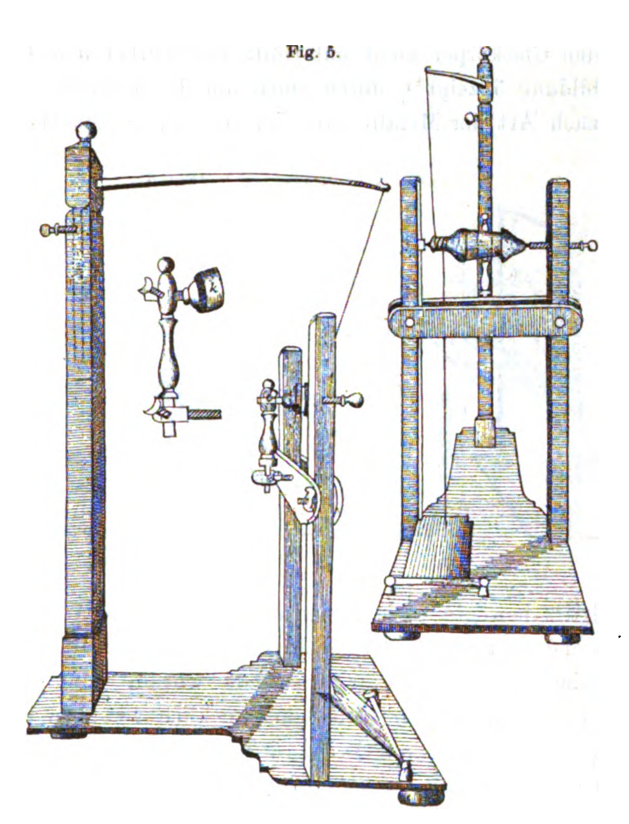
Fig. 4.



Noch aber war der letzte menschliche Rest aus der mechanischen Maschine, die menschliche Hand als Reibzeug, zu eliminiren. Das erste Bedürfniss dazu fühlte der Leipziger Professor der alten Sprachen, später auch der Physik, Johann Heinrich Winkler, der zur Ladung der von ihm zusammengestellten elektrischen Batterien, wie überhaupt zur Erzielung der starken Wirkungen, wie er sie liebte, stärkerer Elektricitätsquellen nothwendig bedurfte. Winkler baute für die Ladung seiner elektrischen Flaschenbatterien, um durch Summirung die ungenügenden Einzelwirkungen zu verstärken, Elektrisirmaschinen, statt mit einer, mit zwei oder vier, ja sogar acht Kugeln, zu deren Reibung wohl die Hände seiner Assistenten, oder vielmehr die Assistenten selbst nicht mehr ausreichten. Nach Winkler's eigner Erzählung hat ihn zuerst der Leipziger Drechslermeister Giessing, mit dem er über die Hausen'sche Maschine sprach, darauf aufmerksam gemacht, dass man auch bei der Hawksbee'schen Kugel, ganz wie bei den Gray'schen Glasröhren, statt der Hände, als Reibzeug Wollen-

und Lederstoffe anwenden könne.[1]) Er folgte dem Winke und construirte mit Erfolg eine Maschine, bei der statt der Hände zur Reibung der rotirenden Kugeln kleine mit Leder überzogene Zeugkissen gebraucht wurden, die zur besseren Wirkung mit Kreide überstrichen waren und die man mit Hülfe einer Feder stärker oder schwächer gegen die Glaskugel pressen konnte. Zuerst freilich zeigten sich diese Reibzeuge wohl bequemer, aber doch nicht so kräftig wirkend als die trockenen, menschlichen Hände, und das war wohl die Ursache dafür, dass das Reibzeug sich nur langsam einführte und dass selbst berühmte Physiker noch mehrere Jahre lang ihre Elektrisirmaschinen ohne mechanisches Reibzeug construirten. Erst nachdem man die Nothwendigkeit einer elektrischen Ableitung des mechanischen Reibzeugs erkannt hatte, führte sich dieses ganz allgemein ein.

Fig. 5.

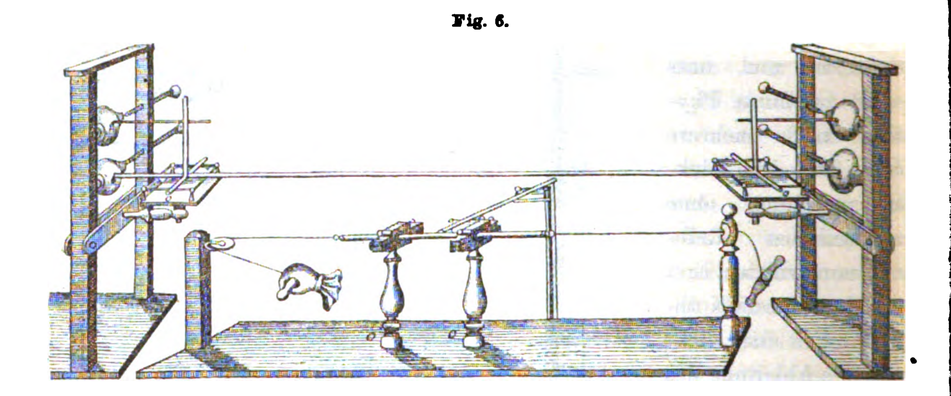


Ueberhaupt erhielten sich die alten Formen der einzelnen Theile des elektrischen Apparates noch merkwürdig lange und nur langsam gestalteten sie sich der Idee der Einheit einer Maschine entsprechend um. Auch Winkler versuchte noch seine ersten Maschinen in den einzelnen Theilen den alten Formen genau nachzubilden. Dem entsprechend beschrieb er in seiner ersten Schrift über die Elektricität vom Jahre 1744 eine Elektrisirmaschine, bei der er statt der rotirenden Glaskugel wieder eine lange Glasröhre nach

1) Gedanken von den Eigenschaften, Wirkungen und Ursachen der Elektricität, nebst einer Beschreibung zwo neuer elektrischen Maschinen. Herausgegeben von Joh. Heinrich Winklern. Leipzig 1744.

Grayscher Art anwandte. Diese Glasröhre konnte durch einen Fusstritt mit Hülfe einer an ihrem oberen Ende befestigten Feder in dem sie umschliessenden Reibzeuge auf- und niedergezogen werden. Und bei der zweiten Maschine, die Winkler ebenfalls im Jahre 1744 empfahl und die nach neuer Art eine Glaskugel oder vielmehr ein Bierglas als Reibkörper hatte, liess er wenigstens, nach seiner Meinung zur besseren Wirkung, die Rotationen in ihrer Richtung immer umwechseln, indem er den Glaskörper nicht mit Hülfe von Kurbel und Rad, sondern wie die Abbildung 5 zeigt[1]), durch einen um die Rotationsachse geschlungenen Faden nach Art der Metallbohrer der Handwerker ebenfalls mit Hülfe eines Fuss-

Fig. 6.



tritts bewegte. Die beiden ersten Maschinen Winkler's sind auch noch ohne Conduktor abgebildet, doch ist nicht zweifelhaft, dass auch dabei der Gray'-sche Röhrenconduktor verwandt wurde, denn Winkler spricht in dem erwähnten Werke (S. 57) ausdrücklich von den Funken eines eisernen Rohres, welche die Quintam Essentiam Vegetabilem mit ausnehmender Geschwindigkeit zu entzünden vermöchten.

Winkler's Elektrisirmaschinen aus dem folgenden Jahre, d. i. von 1745, aber haben die obigen alterthümlichen Einrichtungen, wie die Figur 6[2]) erkennen lässt, nicht mehr; vielmehr sind bei ihnen als Reibkörper rotirende

---

1) Figur 5 ist der Tafel I des Werkes von 1744 über die Eigenschaften, Wirkungen und Ursachen der Elektricität entnommen. Das sonst wenig sichtbare Reibzeug ist innerhalb der linken Abbildung der Maschine noch einmal vergrössert dargestellt.

2) Die Figur 6 stammt aus Tafel IV des Werkes „Die Eigenschaften der elektrischen Materie und des elektrischen Feuers aus verschiedenen neuen Versuchen erklärt und, nebst etlichen neuen Maschinen zum Elektrisiren, beschrieben von Joh. Heinrich Winklern. Leipzig 1745.

Glaskugeln, ganz wie bei Hausen und Bose verwendet, und die Conduktoren, allerdings noch von alter Röhrenform, sind schon fest mit der Maschine verbunden, was als eine sehr wichtige Neuerung erscheint.

Noch im Jahre 1745 veröffentlichte auch der Hallenser Professor der Medicin Joh. Gottlob Krüger als Zuschrift an seine Zuhörer eine Abhandlung über Elektricität[1]), der die Abbildung (Figur 7) einer Elektrisirmaschine angehängt ist, die ebenfalls noch ganz primitive Formen zeigt. Trotzdem aber in der Abbildung nur ein Mensch als Conduktor dargestellt ist, spricht sich grade Krüger über die Art der Wirkung der Metallconduktoren näher aus. Zuerst hatte man wohl bei der Anwendung derselben an besondere Kräfte der gebrauchten Körper gedacht, jetzt führte Krüger die Wirkung der Conduktoren auf das Strömen, vielleicht auch das Fallen der Elektricität in ihnen zurück und fand damit anscheinend mannigfachen Beifall. „Nach der Zeit, so sagt er[2]), dass Hausen und Bose ihre Experimente angestellt, haben sehr viele Naturkundige und ich selbst, wenn ich mich unter dieselben zählen darf, diese Experimente angestellt, und immer mehreres Neue dabei entdeckt, wozu ich insonderheit dieses zähle, dass die Elektricität immer stärker wird, je weiter sie fortgepflanzt wird, welches aber der Knoten ist, der in dieser Sache am schwersten aufzulösen. Da ich nun gefunden habe, dass wenigen diese Art die Elektricität zu verstärken bekannt sei, so will ich beschreiben, wie man es damit anfangen müsse. Man legt so nahe, als es möglich ist, an die gläserne Kugel oder Cylinder der elektrischen Maschine eine eiserne Stange auf blaue Seidenfäden und bindet an dieselben einen dicken eisernen Draht, denn wenn er dünner ist, so ist die Wirkung viel schwächer. Dieser Draht wird weiter fortgeleitet und allenthalben mit blauen Seidenfäden angebunden, zugleich aber auch verhindert, dass er keinem andern Körper zu nahe kommt, oder die Seide nass gemacht wird. Auf diese Art habe ich die Wirkung dergestalt vermehrt, dass man einen an dem letzten Ende des Drahtes angehängten Schlüssel nicht ohne den empfindlichsten Schmerz anrühren konnte. Mein Freund und ehemaliger Zuhörer Herr Pope hat auf solche Art den Draht zweihundert Ellen weit fortgeleitet und es ist unbeschreiblich, was die elektrischen Funken am Ende des Drahtes für eine Gewalt hatten, welches man daraus abnehmen kann, dass Jemand, welcher unter dem elektrischen Drahte hinwegging, von den Funken der-

1) Joh. Gottlob Krügers Zuschrift an seine Zuhörer, worin er ihnen seine Gedanken von der Elektricität mittheilt und ihnen zugleich seine zukünftigen Lectionen bekannt macht. Halle 1745. Neue und mit Anmerkungen versehene Auflage.

2) Krüger's Zuschrift, S. 32. Anmerk.



gestalt auf den Kopf geschlagen wurde, dass er beinahe vor Schwindel auf den Boden gefallen wäre."

Uebrigens berichtigte man doch bald diese Vorstellung von der Wirk-

Fig. 7.

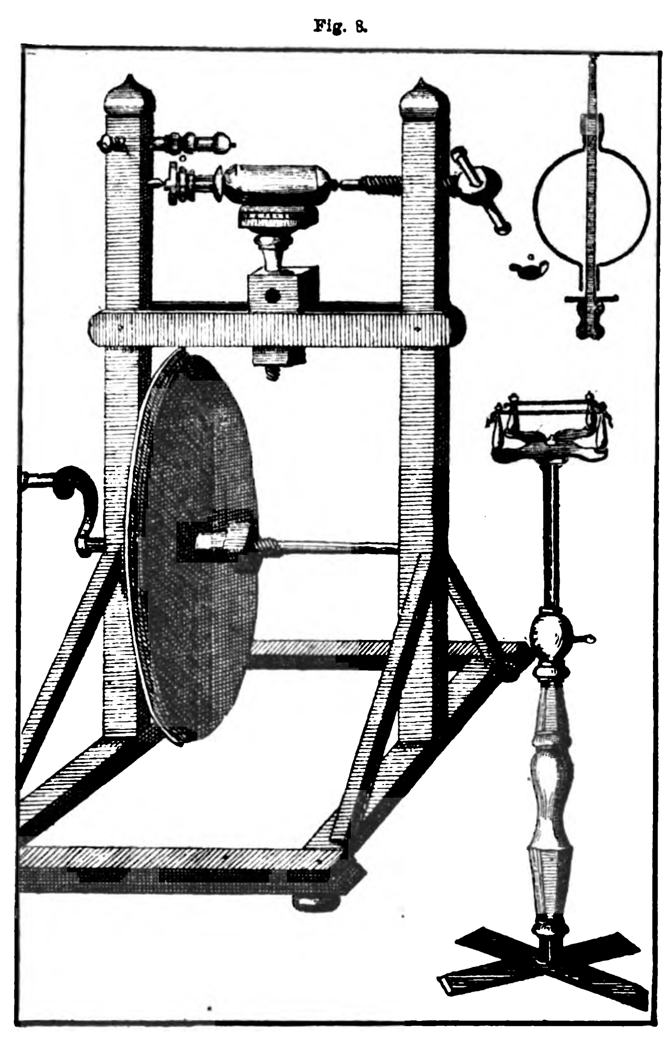


Machine zu der Electrification.
§ 429.

samkeit des Conduktors dahin, dass nicht sowohl die Länge allein, als vielmehr die ganze Oberfläche dabei von Einfluss sei, wenn man auch die langen Röhrenconduktoren beharrlich beibehielt. Beide Momente sind deutlich noch in den Briefen Franklin's über Elektricität zu erkennen. „Ich

habe, sagt er da[1]) in einem Briefe vom Jahre 1749, einen grossen Conduktor, der aus vielen Blättern von steifer Pappe zusammengesetzet, und wie eine Röhre gestaltet ist. Er ist beinahe zehn Fuss lang und hält einen Fuss im Durchmesser. Ich habe denselben mit buntem Goldpapier überzogen, welches fast gänzlich vergoldet ist. Diese grosse Metallfläche nimmt eine viel grössere elektrische Atmosphäre an, als eine eiserne Stange, die fünfzig mal schwerer ist. Der Conduktor ist an eine seidene Schnur aufgehangen, und wenn er geladen ist, schlägt er fast auf zween Zolle weit und giebt einen so starken Schlag, dass es dem Knöchel schmerzhaft wird."

Fig. 8.



Wohl die vollkommenste Maschine aus den Geburtsjahren unserer Elektrisirmaschine, ist diejenige, welche der Benedictinermönch und Professor der Physik in Erfurt Andreas Gordon in seinem „Versuch einer Er-

1) Des Herrn Benjamin Franklin's Esq. Briefe von der Elektricität. Aus dem Englischen übersetzet, nebst Anmerkungen von J. C. Wilcke. Leipzig 1758. S. 84.

klärung der Elektricität" (Erfurt, ohne Jahreszahl, Dedication vom 17. April 1745) beschrieb und auf Tafel I dieses Werkes abbildete (Figur 8). Die Maschine zeigt einige Verwandtschaft mit den Winkler'schen, vor allem auch darin, dass neben dem grossen Rade zur schnellen Drehung des Reibkörpers (eines Glascylinders oder gewöhnlichen Bierglases) noch eine Vorrichtung über demselben angebracht ist, um ihn, wie bei Winkler, nach Art der Metallbohrer vor- und rückwärts zu drehen. Das Reibkissen besteht aus Kalbsleder, das mit Rosshaaren ausgestopft und mit Tripel eingerieben ist. Der Conduktor, eine 4 Schuh lange und 2 Zoll weite Eisenröhre, wird auf ein kleines, mit der Maschine nicht verbundenes, in seiner Höhe verstellbares Tischchen gelegt, das rechts von der Zeichnung der Maschine dargestellt ist. Beim Gebrauch wurde die Eisenröhre dem geriebenen Glascylinder zur Ableitung der Elektricität bis $^1/_2$ oder $^1/_4$ Zoll Entfernung nahe gebracht, war aber sonst ohne weitere Vorrichtungen zur besseren Aufnahme der Elektricität.

Die eben beschriebenen primitiven Formen der Elektrisirmaschine zeigten eine ganz überraschende Beharrungskraft; sehr langsam nur wurde die Schnurenübersetzung der Drehung von einem grossen Rade auf den schnell rotirenden Reibkörper durch die direkte Drehung des letzteren eliminirt, und die lange Röhrenform des Conduktors erhielt sich gegenüber der Kugelgestalt noch bis weit in unser Jahrhundert hinein; ein sprechender Beweis für die zähe Lebenskraft nicht bloss wissenschaftlicher Theorien, sondern auch praktischer Formen wissenschaftlicher Apparate selbst lange nach dem Aufhören ihrer Daseinsberechtigung.

# DIE ERSTEN BEOBACHTUNGEN

UEBER

# ELEKTRISCHE ENTLADUNGEN

VON

FERDINAND ROSENBERGER.

Trotzdem man schon im Alterthume die Thatsache kannte, dass einzelne Stoffe durch Reiben mit andern die Fähigkeit erlangen leichte Gegenstände an sich zu ziehen, so dauerte es doch bis in das vorige Jahrhundert herein, bevor man an den geriebenen Körpern ausser jenen schwachen Anziehungen noch andere Eigenschaften bemerkte und dann alle diese beobachteten Erscheinungen als elektrische zusammenfasste. Gerade das letztere hatte seine besonderen Schwierigkeiten. Zwar waren die Abstossungserscheinungen, die Bürgermeister Guericke zuerst an seiner geriebenen Schwefelkugel nachwies, nicht schwer als mit den elektrischen Anziehungen znsammengehörig zu erkennen; dafür aber blieben die Erscheinungen, welche auf einen Uebergang von Materie aus den elektrischen Körpern in unelektrische hinzudeuten schienen und die wir wohl mit dem Namen der elektrischen Entladungserscheinungen bezeichnen, für lange Zeit in ihrem Verhältniss zu den elektrischen Kräften um so räthselhafter. Es hat lange gedauert, bis man auf diese Vorgänge überhaupt aufmerksam wurde; aber es hat selbst, nachdem man dieselben schon vielfältig und sorgfältig beobachtet hatte, noch lange gewährt, bis man sie als Entladungserscheinungen mit den elektrischen sicher zusammenzufassen wagte. Diese frühesten Versuche die Zusammengehörigkeit der elektrischen Kräfte mit den elektrischen Lichterscheinungen festzustellen möchte ich, da sie wenig bekannt und mehr als nöthig übersehen worden sind, in Kürze schildern.

In erster Linie ist dabei Francis Hawksbee zu nennen, der im Anfange des vorigen Jahrhunderts als Experimentator der Royal Society in London die Lichtentwickelungen geriebener Körper in vielfacher Weise bahnbrechend untersuchte und diese Untersuchungen im Jahre 1709 in einem besonderen Werke unter dem Titel Physico-Mechanical Experiments on various subjects touching light and electricity bekannt machte, nachdem die einzelnen Abhandlungen bereits vom Jahre 1704 an in den Transactions der Royal Society erschienen waren. Allerdings hatte schon Jahrzehnte vor ihm unser Bürgermeister Guericke an seiner geriebenen Schwefelkugel im Dunklen ein stetiges Leuchten bemerkt und dasselbe auch klar beschrieben; aber seine Versuche waren in dieser Be-

ziehung doch so wenig umfassend und Angaben über einen etwaigen Zusammenhang der Erscheinungen fehlten bei ihm so gänzlich, dass man Hawksbee trotzdem, wenn nicht als den ersten Entdecker, so doch als ersten und eigentlichen Erforscher der mit den elektrischen zusammen auftretenden Lichterscheinungen bezeichnen muss.

Guericke gab in seinem grossen physikalischen Werke Experimenta nova (ut vocantur) Magdeburgica de Vacuo Spatio ... Quibus accesserunt simul certa quaedam de Aeris Pondere circa Terram; de Virtutibus Mundanis, et Systemate Mundi Planetario .... (Amsterdam 1672) seine Versuche, die die Elektricität betreffen, in so allgemeiner Form und unter so allgemeinen Gesichtspunkten, dass es schwer hält zu erkennen, wie weit er selbst alle die beobachteten Erscheinungen für elektrische hielt. Nachdem er in den ersten vierzehn Kapiteln des vierten Buches, das von den Welt- oder besser Naturkräften handelt, gezeigt hat, dass der Erde verschiedene Kräfte ihrer Natur nach eigen sind, wie die Kraft der Beharrung, der Anziehung und Abstossung, der Direktion, der Rotation, des Tönens, des Wärmens und des Leuchtens, kommt er im fünfzehnten Kapitel zu den Versuchen, durch welche diese Kräfte mit Ausnahme der Direktions- und Rotationskraft auch an einer geriebenen Schwefelkugel nachgewiesen werden können. Die Kraft der Beharrung beobachtet man, wenn man die Schwefelkugel durch einen Stoss bewegt hat. Die Anziehung erkennt man nach dem Reiben der Kugel mit der recht trockenen Hand an der Bewegung kleiner Schnitzel von Gold- oder Silberpapier und anderer kleiner Körper. Zur Beobachtung der Abstossung an der geriebenen Schwefelkugel benutzt man am besten eine Flaumfeder, welche zuerst angezogen, danach abgestossen und dann erst wieder angezogen wird, wenn sie vorher mit einem andern Körper in Berührung oder einer Flamme auch nur nahe gekommen ist. Uebrigens können beide, die Abstossungs- wie die Anziehungskraft, durch Leinenfäden bis über eine Elle weit von der Schwefelkugel weg geleitet werden. Die Kraft des Tönens bemerkt man, wenn man die Kugel in der Hand hält und an das Ohr bringt. Die Kraft der Wärme ruft man in der Schwefelkugel, wie in jedem Körper durch Reiben leichtlich hervor. Die Leuchtkraft endlich anlangend, so entsteht sie, nach Guerickes Worten, in ähnlicher Weise. Denn wenn man die Kugel in ein dunkles Zimmer bringt und mit trockener Hand vorzüglich des Nachts reibt, so leuchtet sie auf gleiche Weise wie Zucker, wenn man ihn stösst.

Guericke gebraucht merkwürdigerweise in diesem fünfzehnten Kapitel seines Briefes das Wort Elektricität überhaupt nicht; doch bezeichnet er in dem vorhergehenden achten Kapitel wenigstens

die Anziehungskraft der Schwefelkugel, die er hier auch als fortleitungsfähig von der magnetischen bestimmt unterscheidet, ausdrücklich als eine elektrische Erscheinung. Man hat danach vielfach geglaubt, ihm auch die Erkenntniss der Zusammengehörigkeit des Tönens und Leuchtens der geriebenen Schwefelkugel mit den elektrischen Kräften mit Sicherheit zuschreiben zu dürfen, meines Erachtens jedoch nicht mit vollem Recht. Die im vierten Buche erwähnten Weltkräfte gehören nur insofern zusammen, als sie alle unkörperliche Kräfte d. h. solche Kräfte sind, die durch das Ausströmen sehr feiner, nicht direkt wahrnehmbarer, alle körperliche Materie frei durchdringender Flüssigkeiten aus den betreffenden Körpern verursacht werden. Solcher subtilen Flüssigkeiten und damit solcher unkörperlicher Kräfte kann es sehr verschiedene geben; als elektrisch bezeichnet Guericke direkt nur die Anziehungs- und Abstossungskraft (Virtus Conservativa & Expulsiva)[1]) der geriebenen Schwefelkugel. Die im fünfzehnten Kapitel als erste unter den unkörperlichen Kräften erwähnte Beharrungskraft (v. impulsiva) ist sicher nicht elektrisch; ob die Kraft des Tönens (v. Soni) den elektrischen Erscheinungen zuzuzählen, bleibt mehr als zweifelhaft, da die Töne, welche Guericke hörte, wenn er die Schwefelkugel mit der Hand an's Ohr hielt, wohl nicht den elektrischen Funken, sondern vielmehr dem Zerreissen der erwärmten Schwefelkrystalle zuzuschreiben sind. So erscheint es zum mindesten unsicher, ob Guericke einen festen Zusammenhang zwischen dem von ihm entdeckten Leuchten der geriebenen Schwefelkugel mit der elektrischen Anziehung wirklich klar erkannt hat, wenn derselbe auch insofern wenigstens nicht zu übersehen war, als alle wirklich elektrischen Kräfte sichtlich gemeinsam durch Reiben der Schwefelkugel erzeugt wurden.

Guericke hat mit Leibniz auf des Letzteren Anregung hin, während der Jahre 1671 und 1672, also kurz vor dem Erscheinen des Guericke'schen Werkes Briefe gewechselt, die vor allem von den Versuchen mit der ge-

1) Direkt im strengsten Sinne bezeichnet Guericke auch nicht einmal die Abstossungskraft als elektrisch, doch folgt dies von selbst aus dem erwähnten leichten Uebergehen der Attraction in Expulsion und umgekehrt. Auch bespricht Guericke die Leitungsfähigkeit, die er als bestes Merkmal der Elektricität bezeichnet, grade in dem Artikel des 15. Kaptils, der von der Virtus Expulsiva handelt. Seine Worte aber im 8. Kapitel über die elektrische Anziehung lauten: „Sed nos, qui, in antecedenti capite denominati globi Sulphurei attractionem, eandem cum Electricâ assumimus & ex virtute Conservativâ esse vel oriri percipimus, non possumus concedere, hanc attractionem mediante aëre fieri, quia experimenta ocnlariter monstrant, hunc Sulphureum Globum (attritione antea excitatum) suam quoque virtutem per filum lineum, ulnam & ultra longum, posse excercere, & ibi aliquid attrahere."

riebenen Schwefelkugel handeln.[1]) Auch hier gebraucht Guericke die Wörter elektrisch oder Elektricität an keiner Stelle, sondern spricht nur von den Virtutes Mundanae, die fast alle an der Schwefelkugel hervorzubringen seien, und betont ausdrücklich die Anwesenheit mehrerer Kräfte in der Kugel. „Item, so sagt er im ersten Briefe, es können gar viel andere wunderbare Dinge durch diese Kugel demonstriret werden, so dass man siehet, dass nicht eine, sondern einige viventes virtutes darinnen verborgen, gleichwie man vom Magnetstein siehet, in welchem die Virtus directiva Telluris, kein mehreres aber stäcket.“ Der Einheitsbegriff der Elektricität war eben auch bei Guericke noch nicht ausgebildet oder doch wenigstens noch nicht bewusst vollendet, wenn auch eine dunkle Ahnung von der Zusammengehörigkeit der Lichterscheinungen mit den elektrischen wohl vorhanden war. Dafür zeugen jedenfalls die folgenden Worte, mit denen Guericke die Uebersendung einer seiner Schwefelkugeln an Leibniz unter anderm begleitet: „Wenn man nicht rächtt weiss, wie sie (die Kugel nehmlich) zu atteriren und zu perstringiren, so nehme man sie bey abends inſs finstere vor, da wird man sehen vff welche art sie am besten schein von sich gibt, also will sie auch tractirt sein.“ Dass Guericke aber, trotz seiner Betonung des knisternden Geräusches in der Schwefelkugel und trotz der Abschätzung der Stärke der Elektricität nach der Stärke des Glimmlichts, niemals einen elektrischen Funken gesehen, das geht deutlich aus einem andern Briefe Guericke's hervor, in dem er Leibniz auf dessen Bemerkungen über die Experimente mit der erhaltenen Schwefelkugel antwortet: „Desselben gar angenehms vom 31. Jan., so heisst es da, hatt mich die Vberkunft der Schwäffelkugel verständigett und dass sie wegen andere geschöffte noch nicht probiret werden können; doch hette Er die Wärme und Funken gar wohl gesprühret etc. Nuhn weiss ich nicht, ob etwan ein missverstand hierbey, vielmehr von Wärme bey der Kugel nichts beweist, die Funken aber müssten etwa von dem leuchten zu verstehen sein, wan man Sie mit trucken henden bey der nachts oder im finstern gemach bestrichett, so gibbt sie, wie der Zucker, leüchtung von sich.“ Schade, dass gerade der hier angezogene Brief Leibnizens nicht mehr vorhanden, denn er müsste meiner Meinung nach beweisen, dass Leibniz der Erste gewesen, der einen elektrischen Funken

---

1) Guericke's Briefe sind in der Königlichen Bibliothek zu Hannover, wie es scheint, noch vollständig vorhanden, Leibnizens Briefe aber wohl bis auf zwei verloren. Die Briefe sind zum grössten Theile abgedruckt in den philosophischen Schriften von G. W. Leibniz, herausgegeben von C. J. Gerhardt, I. Band, Berlin 1875, S. 93—112.

beobachtet hat.[1]) Elektrisches Glimmlicht hatte übrigens um diese Zeit auch schon Robert Boyle an einem geriebenen Diamanten im Dunkeln bemerkt.

Guericke hat sich um das Studium der elektrischen Entladungserscheinungen ein grosses Verdienst insofern erworben, als er das Strömen der Elektricität in Leinenfäden als Erster sicher nachwies und klar charakterisirte. Die Zusammengehörigkeit der Lichterscheinungen aber mit dem Auftreten von elektrischen Anziehungs- und Abstossungserscheinungen hat erst Hawksbee durch einfache überzeugende Experimente demonstrirt, und selbst diesem fiel es, wie allen damaligen Physikern, noch schwer, die beobachtete Gleichzeitigkeit des Auftretens beider Erscheinungen für ein wesentliches und nicht bloss zufälliges Moment zu halten. Hawksbee aber kam zu den entscheidenden Versuchen nicht wie Guericke von der Elektricität, sondern umgekehrt vom Licht her, wenn man nach der wirklichen Aehnlichkeit mancher Aeusserungen bei Guericke und Hawksbee auch annehmen muss, dass der Letztere das Werk des ersteren sehr wohl kannte.

In der zweiten Hälfte des siebzehnten Jahrhunderts beschäftigten sich die Physiker sehr lebhaft mit den Phosphorescenzerscheinungen von natürlichen Mineralien und künstlich hergestellten Verbindungen und probirten alle möglichen Stoffe auf solche Eigenschaften durch. Dabei hatte man auch das matte Leuchten des Quecksilbers in der Torricelli'schen Leere eines sanftgeschüttelten Barometers entdeckt und hatte ihm wegen seiner Aehnlichkeit mit dem Phosphorescenzlicht den Namen des merkurialischen Phosphors gegeben. Doch bemühte man sich lange Zeit vergeblich, sichere Vorschriften grade für die Erzeugung dieses am meisten interessirenden Phosphors aufzufinden. Dies gelang vielmehr erst Hawksbee im nächsten Jahrhundert, indem er den vermeintlichen Phosphor als eine stete Begleiterscheinung gewisser elektrischer Vorgänge nachwies, und auch dann noch wurde seine Ansicht von den Herstellern künstlicher Phosphore erst nach langem Kampfe anerkannt.

Hawksbee führte zur bequemeren Beobachtung des merkurialischen Phosphors durch den oberen Theil des Glasrecipienten einer Luftpumpe eine vermittelst eines Hahnes verschliessbare Röhre luftdicht bis hart an den Boden des Recipienten, wo sie mit ihrer unteren Oeffnung in Quecksilber,

1) Mir ist nicht bekannt ob das Magdeburger städtische Archiv, das nach Direktor Paulsiek (Programm der Guerickeschule, Magdeburg 1885, S. 8) ein Volumen mit der Aufschrift, „Die Edition der Experimentorum Magdeburgicorum betreffend“ enthält, schon nach diesen Briefen Leibnizens durchsucht worden ist. Wie aus dem obigen Briefe Guericke's hervorgeht, wäre das ein sehr zu wünschendes Unternehmen.



das dort in einem hohen Cylinderglase sich befand, eintauchte. Oeffnete man dann, nachdem man die Luft aus dem Recipienten ziemlich weit ausgezogen hatte, den Hahn der Glasröhre, so dass die äussere Luft durch die Glasröhre wieder in den Recipienten einströmen konnte, so glühten die emporgeworfenen Quecksilberkügelchen rings um die Röhre herum in heftigem Feuer und glichen einer flammenden Masse aus lauter glühenden Punkten. Diese Erscheinung hielt an, bis der Recipient nahezu halb wieder mit Luft gefüllt war.

Um die Abhängigkeit dieser merkwürdigen Lichterscheinungen von der Stärke der Luftverdünnung genauer zu untersuchen, construirte Hawksbee einen etwas complicirteren Apparat, an dem er alsobald sogar zweierlei verschiedene Arten der elektrischen Lichter beobachtete. Er brachte auf einem grossen Recipienten ein zweites kleines Gefäss an, das mit c. $1^1/_2$ Pfund Quecksilber etwas über die Hälfte gefüllt war. Dieses obere Gefäss stand mit dem Recipienten nur durch eine enge Oeffnung im Boden in Verbindung, die aber durch einen Holzpfropf mit längerem Stiel verschlossen werden konnte. In dem Recipienten befand sich dann noch ein kleineres oben geschlossenes und unten offenes Glasgefäss so aufgestellt, dass das Quecksilber beim Ausfliessen aus dem oberen Gefäss auf dieses innere fallen und an den Aussenwänden desselben herabfliessen musste. Wurde nun der Recipient genugsam ausgepumpt und dann der Verschlusspfropf des oberen Gefässes etwas gelüftet, so gab das ausfliessende Quecksilber beim Auftreffen auf das innere Gefäss einen prachtvollen Feuerschauer. Dabei leuchtete aber ganz unzweifelhaft nur das Quecksilber, welches an den Glaswänden wirklich herabfloss, nicht dasjenige, welches frei herunterfiel, und selbst die kleinen Theilchen, welche an dem Glase hängen blieben, leuchteten nicht.

Bei mehrfacher Wiederholung dieses Versuchs, besonders mit so grossen Mengen von Quecksilber, dass das Quecksilber mehrere Minuten zum Auslaufen brauchte, zeigte sich aber neben diesem beschriebenen matten und gleichmässig sich verbreitenden, fast continuirlichen Licht von purpurner Färbung noch ein anderes von mehr bleicher, weisslicher Farbe, das, in sich nicht zusammenhängend, eher den Blitzstrahlen[1]) glich und vor allem den oberen Theil des Recipienten erfüllte. Auch dieses Blitzlicht folgte in der Hauptsache den fallenden Quecksilber-

1) Hawksbee, Experiments, p. 9: And now the descending Mercury did not only appear like a Shower of Fire (which it did at the first Trial), but also the Light darted thick from the Crown of the included Glass, like Flashes of Lightning, of a very pale colour, and easily distinguishable from the rest of the Light produced.



kügelchen, ging aber von diesen aus nach allen Seiten und besonders von den Kügelchen nach dem Recipienten hin.

Hawksbee erkannte bald, dass die Art des Leuchtens bei diesen Versuchen durch die grössere oder geringere Verdünnung oder überhaupt durch die Dichte der Luft bedingt wurde, und glaubte in Betreff der Ursache der Erscheinungen annehmen zu dürfen, dass dieselbe nur in der Reibung des Quecksilbers an den Glaswänden zu suchen sei. Zur Prüfung der letzteren Annahme schüttelte er direkt das Quecksilber in gläserne Hohlkugeln, die er beliebig evacuiren oder auch mit Luft füllen konnte, und der Erfolg entsprach voll seinen Erwartungen. Wenn die Kugel nahezu luftleer war, so schien das Licht zusammenhängend und purpurn gefärbt; schüttelte er aber die Kugel lufterfüllt, so zeigten sich in derselben nur Lichtfunken, weisslich leuchtend wie die Sterne in der Milchstrasse.[1])

Aber auch das Quecksilber schien bei der Erzeugung der Lichter nicht einmal wesentlich zu sein, und nur das Reiben des Glases mit geeigneten Stoffen im luftverdünnten oder lufterfüllten Raume blieb schliesslich noch für jene Erzeugung nothwendig. Zur Prüfung der Vermuthung construirte sich Hawksbee besondere Apparate, mit denen er Glas oder Bernstein mit Wolle, oder Glas mit Austernschalen u. s. w. in Luft oder im Vacuum reiben konnte, und immer entstanden auch hierbei die schon früher beobachteten Lichter, das zarte, pupurngefärbte Glimmlicht, oder das weissliche, lebhafte Blitzlicht, je nachdem diese Lichter im luftverdünnten oder lufterfüllten Raume sich entwickelten.

Damit war die erste Aufgabe Hawksbee's, sichere Vorschriften für die Erzeugung des merkurialischen Phosphors zu geben, gelöst; er ging nun weiter dazu über die Eigenschaften dieses Phosphors noch genauer zu erforschen und vor allem sein Wesen, wenn möglich, zu ergründen. Für diese Untersuchungen construirte er sich wieder eine besondere Maschine, dieselbe bestand im wesentlichen nur aus einer hohlen, neun Zoll im Durchmesser haltenden Glaskugel, die mit Hilfe eines grossen Rades und einer Schnurenübersetzung sehr schnell um ihre Achse gedreht werden, und die man dabei durch die hohle Achse, selbst während des Drehens beliebig evacuiren oder auch mit Luft erfüllen konnte. Berührte man die luftleer gemachte Glaskugel während des Rotirens mit der trockenen Hand, so zeigte

1) Ibid., p. 15: The difference between these lights consists particularly in this, that the luminous Particles are distinct and separate in the one, and united or blended into one continued body of Light in the other . . . That light which is produced in vacuo, or a very much rarefied Medium, is not the same whith this produced in the open Air.

sich bei Dunkelheit in jener ein continuirliches, purpurfarbenes Licht, das hell genug war um bei seinem Scheine in einiger Entfernung noch lesen zu können. Liess man aber die Luft in die Kugel ein, so änderte sich dieses Licht grade so wie das vorher erwähnte Quecksilberlicht um, es wurde blitzartig, und wenn man von aussen der Kugel nur einen Finger näherte, so fuhren in der Kugel leuchtende Blitze in der Richtung nach diesem Finger hin.

Ja, wenn während der Zeit, dass Hawksbee seine Hand leicht an die eine Seite der rotirenden Kugel hielt, irgend Jemand von der anderen Seite her seinen Finger der Kugel nur bis auf einen Zoll Entfernung näherte, ohne die Kugel zu berühren, so sah man, wie mehrere Anwesende bezeugten, sogar ein Licht aus der Kugel gegen den Finger fahren, und es wurde zu gleicher Zeit bemerkt, dass auch die Halsbinde von Hawksbee leuchtend wurde, ohne dass das Licht in der Kugel irgend wie mit ihr in Verbindung stand.[1])

Hawksbee hielt wohl jetzt für mehr als wahrscheinlich, dass der sogenannte merkurialische Phosphor nicht zu den eigentlichen Phosphoren zu rechnen sei; denn diese werden durch Belichten und Glühen besonderer Stoffe erregt, während jener durch das Reiben der verschiedensten Stoffe an Glas hervorzubringen ist. Doch giebt er zu, dass auch im Quecksilber vielleicht noch ein eigenthümliches Princip des Leuchtens enthalten sei, wie ja noch manche andere Stoffe, wie z. B. Zucker, beim Zerbrechen oder Zerstossen im Dunkeln leuchteten. Nur seien diese letzteren immer noch dadurch vom Lichte des geriebenen Glases zu unterscheiden, dass sie bei jeder Witterung gleich gut sichtbar wären, während Feuchtigkeit das Glaslicht sehr schwäche, oder gar unsichtbar mache. Hawksbee hatte bis dahin der Elektricität noch keine Erwähnung gethan, doch zeugt die letztere Bemerkung, wie überhaupt die Betonung, dass der merkurialische Phosphor nur durch Reiben erzeugt werde, dafür, dass er den Zusammenhang zwischen diesen Lichtern und den elektrischen Erscheinungen bis dahin wohl schon erkannt hatte, ein Zusammenhang, der ja auch, da man das Elektrischwerden des Glases durch Reiben seit langem beobachtet, kaum zu verkennen

---

1) Nay, while my Hand continued upon the Glass (the Glass being in motion) if any Person approached his Fingers towards any part of it in the same Horizontal Plane with my Hand, a Light would be seen to stick to 'em at the distance af an inch or there abouts, without their touching the Glass at all; as was confirmed by several then present. And 'twas observ'd also that my Neckcloth, at the same time, at an inch or two distance from the Globe appear'd of a fiery colour, without any Communication of Light from the Globe. (Hawksbee, Experiments, p. 37.)



war. Die Behutsamkeit aber, mit der Hawksbee die Brücke zwischen Licht und Elektricität schlug, lässt erkennen, wie schwer es ihm und der physikalischen Welt von damals wurde eine Verbindung zwischen diesen scheinbar so fremden Gebieten anzunehmen.

Trotzdem ging Hawksbee jetzt entschieden in dieser Richtung vor und statt wie früher vom Licht aus sich der Elektricität zu nähern, versuchte er nun von unzweifelhaft elektrischen Versuchen aus zum Licht zu kommen. Dabei gelangte er, der bis jetzt immer an erster Stelle die Vorgänge innerhalb der geriebenen Körper beobachtet hatte, von selbst zu genauerer Beachtung der Vorgänge ausserhalb derselben und näherte sich mehr der Erkenntniss des Ueberganges der Elektricität oder der Entladungserscheinungen zwischen verschiedenen Körpern, wenn auch das überwiegende Interesse, das er an den Lichterscheinungen im luftverdünnten Raume nahm, ihn immer an einer fruchtbaren Verfolgung dieser gewonnenen Erkenntnisse hinderte.

Hawksbee nahm also jetzt, um sich in der Form den gewöhnlichen elektrischen Versuchen noch mehr zu nähern, für seine weiteren Experimente statt der Glaskugel eine Glasröhre, und zwar zur stärkeren Wirkung von 30 Zoll Länge bei ungefähr 1 Zoll Durchmesser und rieb dieselbe wieder mit der recht trockenen Hand, bis sie ziemlich warm wurde. Dann konnte er an derselben in beträchtlicher Stärke alle die Erscheinungen nachweisen, die bis dahin als elektrische bekannt und anerkannt waren. Ja selbst dem Gefühl waren die elektrischen Effluvien, wenn die Röhre recht stark gerieben wurde, deutlich erkennbar; denn wenn man die geriebene Röhre nahe vor das Gesicht hielt, so hatte man die Empfindung, als ob man mit feinen Pinselhaaren überstrichen würde. Wurden aber diese Versuche im Dunkeln angestellt, so bemerkte man ausser diesen Erscheinungen auch noch, dass der reibenden Hand in der Röhre stetig ein helles Licht folgte; und wenn man eine andere Hand von aussen nahe an die geriebene Röhre hielt, so brach sogar das Licht nach der Hand hin frei aus der Röhre heraus und man hörte ein knackendes Geräusch, ähnlich dem eines grünen Blattes im Feuer, nur nicht so laut. So waren die Erscheinungen beschaffen, wenn die Röhre mit Luft erfüllt blieb; zog man aber diese fast ganz aus der Röhre heraus, so entstand bei dem Reiben in der Röhre der merkurialische Phosphor, dessen Licht auf die Röhre beschränkt blieb und nicht die Fähigkeit hatte auf einen Körper ausserhalb der Röhre überzuspringen.

Noch stärkere Lichtfunken als die Glasröhre gab die in der Hawksbee'schen Maschine rotirende Glaskugel, wenn sie lufterfüllt war, nach aussen ab, so dass die Funken dem genäherten Finger selbst fühlbar wurden.

Das Licht, sagt Hawksbee[1]), war nicht nur sichtbar, sondern es schien auf den Finger mit einiger Kraft zu treffen, die als eine Art von leichtem Druck gefühlt wurde, obgleich der Finger noch einen halben Zoll von der Kugel entfernt war. Das Licht verursachte bei seinem Hervorbrechen aus der Kugel ausserdem ein beträchtliches Geräusch, das leicht von dem Geräusch der Maschine zu unterscheiden war, und das man ebenso wie das Licht, selbst bei Tage bemerken konnte.

Diese Versuche Hawksbee's, welche, abgesehen von den nicht mehr direkt festzustellenden Erfahrungen Leibnizen's[2]), die ersten Beobachtungen elektrischer Funken enthalten, wurden in den Jahren 1706 bis 1708 angestellt und in den Philosophical Transactions der Royal Society veröffentlicht. In dem letzten der genannten Jahre erschien aber in denselben Blättern noch eine andere Abhandlung[3]) über solche Funken, die den Abdruck eines Briefes bildete, den ein anderes Mitglied der Royal Society, ein Dr. Wall, an Sloane, den Secretär der Gesellschaft, gerichtet. Obgleich diese letztere Abhandlung an wissenschaftlicher Sorgfalt und umfassender Erfahrung die Abhandlungen Hawksbee's bei weitem nicht erreicht, so ähnelt sie ihnen doch insofern, als sie von demselben Ausgangspunkt, den Phosphoren, ausgehend in Betreff der Funken ungefähr dasselbe Ziel erreicht, ein Zeichen dafür, dass der hier befolgte Gang der Entwicklung dem allgemeinen Stande der Kenntnisse entsprach. Merkwürdigerweise nehmen die beiden Experimentatoren, deren Arbeiten sich hier so nahe berühren, in ihren Veröffentlichungen von einander absolut keine Notiz.

Dr. Wall erzählt, dass er sich schon seit dem Jahre 1680 auf eine Anregung des berühmten Boyle hin mit dem Leuchten des künstlichen Phosphors beschäftigt habe, aber, weil dessen Herstellung so weitläufig, auf die Suche nach natürlichen Phosphoren gegangen sei. Da er nun den Bernstein von ähnlicher Zusammenzetzung wie den künstlichen Phosphor gefunden, so habe er in jenem einen natürlichen Phosphor vermuthet und danach ein Leuchtendwerden desselben im Dunkeln mit wirklichem Erfolge erzeugt, indem er nur den Bernsteingriff seines Stockes im Dunkeln mit der Hand leicht gerieben. Danach aber habe er sich ein besonders grosses,

1) Hawksbee, Experiments, p. 51: I was surprized with the appearance of a brisk and vigorous Light continued between the point of my Finger and the Glass. It was not only visible, but seem'd as it were to strike with some force upon it, being easily to be felt by a kind of gentle pressure, tho'the moving Body was not touch'd with it by near half an inch . . .

2) Siehe Seite 94.

3) Of the Luminous Qualities of Amber, Diamonds, Gum-Lac, by Dr. Wall; Phil. Trans. no. 314, p. 69; auch Phil. Trans. abr. IV. pt. II, p. 275.

langes und schmales, gut polirtes Stück Bernstein verschafft, das schon bei ziemlich schwachem Reiben mit der trockenen Hand ein merkliches Licht von sich gegeben, und habe weiter durch vieles Probiren gefunden, dass der Bernstein durch Reiben mit wollenem Zeug stärker als durch alle anderen Reibstoffe leuchtend werde. Auf diese Weise seien auch ganz neue Erscheinungen beobachtet worden. Während der Stockgriff nur gleichmässig matt beim Reiben geleuchtet, sei beim Reiben des grösseren Stückes Bernstein mit Wolle ein erstaunlich mannigfaltiges Knistern oder Krachen gehört und bei jedem Krachen noch eine kleine Flamme, ein kleiner Lichtblitz, gesehen worden. Wenn man nur einen Finger in geringer Entfernung an den stark geriebenen Bernstein gehalten, so habe man einen starken Lichtblitz gesehen, dem ein starkes Krachen gefolgt sei; und was ihn am meisten verwundert, der Finger sei dabei wie von einem Stosse oder Windhauche ziemlich bemerkbar getroffen worden. Ja als zuletzt ein noch längeres und grösseres Stück Bernstein erkauft und mit vieler Sorgfalt gerieben worden sei, habe das Krachen und das Licht eine solche Stärke erlangt, dass man es sehr wohl mit Donner und Blitz habe vergleichen können.

Dr. Wall, viel kühner als Hawksbee, stellt diese Lichterscheinungen ohne weiteres mit den elektrischen Kräften zusammen und hält sich ohne weitere beweisende Versuche für überzeugt, dass alle oder doch die meisten Körper, welche durch Reiben elektrisch geworden sind, auch Lichterscheinungen zeigen müssen, weil eben nach seiner Meinung nichts anderes die Ursache der elektrischen Wirkungen sein kann als die in allen Körpern enthaltene Licht- oder Feuermaterie selbst.

Hawksbee strebte wohl sichtlich demselben Ziele zu, hielt es aber noch nicht an der Zeit die wesentliche Identität der elektrischen Licht- und Anziehungserscheinungen schon als sicher auszusprechen und bemühte sich durch immer neue Versuche wenigstens die zeitlichen Zusammenhänge beider nachzuweisen. Für die geriebene Glasröhre, deren elektrische Kräfte längst bekannt, waren diese Zusammenhänge nach der Demonstration der Lichterscheinungen innerhalb und ausserhalb derselben genügend klar; für die geriebene rotirende Glaskugel, für die neue Hawksbee'sche Lichtmaschine, aber musste die elektrische Natur der auftretenden Erscheinungen erst noch weiter nachgewiesen werden. Zu diesem Zwecke brachte Hawksbee über und neben der rotirenden Glaskugel, oder auch in derselben, an Metalldrähten frei herabhängende Baumwollfäden an, die dann immer, so wie die trockene Hand an die rotirende Kugel gehalten wurde und die Lichter in der Kugel sich zeigten, direkt nach der geriebenen Glasfläche, auch der Schwere entgegen, hingezogen wurden.

Dabei kam er am Schlusse seiner Untersuchungen nochmals zu einer neuen Entdeckung, welche wieder auf einen ganz neuen Zusammenhang zwischen Elektricität und Licht hindeutete, die aber zu ihrer Zeit fast ganz ohne Beachtung blieb und die bis auf unsere Zeit nicht wieder discutirt worden ist. Er überzog nämlich seine Glaskugel im Innern zu beiden Seiten des Aequators mit einer dünnen Schicht Siegellack, machte dann die Kugel möglichst luftleer und berührte dieselbe, während sie rotirte, von aussen wie gewöhnlich leicht mit der Hand. Dann bemerkte er in der Dunkelheit, wenn er von den Polen her in die Kugel hineinsah, auf der inneren Seite des Siegellacks deutlich die Umrisse der aussen auf dem Glase liegenden Hand, ganz so, als ob das Siegellack wie das Glas durchsichtig wäre. Eine geringe Menge von Luft aber, die in die Kugel eingelassen wurde, zerstörte die ganze Erscheinung und machte das Siegellack wie gewöhnlich undurchsichtig. Hawksbee wusste auch diese wunderbare Erscheinung, die an die modernen Röntgenstrahlen erinnert, noch ganz plausibel zu erklären. Die Elektricität und das Licht, sagt er, seien nach dem allgemeinen Dafürhalten beide durch körperliche Ausflüsse aus den elektrischen bezüglich leuchtenden Körpern bedingt. Wenn man nun zuzugeben vermöge, was an sich nicht unwahrscheinlich sei, dass ähnliche elektrische Körper, wie Glas und Siegellack, auch gleiche körperliche Ausflüsse hätten und wechselseitig einer die Ausflüsse des andern aufzunehmen und wieder auszusenden vermöge, so sei es ganz von selbst klar und durch die Natur der Sache gefordert, dass auch ein undurchsichtiger Körper, wie Siegellack, sich den Ausflüssen eines elektrisch ähnlichen, aber durchsichtigen Körpers, wie Glas, gegenüber ganz wie dieser verhalten und also für die Strahlen, die durch den letzteren hindurch gegangen, selbst eine gewisse Durchsichtigkeit zeigen könne.

Auch Hawksbee's schöne Entdeckungen fanden ihrer Zeit aus äussern und innern Gründen nicht die gebührende Beachtung. Zuerst wohl darum nicht, weil man die neuen Beobachtungsresultate noch nicht recht in dem System der physikalischen Disciplinen unterzubringen wusste und darum auch die Beschäftigung mit solchen Dingen noch nicht für voll berechtigt in der Wissenschaft anerkannte. Dann aber auch, weil die Interessen der damaligen Physiker in England vor allem der Ausbildung der Newton'schen mathematischen Physik zugewandt waren und jene elektrischen Erscheinungen nicht recht in das Spiel der Newton'schen Kräfte passen wollten. Vielleicht spricht für die starke Wirksamkeit dieser Ursache auch das geringe Interesse, das man zur Zeit an den Personen der elektrischen Arbeiter nahm. Hawksbee war Experimentator der Royal Society und also eines der bekanntesten Glieder dieser Gesellschaft, aber

von seinen Lebensumständen ist kaum etwas, nicht einmal eine ganz sichere Angabe seines Todesjahres, auf uns gekommen. Seine sehr zahlreichen Abhandlungen, die in den Philosophical Transactions von 1704 bis 1713 erschienen waren, wurden bei dem abgekürzten Wiederabdruck der Transactions mit nur ein paar Ausnahmen weggelassen, darunter auch diejenigen, die Hawksbee erst nach dem Erscheinen seines Sammelwerkes von 1709 veröffentlicht hatte. Von dem eben erwähnten Dr. Wall, der zuerst Funken hervorbrachte, die er mit dem Blitze verglich, und dessen Abhandlung ebenfalls in den Philosophical Transactions abgedruckt wurde, ist uns gar kein anderes Datum seines Lebens, nicht einmal sein Vorname erhalten. Selbst der gleich zu erwähnende Stephen Gray, dessen elektrischen Arbeiten nun nicht bloss das Interesse, sondern auch die Arbeit hervorragender Physiker in England wie in andern Ländern lebhaft anregten, wie auch sein Freund und Mitarbeiter Granville Wheler, konnten, obgleich beide Mitglieder der Royal Society waren, von persönlichen Nachrichten nichts weiter als Tag und Jahr ihres Todes auf die Nachwelt bringen. Der Elektricität fehlte damals in der Wissenschaft noch durchaus die Hoffähigkeit, die sie allerdings nach einigen Jahrzehnten schon um so schneller und günstiger erlangte.

Dabei darf man nicht verkennen, dass auch in den Arbeiten Hawksbee's selbst Gründe für die geringe Wirkung lagen, die sie ihrerzeit ausübten. Die Versuche Hawksbee's waren zum grössten Theile keineswegs einfach und liessen sich nur mit ziemlich complicirten maschinellen Vorkehrungen und darum auch nur mit ziemlichen Kosten wiederholen. Zur Aufwendung der erforderlichen Kosten und der grossen Mühen, die sie nöthig machten, reizten aber die zarten, nur im Dunklen zu beobachtenden Lichterscheinungen um so weniger an, als Hawksbee grade auf die erstaunlichsten Phänomene, die elektrischen Funken, das geringste Gewicht legte. Jedenfalls waren alle die hervorgebrachten elektrischen Lichter nicht so stark, dass sie sich ein Interesse, welches man ihnen nicht mit freiwilligem Verständnisse entgegenbrachte, hätten erzwingen können. Auch die grosse theoretische Bedeutung seiner Entdeckungen verbarg Hawksbee eher, als dass er sie klar stellte, indem er jeden kühneren Schluss aus seinen Erfahrungen entweder ganz vermied oder nur mit vorsichtigster Verklausulirung aussprach und stetig bemüht war, die neue Erscheinung in hergebrachter Weise zu erklären. So hielt Hawksbee bis zuletzt an den alten Vorstellungen fest, nach denen die elektrischen Kräfte geriebener Körper nur durch die Ausflüsse feiner Materien aus den Körpern zu erklären seien, die durch das Reiben herausgetrieben, in krummen Linien auch alsobald wieder in den Körper zurückkehrten, wodurch, wie das nach damaligen Erfahrungen

wahrscheinlich war, die durch das Reiben erregten elektrischen Eigenschaften in kurzer Zeit von selbst wieder verschwanden. Nach diesen Vorstellungen, die um den elektrisirten Körper Wirbelbewegungen annahmen, in deren Wirkungskreis nahe Körper leicht hineingezogen werden konnten, die aber doch, ohne auf andere Körper überzugehen, bald von selbst erlöschen mussten, war eine Mittheilung von Elektricität zwischen den Körpern, eine Bewegung von Elektricität in denselben, eine Ladung und Entladung, endlich eine Vermehrung der Elektricität über den geringen Grad der durch Reibung erzeugten hinaus niemals möglich, und ein bestimmter weiterer Fortschritt in der Entwickelung in keiner Weise angezeigt. In entsprechender Weise wurden die Lichterscheinungen aus dem Mitgerissen- und dadurch äusserlich Sichtbarwerden des Lichtstoffes durch die elektrischen Ausflüsse erklärt und für die weitertreibende Frage, nach dem Verhältnis zwischen dem Wesen der elektrischen Ausflüsse und dem Lichtstoff, verweigerte Hawksbee ausdrücklich eine sichere Antwort und unterschied bis zuletzt sorgfältig zwischen den elektrischen Kräften und den sie begleitenden Lichterscheinungen.

So blieben die Arbeiten Hawksbee's mehr als zwanzig Jahre ohne weitere Folgen, dann aber knüpfte der folgende rasche Fortschritt doch wieder direkt an diese Arbeiten an, und gerade die von Hawksbee entdeckte aber nicht recht gewürdigte Funkenentladung wurde, wie es auch natürlich war, die Ursache für die Entdeckung der Fortpflanzung der Elektricität ausserhalb und innerhalb der Körper.

Stephen Gray hatte schon im Jahre 1720 bei elektrischen Versuchen, die sonst nichts Neues zu Tage förderten, eine leise Ahnung von der Möglichkeit einer Mittheilung von Elektricität zwischen verschiedenen Körpern erlangt. Bei seinen Versuchen mit Glasröhren und Flaumenfedern, die zur Bequemlichkeit an dünnen Stäben befestigt waren, habe er, so schreibt er damals, oft bemerkt, dass die Fibern der Feder, wenn sie nach anfänglichem Anziehen durch die Glasröhre von derselben wieder abgestossen wurden, dann zu dem Stab sich hinbogen, als ob dieser elektrisch geworden oder als ob dem Stab oder auch der Feder Elektricität mitgetheilt worden sei.[1]) Er habe dann versucht die Feder selbst durch leises Reiben elektrisch zu machen und dabei auch vollen Erfolg gehabt.

Weiter aber kommt er hier nicht; zehn Jahre später dagegen knüpft er direkt an Hawksbee's Beobachtungen von dem Uebergange der

1) Phil. Trans., no. 366, p. 104; Sept. 1720, auch Phil. Trans. abridg., vol. VI, pt. II, p. 4: as if it had been an electric body, or as if there had been some electricity communicated to the stick or feather.



elektrischen Lichter zwischen verschiedenen Körpern an und constatirt dann glücklich die Bewegung der Elektricität in geeigneten Stoffen durch direkte Versuche. Er habe, so sagt er in einer ersten Abhandlung vom Januar 1731[1]), zunächst einige Versuche mit Metallen gemacht, um zu erkunden, ob nicht auch diese auf irgend eine Weise, durch Reiben, Hämmern oder Erhitzen, elektrisch werden könnten, doch ohne allen Erfolg. Danach habe er wieder zur Glasröhre gegriffen, um mit Hilfe dieser Neues zu entdecken. Ihm sei nämlich eine Idee, die er schon einige Jahre vorher gehabt, wieder in den Sinn gekommen, ob denn nicht die geriebene Glasröhre, ebenso wie Licht, den Körpern auch Elektricität mittheilen könne, wenn er auch damals nicht geahnt habe, dass die Anziehung der Röhre auf so weite Entfernungen so stark wirken könne, wie sich das nachher wirklich gezeigt. Gray ging dann in der Prüfung dieser Idee mit aller Sorgsamkeit zu Werke. Er nahm zum Elektrisiren eine Glasröhre von 3 Fuss 5 Zoll Länge und ungefähr $1^2/_{10}$ Zoll Durchmesser, die er zum Abhalten des Staubes an beiden Enden durch Korke verschloss, und untersuchte zuerst, ob dieser Verschluss irgend einen Einfluss auf die Elektrisation der Röhre habe. Im Verhalten der Röhre konnte er dabei, ob sie offen oder geschlossen, keinen Unterschied finden; dagegen bemerkte er zu seinem grossen Erstaunen, dass beim Reiben der Körper nicht bloss diese, sondern auch die Korke die Probefedern angezogen und dass also den Korken Elektricität mitgetheilt werden musste.[2]) Zur weiteren Prüfung dieser Idee steckte er in den Kork an dem einen Ende nach der Reihe dünne Stäbchen von vier, dann acht und endlich zwanzig Zoll Länge, an welche vermittelst dünner Baumwollenfäden eine Elfenbeinkugel gehängt wurde, auch ersetzte er die Stäbchen durch Drähte aus verschiedenen Metallen und fand immer, dass mit dem Reiben der Glasröhre auch die Elfenbeinkugel die Fähigkeit des Anziehens und Abstossens erlangte. Damit hielt er die Fortpflanzungsfähigkeit der Elektricität in Körpern für erwiesen und ging dann dazu über die verschiedenen Stoffe in der angegebenen Weise auf ihre Leitungsfähigkeit für Elektricität systematisch zu prüfen. Dabei entdeckte er nicht bloss sehr bald das Verfahren einen leitenden Körper in nichtleitenden Schnüren isolirt aufzuhängen, sondern konnte auch auf diese Weise sehr leicht den thierischen und sogar den menschlichen Körper als leitend nachweisen und Elektricität in denselben aufsammeln. Er legte einen Knaben von acht bis neun Jahren horizontal auf isolirende

1) Phil. Trans., no. 417, p. 18; Phil. Trans. abr., vol. VI, pt. II, p. 5.

2) „I was much surprized, and concluded that there was certainly an electric virtue communicated to it by the excited tube.“ Nach Gray's eigener Datirung stammen diese Arbeiten noch aus dem Anfange des Jahres 1729.

Seile und berührte die Füsse desselben mit der geriebenen Glasröhre; dann zog der Kopf des Knaben sogleich leichte Gegenstände, die auf einem Tischchen in seiner Nähe lagen, an, und vielfach variirte Versuche ergaben immer entsprechende Resultate.

Diese Thatsache, dass auch der menschliche Körper ohne jede Unbequemlichkeit die geheimnissvolle Kraft der Elektricität aufnehmen könne, erregte allgemeines Aufsehen[1]); doch wurde dieses sogleich durch weitere Ueberraschungen noch übertroffen, und damit eigentlich erst erlangte die Elektricität als wissenschaftliches Object die allgemeine Anerkennung. Die Versuche Gray's wurden überall, besonders auch in Frankreich, sogleich wiederholt. Der Aufseher der königlichen Gärten, Charles du Fay in Paris, legte sich selbst, weil er den Knaben etwaigen unvorhersehbaren Fährlichkeiten nicht aussetzen wollte, in die isolirenden Schnüre, oder setzte sich auch auf ein Brett, das über diese Schnüre gelegt war, und liess sich so mit einem langen Glasstabe die Fähigkeit elektrischer Anziehungen mittheilen. Als dann einer seiner Gehülfeu einmal ein Goldblättchen, das sich zufällig an den Fuss du Fay's angehangen hatte, ahnungslos wegnehmen wollte, hörte er in dem Momente, wo er dem Fusse mit der Hand nahe kam, ein eigenthümliches Knistern dem gleich, welches von dem geriebenen Glasrohr selbst beim Annähern der Hand ausgeht, nur stärker, in dem genäherten Finger aber verspürte er einen kleinen stechenden Schmerz, den ähnlich auch du Fay in denselben Augenblicken an der entsprechenden Stelle des Fusses empfand. Dufay wiederholte den Versuch auch im Dunkeln und fand, was er ausdrücklich für leicht voraussehbar erklärt[2]), dass jedem knackenden oder knisternden Geräusch ein Lichtblitz, also ein Uebergang von Lichtmaterie aus dem elektrischen in den unelektrischen Körper, entsprach.

Dufay hatte damit drei neue Erscheinungen mit einander und der Elektricität verknüpft und diese Verknüpfung sogar für leicht denkbar erklärt, das waren der Lichtblitz, das hörbare Knistern und die stechende Empfindung auf der Haut. Alle drei Erscheinungen wiesen auf einen Uebergang von elektrischer Materie aus einem Körper in den

---

1) Prof. Bose sagt in seinem Lehrgedicht „Die Elektricität" S. V:
„Verwegener Brite Gray, kennst Du genug die Kraft
Von der unglaublichen und neuen Wissenschaft?
Und darfst Du Dich also, Verwegner, unterwinden,
Dein Elektricität mit Menschen zu verbinden."

2) Uebersetzung der Abhandlung Du Fay's in den Phil. Trans. no. 431, p. 258. Phil. Trans. abr., vol. VIII, p. 395: „And in the Dark, these Snappings are, as may be easily imagined, so many Sparks of Fire."

andern hin und mussten nothwendig zu dem Begriff der elektrischen Entladung führen. Dufay selbst aber verfolgte diesen Weg nicht weiter. Er beobachtete zwar, dass man aus dem elektrisirten menschlichen Körper ebenso wie durch einen andern organischen Körper Funken durch Metalle, aber nicht durch Wolle etc., also doch wohl nur durch Leiter, ziehen könne; aber er hielt doch an einer mechanischen Anschauung hier nicht fest, denn er meinte, dass man die Funken nur aus lebendigen Körpern erhalten könne und dass todte organische Körper keine Lichtblitze, sondern nur ein mattes Glimmlicht bei der Elektrisation geben könnten. Dagegen verfolgte nun Gray nach dem Bekanntwerden diese Richtung der Versuche direkt weiter, und ihm ist danach der Nachweis der elektrischen Ladung und Entladung voll und ganz, wenn wir den beliebten Ausdruck gebrauchen wollen, zuzuschreiben.

Bisher hatte man einzig und allein Nichtleiter durch Reiben elektrisch gemacht, die ihre Elektricität nur allmählich abgaben; Gray aber zeigte nun an Leitern experimentell, dass mit dem Herausbrechen von Licht aus elektrisirten Körpern auch immer die Elektricität derselben ganz oder zum Theil schwindet. Dufay hatte wohl aus dem Ueberspringen des Lichts auch auf den Fortgang von elektrischen Materien geschlossen; Gray aber wies nun die Erschöpfung des elektrischen Körpers bei der Mittheilung an andere experimentell nach.[1]) Er hing dazu seinen Knaben wie gewöhnlich in Seidenschnüren auf und elektrisirte denselben mit dem geriebenen Glasstabe. Auf die eine Seite des Knaben stellte sich dann ein Herr mit einem Pendelfaden in der Hand, mit welchem er den elektrischen Zustand des Knaben untersuchte, und der also als Elektroskop diente. Auf der anderen Seite des Knaben stellte sich auf eine Harzplatte ein andrer Herr, der als zweiter Conduktor gebraucht wurde. Liess man dann den Knaben seine Hand der des isolirten Herrn so weit nähern, sodass ein Funke zwischen beiden übersprang, so war mit dem Fadenpendel eine Verminderung der Elektricität des Knaben, ebenso wie ein Elektrischwerden des isolirten Mannes sicher zu constatiren, und nach drei- bis viermaligem Ueberschlagen von Funken zwischen den beiden zeigte sich alle Elektricität von dem Knaben auf den isolirten Mann übergegangen, sogar ohne dass die beiden sich direkt berührt hätten. Auf ganz dieselbe Weise konnte Gray auch die Elektricität des Knaben auf drei und mehr isolirte Personen, die sich die Hände gereicht hatten, gleichmässig vertheilen.

Trotz aller Schwierigkeiten, welche die Ausbildung des Begriffs der

1) Phil. Trans. no. 439, p. 166, June 12, 1735; Phil. Trans. abr., vol. VIII, pt. II, p. 401.



elektrischen Entladungserscheinungen den Physikern gemacht hatte und noch längere Zeit machte, konnte man diesem Begriffe theoretisch doch leicht ohne zu grosse Umwälzung der alten Vorstellungen gerecht werden. Unter dem Einflusse der Newtonschen Schule hatte sich die Meinung ausgebildet, dass alle besonderen physikalischen Kräfte an besondere Materien, wie die allgemeine Attraction an die ponderable Materie, die Leuchtkraft an den Lichtstoff u. s. w. gebunden wären. Diese Ansicht liess sich nun leicht auch bei den elektrischen Erscheinungen entsprechen, wenn man nur die bisher angenommenen wirbelnden elektrischen Ausflüsse aus den elektrischen Körpern nicht wieder in diese zurückkehren, sondern von ihnen frei auf andere unelektrische Körper übergehen liess. Freilich durfte man dann diese elektrische Materie nicht mehr als besonders an einzelne Körper gebunden ansehen, sondern musste sie als eine neue physikalische Materie, gleichberechtigt und unabhängig, wie Licht und Wärme etc. anerkennen. Aber das entsprach auch vollständig den damaligen Anschauungen; und als man nach den Erfindungen der Elektrisirmaschine und der Verstärkungsflasche die Entladungserscheinungen immer mächtiger hervorrufen lernte, zweifelte niemand mehr an der Existenz des neuen imponderablen Stoffs, der Elektricität. Dieser Stoff hatte als Grundeigenthümlichkeit die Kräfte der elektrischen Anziehungen und Abstossungen, vermochte aber bei starken Entladungserscheinungen auch die andern imponderablen Materien mit sich zu bewegen und in Erregung zu bringen. Dass das Herausströmen der Elektricität aus einem Körper in einen andern sich dem Gefühl in verschiedener Weise als Druck, Schlag, Wind, Geruch u. s. w. bemerkbar machen musste, war leicht erklärlich; und dass, wenn die Entladung besonders heftig, die Wärme oder Feuermaterie u. a. mit ausgetrieben und in Action gesetzt werden konnten, war an sich wahrscheinlich. Die merkwürdige Thatsache aber, dass durch Reiben die Körper einmal vorwiegend elektrisch, ein andres Mal vorwiegend erwärmt würden, führte man auf die verschiedene Natur der geriebenen Stoffe, wie die besonderen Arten des Reibens, zurück; und Professor Bose kam sogar zu der ganz modernen Erkenntniss, dass immer Wärme und Elektricität gleichzeitig entwickelt würden, nur dass dabei die Mengen derselben in umgekehrten Verhältnissen stünden.

So zeigten sich die Entladungserscheinungen der Elektricität von ebenso grosser theoretischer wie praktischer Wichtigkeit für die weitere Fortbildung der elektrischen Disciplinen. Welchen Enthusiasmus dieselben, besonders die Funkenentladungen aus menschlichen Körpern, auch in sonst nüchternen wissenschaftlichen Kreisen hervorriefen, ersieht man deutlich aus der folgenden Beschreibung von der Elektrisation eines jungen Mädchens,

die der gelehrte Prof. Bose in seinem Lehrgedichte „Die Elektricität" vom Jahre 1744 giebt[1]):

„Ein Engel, dessen Blick sofort das Herze raubt,
Wenn seine Schönheit nur das blosse Seh'n erlaubt,
Und der, wofern das Glück sich noch Verdienste achte
Zum allerwenigstens noch Kronen glücklich machte.
Des Taille Venus gleicht, wo auf den Lippen Gluth,
Und Ros' und Lilie auf keuschen Wangen ruht.
In dessen Augenblau die helle Sonne blickt
Und was die sammtne Hand berührt auch gleich entzückt.
Des weisser Schwanenhals selbst Stoens Härte droht
Und wo der Philosoph erstarrt, wird blass und roth, — —
Der unschuldsvolle Schnee der blutgekrönten Brüste,
Der schönsten Menschlichkeit ein ewig Prunkgerüste.
Ein solch bezauberndes, anbetungswürdges Kind
Wird elektrificirt so schnell als wie der Wind,
Und stetig wird hierdurch mein wunderbares Feuer
Viel Millionen mal so edel, werth und theuer.
Berührt ein Sterblicher etwa mit seiner Hand
Von solchem Götter-Kind auch sonst nur das Gewand,
So brennt der Funken gleich und das durch alle Glieder.
So schmerzhaft als es that, versucht er's dennoch wieder,
Berührt, halbzitternd noch, den Alabaster-Arm.
Von weitem fühlt er schon, hier werd ihm bang und warm.
Und kommt er näher hin, gleich senkt die helle Flamme:
Er findet, dass ihn die zur Sklaverei verdamme.
Doch nicht nur durchs Gewand, durch den geschnürten Leib,
Wirkt dieser Funken durch. Ich rathe, Werther, bleib,
Noch ist es Zeit, zurück. Es noch einmal zu wagen
Wird ohne Hülf' und Rath Dich in die Ketten schlagen.
Vom stolzen Fischbeinrock ist hier der tiefste Reif.
Hast Du noch so viel Herz? So wag' es. Aber greif'
Gar sehr behutsam dran. Er sticht. Was ist es Wunder,
Wofern du Feuer fängst, indem du wie von Zunder.
Ein ausser einzig mal versucht' ich es und nahm
Der Venus einen Kuss. Doch Himmel, wie bekam
Mir solcher Frevel-Muth. Es schien ein schmerzhaft Stechen
Verdrehte fast den Mund, die Zähne wollten brechen."

Solchem Enthusiasmus gegenüber erscheint die etwas sarkastische Bemerkung, die der um die Erforschung der elektrischen Entladungserscheinungen ebenfalls sehr verdiente Benedictinermönch Gordon in

1) Die Elektricität nach ihrer Entdeckung und Fortgang mit Poetischer Feder entworfen von G. M. Bose. (Die Widmung ist datirt von Wittenberg, den 20. Juli 1744.) S. XXIX.

Erfurt an diese Art der Versuche knüpft, nicht ungerechtfertigt. „Dergleichen Licht, sagt er in einem 1745 erschienenen Buche[1]), zeigt sich an den Kleidern eines elektrischen Menschen, auch an denen vom Leibe entferntesten Theilen derselbigen. Dieses kann man sehr wohl und ohne die geringste Verletzung der Ehrbarkeit an einem elektrisirten Reifrock zeigen. Doch diese Versuche will ich gern andern überlassen, bei denen es für eine anständige Höflichkeit angesehen wird, wenn sie dem schönen Geschlecht zu gefallen suchen. Ich habe fast das Nämliche mit meinem Mantel (Benedictinerkutte) gezeigt.“

Die rein materielle Auffassung der Entladungserscheinungen, als eines wirklichen Ueberganges von Materie aus einem Körper in den andern, hatte den Vortheil, dass man leicht die Erregung auch anderer feiner Materien durch die strömende Elektricität erklären konnte, verführte aber andererseits auch dazu den Zusammenhang der imponderablen und ponderablen Materien zu weit zu fassen und auf Zusammenhänge zu schliessen, wo die Erfahrung bald das Nichtvorhandensein derselben mit aller Deutlichkeit zeigte.

Ein charakteristisches Beispiel für solch eine verfehlte Idee, die sich übrigens trotz aller Fehlschläge noch immer von Zeit zu Zeit wiederholt, können hierfür angeführt werden. Der Venetianer Pivati hatte in der Mitte der vierziger Jahre, geleitet von dem Gedanken einer Transportation ponderabler Materie durch das elektrische Imponderabile, peruanischen Balsam in einen gläsernen Cylinder gebracht, den Cylinder sorgfältig verschlossen und hierauf stark elektrisirt. Wann dann die Cylinder in die Nähe von andern Personen gebracht wurden, so bemerkten diese den Geruch des Balsams, ohne dass die Cylinder geöffnet wurden, und wer mit den Cylindern in Berührung gekommen, duftete noch längere Zeit nach dem Balsam. Diese Versuche griff Professor Winkler in Leipzig mit Eifer auf. Er füllte eine Glaskugel mit Schwefel und verstopfte sie so fest, dass man keinen Schwefelgeruch bemerkte, selbst wenn der Schwefel geschmolzen wurde. Als dann Winkler die Kugel elektrisirte, wurde der Geruch so heftig, dass ein Freund Winkler's, Professor Hauboldt, durch den Schwefelgeruch vertrieben wurde. Mit peruanischem Balsam aber gelangen die Experimente so gut, dass Winkler vermittelst eines langen Drahtes durch die Entladung einer Verstärkungsflasche den Balsamgeruch aus einem Zimmer in ein anderes gewissermassen telegraphiren konnte. Leider verschwand mit dem ersten

1) Versuch einer Erklärung der Elektricität, herausgegeben von Andreas Gordon, Prof. der Philosophie Erfurt. (Die Widmung ist datirt Erfurt, April, den 17., 1745.) S. 46.

Enthusiasmus auch die Geruchsempfindung und weitere Versuche gaben keinerlei Bestätigung dieser Geruchsübertragung durch den elektrischen Strom. Pivati hatte gehofft, seine Idee werde sich auch medecinisch nützlich erweisen und man werde nach ihr die Medicamente vermittelst des elektrischen Fluidums besonders schnell und besonders kräftig in den kranken Körper einführen können. Schon ein paar Jahre vor ihm aber hatte ein deutscher Arzt, Kratzenstein, dieselbe Idee nur in entgegengesetzter Richtung verwenden wollen, indem er vorschlug, die Ausscheidung der Krankheitsstoffe aus dem kranken, menschlichen Körper mit Hilfe elektrischer Entladungen zu bewirken. In einer Abhandlung über den Nutzen der Elektricität in der Arzneiwissenschaft von 1745[1]) sagt er darüber ganz bestimmt: „Nach unserm Stahlianischen Lehrgebäude ist die Vollblütigkeit die Mutter der mehresten Krankheiten. Wenn man dieselbe vermindern will, so muss man das überflüssige Blut durch den Schweiss oder Aderlassen herausjagen. Jenes ist am mehrsten beschwerlich, und dieses fürchterlich. Beides aber kann man durch die Elektrification überhoben werden. Durch diese werden eine grosse Menge schwefliger und salziger Theilchen aus unserm Körper herausgetrieben. Weil nun das Blut meistens aus schwefligen Theilchen, welche mit einem alkalischen Salze vermischt sind, besteht, so muss auch die Menge des Blutes nothwendig durch die Elektrification vermindert werden. .... Man kann also die Elektrification anstatt der Motionsmaschinen gebrauchen, indem man ebenden Nutzen dabei erhält, und diese mehr Incommodidät mit sich führen. Man wird auch in der That durch die Elektrification müde gemacht; es ist einem eben, als wenn man eine grosse Arbeit gethan hätte und man kann überaus wohl danach schlafen. ... Es wird also nicht allein bei physicalischen, sondern auch bei moralischen Patienten gute Dienste thun, denen ihr Reichthum, Sorgen und Bekümmerniss die Augen des Nachts nicht zufallen lassen. Weil auch das Blut durch die geschwindere Circulation flüssiger und dünner gemacht wird, so muss auch die Elektrification wider die Dickblütigkeit und das jetzt so gemeine Malum hypochondriacum, bei einem Frauenzimmer aber wider die hysterischen Beschwerden ein fürtreffliches Mittel abgeben."

Trotz dieser so enthusiastischen und sichern Worte aber wollte sich in Wirklichkeit eine Ausscheidung schädlicher Stoffe aus dem menschlichen Körper ebenso wenig als eine Einführung von Medicamenten in denselben durch die elektrischen Entladungen der Elektrisirmaschine oder der Ver-

---

1) Abhandlung über den Nutzen der Elektricität in der Arzneiwissenschaft von Christian Gottlieb Kratzenstein. 2. Auflage. Halle 1745.

stärkungsflasche constatiren lassen. Der Praktiker Franklin fertigte schon im Jahre 1749[1]) diese Pläne fürs Erste mit der sehr drastischen Bemerkung ab, dass er versuchsweise den Entladungsstrom einer Leydener Flasche mehreremals erst durch eine stark purgirende Flüssigkeit und dann durch seinen Körper geleitet, aber niemals auch nur die geringste medicinische Wirkung von demselben verspürt habe.

1) Des Herrn Benj. Franklins Briefe von der Elektricität. Uebersetzt von J. C. Wilcke. Leipzig 1758. S. 113.

# ZUR GESCHICHTE UND PHILOSOPHIE DER DIFFERENTIALRECHNUNG.

---

VORTRAG,

GEHALTEN

AUF DER NATURFORSCHER-VERSAMMLUNG ZU FRANKFURT IN DER SECTION FÜR MATH.-NATURW. UNTERRICHT.

VON

DR. **MAX SIMON,**

PROF. AM KAISERL. LYCEUM ZU STRASSBURG I. E.

Eine Geschichte der Infinitesimalrechnung hat mit den Pythagoräern zu beginnen, welche in der irrationalen Zahl einem unbegrenzt fortsetzbaren Process einen Abschluss gaben. Einen Markstein bildet der Eleat Zeno, der in den bekannten Beispielen des fliegenden Pfeiles und Achilleus mit der Schildkröte die Schwierigkeit des Continuitätsbegriffes aufdeckte. Z. wies auch zuerst auf den Widerspruch hin: das Continuum aus seinen (ihm gleichartigen) kleinsten Theilen zusammenzusetzen, denn entweder haben die Theile keine Grösse, dann hat ihre Summe auch keine Grösse; oder sie haben Grösse, dann giebt ihre unendliche Wiederholung eine unendliche Grösse. Erst Aristoteles gab für die Paradoxien eine zufriedenstellende Erklärung, bei ihm findet sich auch eine wirkliche Definition des Continuums: „Stetig sei ein Ding, wenn die Grenze eines jeden zweier nächstfolgenden Theile, an welcher sich diese Theile berühren, eine und dieselbe wird". Die Paradoxien aber widerlegte er mit Hilfe des Mächtigkeitsbegriffes, der hier zuerst auftritt: die Zeit und die Raumstrecke sind von gleicher Mächtigkeit, d. h. es lässt sich jedem Raumpunkt ein Zeitpunkt eindeutig zuordnen. Im Gegensatz zu den Eleaten kamen Leucipp und Demokrit zu dem Hilfsbegriff, den Physik und Chemie bis heute nicht entbehren können, dem der Atome. Die Fassung, in der der Grenzbegriff hier auftritt, ist zwar an sich fehlerhaft, und von Aristoteles wurde der falsche Grenzbegriff letzter Theil in einer eignen Schrift zurückgewiesen, aber es vollzog sich doch ein wichtiger Fortschritt dadurch, dass die Nothwendigkeit des Abschlusses einer an sich unbegrenzten Vorstellungsreihe anerkannt wurde. In der Schule Platos und mehr noch in der des Eudoxos ist dann die eigentliche Differentialrechnung des Alterthums geschaffen worden in der sogenannten Exhaustionsmethode. Ihr Wesen besteht darin, die zu bestimmende Grenzgrösse, deren Existenz, und dies kann gar nicht genug betont werden, bereits feststeht, — so die der Quadratwurzel aus dem Pythagoras, des Flächeninhalts und Volumens aus der Anschauung, des Schwerpunkts aus der Erfahrung, — in zwei Reihen einzuschliessen, von denen die eine beständig fallend, die andere beständig wachsend sich der Grenze unbeschränkt nähert. Das bekannteste Beispiel ist die Berechnung des Kreises durch die Reihe der ein- und umgeschriebenen Polygone. Die Methode stützt sich auf die bekannte Propos. 1 des X. Buches des Euclid:

Nimmt man von einer Grösse mehr als die Hälfte, von dem Rest wieder mehr als die Hälfte und so fort in infinitum, so wird der Rest zuletzt unendlich klein, d. h. also schon ein Convergenzkriterium eines unendlichen Produktes. Zu Grunde liegt dem Satz das sogenannte Axiom des Archimedes: Wenn zwei Grössen verschieden sind, so kann ihre Differenz, beliebig oft vervielfältigt, zuletzt jede andere Grösse übertreffen. Schon bei Euclid findet sich z. B. der Inhalt der Pyramide im XII. Buch als Grenze der convergenten Reihe $\sum \frac{1}{4^k}$ und Archimedes hat zur Berechnung der Schwerpunkte, Flächen und Volumina, nicht nur integrirt, sondern er hat auch die Integrale gegeben, an die die Integralrechnung Kepler's, Cavalieri's und besonders Fermat's und Wallis' angeknüpft hat: $\int x dx$ und $\int x^2 dx$; er kennt bereits Sätze wie: $\int (f + \varphi) dx = \int f dx + \int \varphi dx$, er kennt Integration durch Substitution, er hat durch Differentiation die Tangente an seine Spirale gefunden, deren Gleichung in Polarcoordinaten ihm wohl bekannt war. Sehr wahr hebt Zeuthen hervor, dass die Beweise, welche Euclid, Archimedes, Pappus etc. geben, an sich durchaus nicht abschreckender sind, als sie es in denjenigen unserer Lehrbücher sind, welche die Sätze über Grenzen etc. streng begründen wollen, nur dass die Alten in jedem einzelnen Falle die Begründung immer wieder aufs Neue durchführten. Man muss nach den Arbeiten Z. und C. es als feststehende Thatsache hinnehmen, dass die Alten in der Exhaustionsmethode bereits einen feststehenden Algorithmus der Differentialrechnung hatten. Noch Pappus, den Cantor an das Ende des 3. Saecul. nach Chr. setzt, handhabt die Integrationsmethode des Archimedes mit vollem Verständniss. Sieht man ab von der Ausbildung, welche die Scholastiker, vom theologischen Gedankenkreis ausgehend, dem Begriffe des Unendlichen gaben, besonders von Nicolaus v. Cusa, der, wie es scheint, in der Auffassung des Grenzbegriffes sich sehr dem heutigen Standpunkt nähert, so erheben sich zur selbstständigen Bedeutung auf dem Gebiet der Integralrechnung im direktesten Anschluss an Archimedes erst wieder Kepler und Galilei. G's. Leistung ist bei C. wenig gewürdigt.[1]) Wie alle Physiker geht er vom Atom aus, aber mit vollster Schärfe spricht er sich über den Differentialcharakter desselben aus. „Nicht 2, nicht 10, nicht 100, nicht 1000 „indivisibilia“ können das Continuum bilden, sed bene infinita, d. h. wahrhaft unendlich viel.“ Und er sagt ferner: „Die Auflösung der Linie in ihre unendlich vielen „Punkte“ — es ist dies derselbe Begriff des Punktes, der sich bei Bolzano in den Paradoxien des Unendlichen wiederfindet — bietet nicht mehr Schwierigkeit als ihre Theilung in eine endliche Anzahl Theile unter Einer Bedingung, dass man

1) Vgl. H. Cohen, Das Princip der Infinitesimalmethode.

nicht von ihm fordere, diese Punkte von einander zu trennen, und sie hier auf dem Papier einzeln zu zeigen." Auch diese Stelle hat ihre Analogie bei Bolzano. „Und weil diese Theile unendlich viele sind, so sind sie non quantae, haben keine Grösse, denn, wie Zeno, eine unendliche Anzahl von Quantitäten giebt ein unendliches Quantum. Also gerade weil die Theilung des Continuums in's Unendliche fortgesetzt werden kann, folgt die Nothwendigkeit der Zusammensetzung aus partes non quantae, aus Theilen ohne Grösse. Wie G. dann Geschwindigkeit und Beschleunigung mittelst der Differentialrechnung definirt, ist bekannt. Man sieht, er ist der wahre Vorgänger Bolzano's, er weiss wie jener, dass die Indivisibilität eine Denknothwendigkeit bildet, und wie Bolzano weiss er auch, dass die Unmöglichkeit, die Punkte einzeln abzuzählen, mit ihrer Gesammtvorstellung als Continuum gar nichts zu thun hat. Erwähnt sei noch die vielleicht merkwürdigste Aeusserung Galilei's: „Wenn irgend eine Zahl (Grösse) unendlich genannt werden kann, so ist es die Einheit", und er schliesst: „ausser der Einheit giebt es keine unendliche Zahl". Hierin liegt eigentlich alles, was über das Messen von Helmholtz, Klein u. A. neuerdings gesagt ist. Knüpft Galilei an die Mechanik des Archimedes an, so Kepler in seiner „Stereometria doliorum" an die Inhaltsbestimmungen; Kepler hat, wie Lacroix hervorgehoben, zuerst von den Neueren das Integriren wieder aufgenommen, und C. nennt die Doliometrie die Quelle aller späteren Kubaturen. Der 2. Abschnitt ist fast ganz von Maximumsaufgaben angefüllt, in denen K. von dem Nachweis ausgeht, dass die in Oesterreich gebräuchliche Form der Fässer zugleich die zweckmässigste sei. Er spricht zuerst die kennzeichnende Eigenschaft der extremen Werthe klar aus, dass in ihrer Nähe die Veränderung der Funktion zu Null werde (Montucla) K. und G. haben dann auf Cavalieri eingewirkt, den man als direkten Vorläufer Barrow's, Newton's und Leibniz' ansehen muss; die „geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota" erschien 1635, in zweiter verbesserter Auflage 1653. K. hatte seine Methode, die im Grunde mit der von Cavalieri sich deckt, und die darin besteht, die unendliche Anzahl der partes minutissimae der Körper, welche einfacheren Charakter zeigen als die zu bestimmenden Körper selbst, zu addiren nicht ausdrücklich angegeben, wie dies Cav. thut. Cantor scheint sich Marie anzuschliessen, welcher sagt: Das Werk verdiene den Preis der Dunkelheit, aber doch nur für Jemanden, dem Galileis Begriff des „Punktes" oder „indivisibile" nicht geläufig ist. So hat sich der Wahn bilden können, Cav. habe den Körper aus Flächen, die Fläche aus Linien zusammengesetzt. Und doch sagt Cav. ausdrücklich, dass er auf seine Methode, die Körper, bez. die Fläche als Gesammtheit „omnia" (planorum bez. linearum) aufzu-



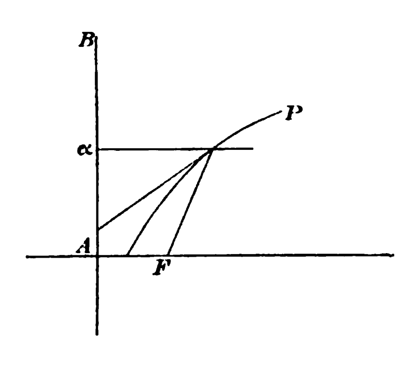
fassen, gekommen sei, als er bei Rotationskörpern erkannt, dass das Verhältniss des Erzeugten von dem des Erzeugenden völlig verschieden sei, so dass es falsch wäre, z. B. den Cylinder aus unzähligen durch die Axe gehenden Parallelogrammen veluti compactum bestehend zu denken. Die Anlehnung an Galilei ist ganz deutlich ausgedrückt in der berühmten Stelle, wo er die einzelne Schicht als Spur der continuirlich gleichmässig vom Grund zur Deckfläche fliessenden Ebene bezeichnet. Diese Spur ist der Galileische pars non quanta, das Differential des Raumes erzeugt in dem pars non quanta der Zeit. Newton und Leibniz haben Cav. richtig verstanden; aus dem Manuscript Leibniz' vom 26. Oct. 1675 (Gerhardt, die Entdeckung der höheren Analysis), wo das $\int$ zuerst vorkommt, sehen wir, dass der Integralbegriff L.'s direkt aus den „omnia" Cav.'s hervorgegangen ist. Da Cav. sich des Widerspruchs bewusst war, den seine „compositio continui ex indivisibilibus" finden würde (derselbe Ausdruck findet sich wiederholt und als Citat bei Leibniz wieder), so giebt er als Satz 1 des VII. Buches, das noch heute nach ihm genannte, im Unterricht der Mittelschulen fast unentbehrliche Princip: Körper, bez. Flächen sind gleich, wenn in gleicher Höhe durch parallele Ebenen geführte Schnitte gleich sind. Cav. wirkte zunächst auf Descartes, der das 3. constituirende Motiv für die Differentialrechnung in Fluss gebracht hat, das Tangentenproblem. Seine Methode ist allerdings rein algebraisch und wird noch heute in den Elementarlehrbüchern der analytischen Geometrie meistens bevorzugt; der differentiale Kern ist implicite darin, dass die Coordinaten der Schnittpunkte gleich werden. Auch hat Descartes bei Gelegenheit der Construktion der Tangente an die Cycloide (Galilei 1590) das Grundgesetz der Kinematik schon benutzt. Um so bewusster bediente sich Frankreichs grösster Mathematiker infinitesimaler Betrachtungen. Es war stets bekannt, dass Fermat zuerst geläufig differentirt habe, Cantor und Zeuthen (1. Heft der Kopenh. Akad. Berichte von 1895) haben hervorgehoben, in welchem Umfang F. bereits integrirt hat. Zeuthen sagt, dass F. zuerst die Parabeln beliebig hoher Grade integrirt habe. Es ist sehr schwer bei der Scheu F.'s vor Publikation durch den Druck Prioritätsfragen über ihn zu entscheiden. Z. weist nach, dass F. 1636 $\int x^n dx$ gehabt, Cavalieri hat die Quadratur schon 1639 gedruckt und giebt an, dass er sie 1615 gefunden; den Beweis hat er aber nur bis $n = 4$ gekannt. Das Continuitätsgesetz, das Leibniz als seine „grösste Entdeckung" immer wieder betont und das in der That die Begründung seines „infiniment petit" enthält, hat F. in vollem Umfang besessen, wie übrigens Galilei und Newton auch. Den Beweis liefert F.'s Methode für Maxima und Minima und Tangentenconstruktion. Als 1. Beispiel wählt F. die älteste bekannte Maximalaufgabe Euclid VI, 27:

$A(B-A)$. F. setzt $x=A$ und $x=A+E$ und die beiden Werthe gleich: $A(B-A)=(A+E)(B-A-E)$, woraus, wenn $E^2$ gegen $E$ vernachlässigt wird, bezw. $E$ nach Division der Gleichung mit $E$ gleich 0 gesetzt wird, $A=\frac{1}{2}B$ folgt, d. h. also, F. setzte $f'(x)=0$. Die Fassung, in der die Methode in den Schulen noch heute sehr gebräuchlich ist, gab Huygens. Die Tangentenmethode ist ganz analog. F. hat den Zusammenhang mit dem Maximalproblem erkannt und ausgesprochen. Sei $M$ ein Curvenpunkt zur Abscisse $D$, sei $PT$ die Subtangente $A$, $dx=E$, $F(xy)$ die Curvengleichung ihre „proprietas specifica", $M'$ der Punkt, der zu $x+dx-(D+E)-$ gehört, so kann $M'$ auch als auf der Tangente $MT$ liegend angesehen werden, so dass $TMP \sim T'M'P'$, d. h. also, er bestimmte wie wir $A=y/f'(x)$. Die Methode ist ganz die heutige. Der Schritt zum charakteristischen Dreieck Barrow's und Leibniz' ein sehr kleiner. F. hat schon Rectifikationen auf Quadraturen zurückgeführt und bei einer Schwerpunktsbestimmung die Integration durch Differentiation ersetzt. Er war, was besonders zu betonen ist, schon zu einem ganz bestimmten Algorithmus gelangt, der ihn auch vor Irrationalitäten nicht im Stich liess, immer wird $dx$ mit $E$, die Subtangente mit $A$, die Ordinate $B$, die Abscisse $D$ genannt. Seine Bezeichnung schliesst an Vieta an, der bis Pascal incl. für die französischen Mathematiker darin massgebend war. F. hatte auch bereits in ähnlicher Weise wie später Riemann den Begriff des bestimmten Integrals erfasst bei der Berechnung von $\int x^{\frac{p}{q}} dx$. Hier ist Grenzübergang, hier ist Bestimmung des Werthes $^0/_0$, hier ist völliges Bewusstsein des Continuitätsgesetzes, das ganz allein das Heben mit $1-\beta$ rechtfertigt. Zahlreiche Anwendungen macht er von der Integration durch Substitution und ebenso benutzt er die theilweise Integration in der natürlichen Form von Vertauschung der Coordinatenaxen.

Was Zeuthen im 2. Heft der Kopenh. Berichte von 1895 als das Hauptverdienst Newton's hervorhebt, dass N. den Zusammenhang aller grossen Probleme erkannt habe, welche zusammen die Differentialrechnung erzeugten, das gilt, wie schon C. andeutet, gewiss auch von F. Um dieselbe Zeit, etwa um 1641, jedenfalls, wie C. bewiesen, nicht vor April 1639, fand Roberval und vielleicht noch früher Toricelli, die dynamische Tangentenmethode. Sie betrachten die Tangente als die Diagonale der die Curve erzeugenden Kraft; wieder eine Vorstufe für Barrow und Newton. Als Beispiel diene die Tangente an die Parabel. Sei (Fig. auf S. 120) $F$ der Focus, $BA$ die Leitlinie; da $P\alpha$ und $PF$ gleich, so wird die Curve dadurch erzeugt, dass gleiche Kräfte in $P$ nach $\alpha$ und $F$ wirken, also ist die Tangente als Diagonale des Kräfteparallelogrammes die Winkelhalbirende von $\alpha PF$.

Ebenso einfach ist die Construktion der Tangente an die Cycloide. Die Unabhängigkeit Toricelli's von Roberval ist durch C. unwiderruflich nachgewiesen. Zu erwähnen ist auch Gregorius a St. Vincentio, dessen opus geometricum 1647 Kubaturen mittelst des Ductus (d. h. Multiplication in der Sprache Vieta's) plani in planum ausführt, ebenfalls eine Art Integration. Die unmittelbarsten Vorgänger von Newton und Leibniz sind Wallis und Pascal, denn auf Barrow's lectiones opticae et geometricae 1669 hat schon N. selbst Einfluss.

Wallis' Hauptwerk ist die 1655 erschienene arithmetica infinitorum, ihr Inhalt Quadraturen und Kubaturen. Die Methode schliesst an Kepler (der nicht genannt wird) und Cavalieri an, ist aber rein arithmetisch, ein ganz bewusstes Rechnen mit unendlichen Reihen, die event. durch Interpolation hergestellt werden. Dieser Kunstausdruck, der Name hypergeometrische Reihe, das Zeichen $\infty$ für unendlich rühren von W. her. Aus W. hat Newton die Bedeutung der unendlichen Reihe für die Darstellung von Zahlen entnommen. W. gab unabhängig von Fermat $\int x^{\pm n} dx$ und darauf gestützt auch eine Reihe von Integralen irrationaler Integranden. Noch weiter ging Pascal. Max. Marie hebt hervor, dass P. bereits ganz geläufig mit mehrfachen Integralen operirt hat und auch eine Reihe von Integralen trigonometrischer Integranden besass. Das schon von Fermat zur Transformation von Integralen angewandte Mittel: dieselben Körper auf verschiedene Weise in Elementartheile zu zerlegen, sowie die partielle Integration waren Pascal ganz geläufig. Er ging aus von den Binomialcoeffizienten, bezw. den Potenzen der natürlichen Zahlen, deren Zusammenhang mit den Quadra- und Kubaturen damals schon allgemein bekannt war; er bemerkt, was auch für Leibniz (vergl. die historia et origo calculi differ.) wichtig wurde, dass jede folgende Reihe als Integral der vorigen erscheint, und im Zusammenhange damit hat er 1654 das Grundprincip der Differentialrechnung ausgesprochen: In continua quantitate quodlibet quantitates cujusvis generis quantitati superioris generis additas, nihil ei superaddere. Sein Zusatz lässt auch nicht den leisesten Zweifel, dass es sich um den Satz: $u + k du = u$, wenn $k$ endlich, handelt. 1669 erschienen dann Barrow's lectiones etc. und da tritt schon Newton auf. Die Zeit von 1615—1668 ist nach C. das Zeitalter der Erfindung der Infinitesimalrechnung. Die genaue Kenntniss Leonardo da Vinci's wird die untere Grenze wohl bis 1600 herabdrücken.



Es sind eine Reihe bestimmter Probleme, deren Zusammenhang allmählig deutlich wird und die ihrer Natur nach infinitesimale Betrachtungen erfordern. Erwähnt sind schon 1) das mechanische Motiv in Dynamik (Geschwindigkeit, Beschleunigung) und Statik (Schwerpunktsbestimmung), 2) die Maximalaufgaben, auf welche schon die quadratischen Gleichungen mit Nothwendigkeit führten, 3) die Körper- und Flächenausmessung, zu der etwa um 1650 die Längenausmessung oder Rectifikation der Kurven kam. Zeuthen hat Recht, wenn er C. gegenüber das Verfahren von Wallis, Fermat, Pascal, van Heuraet als naturgemäss bezeichnet, welche Rectifikation auf Quadraturen zurückführten, obwohl ihnen die Beziehung $ds^2 = dx^2 + dy^2$ nicht entgangen war, denn das hiess damals integriren. Das Problem der Raumbestimmung ist von solchem Einfluss auf die Entwickelung von Integral-Rechnung und -Begriff, dass Cournot nach 1841 diese Rechnung als calcul des quadratures bezeichnet; 4) das Tangentenproblem, dessen Geschichte, wenn man von Apollonius' Construktionen für die Kegelschnitte und der Methode von de Sluse absieht, schon erzählt ist. Letztere ist von Huygens 1693 verbessert, der im Grunde $f'(x)$ als $-d_x f(x, y) : d_y f(x, y)$ bestimmte. Die Relation $f'(x) = dy : dx$ ist (indirekt) von Barrow in den „lectiones" gegeben, so wie sie hier aus dem Dreieck $PP'$ im § 13 abgeleitet ist, dem Dreieck, welches Barrow und Leibniz das charakteristische nennen. Barrow hat zuerst, vielleicht von Roberval beeinflusst, die Continuität des Raumes aus der der Zeit abgeleitet. Die Zeit wird als Unabhängige zur Abscisse, die Geschwindigkeit zur Ordinate, der von der Totalität der Ordinaten erfüllte Raum zum Bild der Bewegung. In enger Verbindung mit Nr. 4 steht als fünftes Problem der Contingenzwinkel (Name von Jordanus), der aber nicht wie heute den Winkel zwischen zwei unendlich nahen Tangenten bedeutet, sondern im Sinne Euclid's den Winkel zwischen der Curve und ihrer Tangente. In der Propos. XVI Buch 3 beweist Euclid, dass die Tangente (linea contingens) sich dichter an den Kreis schmiegt als jede andere Gerade, und dass der Winkel zwischen ihnen kleiner ist als jeder geradlinige Winkel. Der Satz enthält den Keim zur Lehre von Osculation und Krümmung. Ueber die Natur des Winkels erhob sich ein Streit, der namentlich im 16. und 17. Jahrh. äusserst lebhaft wurde und beständig zu Infinitesimalbetrachtungen zwang. Es betheiligten sich die hervorragendsten Mathematiker wie Cardanus, Clavius, Vieta, Wallis; schliesslich drang die Ansicht von Vieta und Wallis durch, dass der Contingenzwinkel $O$, d. h., dass die Curve am Berührungspunkt die Richtung der Tangente hat, aber auch die Argumente des Gegners fanden ihre Würdigung, indem N. und nach ihm L. und Jacob Bernoulli (vorher vielleicht Fermat) als das Vergleich- und Messbare die Krümmung erkannten, sowie den Grad

der Anschmiegung (letzterer bei N. schon in den Principien). Schliesslich muss als Nr. 6 das Auftreten und Häufigerwerden der unendlichen Processe genannt werden, wie sie sich z. B. in den Kettenbrüchen Lord Brounker's und der Arithmetica Wallis' finden und dann von N. geradezu zum Fundament gemacht wurden, das einen immer breiteren Platz einnimmt, so dass die Lehre von den unendlichen Reihen fast identisch mit der Integralrechnung geworden ist. So war die Infinitesimalrechnung von allen Seiten vorbereitet, als N. 1665 und 10 Jahre später L. den letzten Schritt thaten und eine Grammatik schufen zu einer Sprache, welche bereits eine blühende Litteratur hatte. L. selbst sagt mit grösster Deutlichkeit, worin seine Leistung bestand; „sie ermöglichte der Mittelmässigkeit, die Probleme anzugreifen, welche bis dahin nur den Hochbegabten zugänglich gewesen wie die Tangentenprobleme, die der Mechanik und die Quadraturen". Uebrigens gilt dasselbe von allen grossen Fortschritten in der Methode. Was N. betrifft, so ist eine Würdigung seiner Leistungen dadurch sehr erschwert, dass keine einzige rein mathematische Schrift von ihm selbst veröffentlicht ist, und dass in Folge des erbitterten Streites zwischen N. und L., bezw. ihren Anhängern sowohl die englischen als die deutschen Quellen mit Vorsicht zu gebrauchen sind; selbst C. gegenüber hat Z. (II. Heft der Kopenh. Berichte von 1895) in vielen Punkten Recht. N. selbst hat als seine grösste Entdeckung die Binomialreihe, d. h. die Erweiterung des Binoms auf beliebige (reelle) Exponenten angesehen und sie ziert mit vollem Recht sein Grabmal. Sie findet sich in dem Manuscript: „De analysi per aequationes numero terminorum infinitas", das 1665 entstanden und 1669 Barrow und Collins vorlag, der eine Abschrift nahm, welche L., wenn nicht schon 1673, dann jedenfalls 1676 excerpirte; völlig gedruckt ist das Werk erst 1711, sein wesentlicher Theil macht unter dem Titel: „De quadratura curvarum" einen Anhang der Optik von 1704 aus. Von 1665 also datirt die moderne Mathematik, nicht so sehr, dass N. den Zusammenhang der Quellprobleme als der Erste einsah, wie Z. sagt, sondern dass er die unendliche convergente Potenzreihe als fundamentales Entwickelungsinstrument der Zahlgrössen erkannte, ist sein Hauptverdienst. Wie die Binomialreihe durch Interpolation gefunden wurde, hat N. selbst in dem berühmten 2. Brief an L. vom 24. Oct. 1676 erzählt, die Analysis enthielt auch die Reihe für Log. $(1+x)$, die N. vor Mercator gefunden hatte, sowie die für $\sin x$ und $\cos x$, und als erstes Beispiel für die Umkehrung von Reihen, die für $e^x$, welche N. also vor Euler gefunden, allerdings ohne die Bedeutung dieser Funktion zu erkennen. Die Analysis enthält auch den Beweis, dass N. schon 1665 über die Elemente der Differential- und Integralrechnung gebot, von ihm Fluxionsrechnung genannt. Das älteste Denkmal ist ein Manuscript vom 28. Mai

1665, schon am 13. Nov. d. J. bestimmt er mittelst Fluxionen (Differentialquotienten) die Tangente und den Krümmungsradius ganz allgemein. Bereits 1671 war sein grosses Manuscript: „Methodus fluxionum et serierum infinitorum“ fertig, Collins wollte es 1680 drucken, aber es ist erst 1736 englisch von Colson edirt worden, als es nichts Neues mehr enthielt. C. hat nachgewiesen, dass es inzwischen mehrfach überarbeitet wurde, aber C. berichtet auch, dass N. bereits in dem Brief vom 24. Oct. 1676 einen Hauptfall des sogen. binomischen Integrals $\int az^{\vartheta}(e+fz^{\eta})^{\lambda}dz$ erledigt (den wenn $(\vartheta+1):\lambda$ eine ganze Zahl ist), das konnte doch nur Jemand, der sehr tief in den Algorithmus eingedrungen war. Newton ging wie sein Lehrer Barrow von der Bewegung aus, er betrachtete die gewöhnlichen Grössen als im gleichmässigen Fluss der unabhängig variablen Zeit erzeugt, die Zeit wächst um unendlich kleine Grössen (Momente), die mit 0 bezeichnet werden und den Charakter als Null haben; die abhängigen Grössen wachsen in Folge dessen ebenfalls mit mehr oder minderer Geschwindigkeit um unendlich kleine Theilchen, ebenfalls Momente genannt. Sind $x$, $y$, $z$ gewöhnliche Grössen, welche als von der Zeit abhängig fliessende „Fluentes“ heissen, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ ihre Geschwindigkeiten oder Fluxionen, so sind $0\dot{x}$, $0\dot{y}$, $0\dot{z}$ ihre Momente, so dass „post momentum temporis“ die Grössen übergehen in $x+0\dot{x}$, etc. Lagrange sagt: Tout le monde a ou croit avoir une idée de la vitesse; für N. stand dieser Begriff durchaus fest, und er hatte damit die Ueberzeugung von der Existenz eines ersten Verhältnisses der entstehenden endlichen Grössen, welches auch, wenn man rückwärts von den gewordenen Grössen ausgeht, als das letzte Verhältniss aufgefasst werden kann, mit welchem sie verschwinden. Die Klarheit, mit welcher N. z. B. in den Briefen an Wallis von 1692 und in den 12 Sätzen des 1. Buches der „principia“ 1684 die Grundgedanken dargestellt hat, ist von C. unterschätzt. N. ist in der Tiefe der Auffassung, in der vis mathematica des Geistes L. über, Gauss hat nie einem Andern das Prädikat „summus“ zugestanden. Dagegen übertrifft er N. in dem, was seine Stärke überhaupt bildet, in der Form; dass L. als der Erste die Bedeutung des Zeichens für die Mathematik erkannte, dass er ihr innerstes Wesen als Symbolik erfasste, darin liegt L's höchste Bedeutung. L. hat sich zuerst 1673 mit Infinitesimalbetrachtungen befasst, und zwar ganz sicher nach seinem ersten Aufenthalt in London, wo er Barrow's „lectiones“ an sich brachte, und vom Tangentenproblem ging er aus. Er selbst giebt wiederholt und fast gleichlautend an, dass ihn Pascal's Arbeiten auf die Erfindung gebracht haben; und wer seine Entwickelung betrachtet, die von der Combinatorik ausgeht und damit von den Differenzenreihen des Pascal'schen Dreiecks, bezw. der Binomialcoefficienten, dem wird dies einleuchten. Aber ebenso sicher ist

es auch, dass ihm, der ohne gründliche mathematische Bildung 1673 nach London kam, „Suggestionen“, wie Z. sagt, von N.'s Erfindung zuflossen, und ich mache in dieser Hinsicht auf ein Fragment eines Briefes an Oldenburg vom 30. März 1675 aufmerksam. Es ist sehr möglich, dass L. den sogen. Tangentenbrief N.'s bei Tschirnhausen gelesen, sicher war er vor seiner ersten Publikation von 1684 im Besitz der Briefe N's. von 1676. C. hat nun zwar ausgeführt, dass L. aus alle dem nicht viel hätte lernen können, dagegen ist aber das Beispiel der Bernoulli's anzuführen. Die erste Publikation L's. in den „Acta eruditorum“ von 1684 und die erste, in der der Algorithmus der Differentialrechnung gedruckt ist, trägt den Titel: Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus; sie war absichtlich so dunkel als irgend möglich, und doch gelang es den Bernoulli's und zwar zunächst Jacob in 2 Jahren sich nicht nur der Differentialrechnung, sondern auch der nur ganz versteckt als inverses Tangentenproblem an der Beaune'schen Aufgabe angedeuteten Integralrechnung völlig zu bemächtigen. Sollte man L. weniger zutrauen? Aber alles dies schmälert L's. Verdienst nicht, dessen Differentialrechnung, was Brauchbarkeit und Zugänglichkeit betrifft, thurmhoch über N's. Fluxionsrechnung stand. Die Bezeichnungs- und Ausdrucksweise von L. hat sich unverändert bis heute gehalten und alle Versuche, wie sie z. B. von Cauchy und Jacobi gemacht sind, daran zu rütteln, sind erfolglos geblieben. Fast alle Kunstausdrücke wie Differential-, Infinitesimalrechnung, Differentialgleichung, Analysis, Funktion, transcendent, die Indexbezeichnung etc. stammen von L. Nur das Wort „Integral“ stammt von Jacob B.; doch macht schon in einem Brief an L. vom 12. Febr. 1695 Johann auf die Erfindung Anspruch, der übrigens dei C. nicht gerade mit Liebe behandelt ist. Dass Johann z. B. Recht hatte, als er die Berechnung der Werthe $^0/_0$ für sein Eigenthum erklärte, hat Eneström nachgewiesen. Vor allem aber hat L., der ja Menschenbeglücker von Profession war, die Bedeutung seiner Erfindung für die gewöhnliche Menschheit sofort voll erkannt, während N. die seine zunächst nur für den eigenen Hausgebrauch benutzt. N. konnte jeden Algorithmus entbehren, wie das Genie überhaupt, wie denn z. B. Huygens sich sein Lebenlang ablehnend gegen den neuen Calcul verhielt und doch alles leistete, was die Differentirer forderten und noch einiges mehr. Erst als die Journale, die gerade zu jener Zeit aufkamen, die Acta eruditorum, die Nouvelles de la république des Lettres, die Akademieberichte sich mit Schriften der Leibnizianer füllten, wurde N. oder vielmehr seine Landsleute, die sich überflügelt sahen, gereizt, und so machte sich 1699 Fatio de Duiliot zum Sprachrohr ihres Aergers. Es begann damit der

hässliche Prioritätsstreit, der L. die letzten ohnehin so trüben Lebensjahre verbitterte und der noch heute, cf. Zeuthen contra Cantor, nicht ruht. Man findet die ausführliche Schilderung bei C.; er ist so recht ein Muster solcher Fehden, beide Theile haben Recht und Unrecht, beide gehen beschädigt aus dem Kampfe hervor. L. fälschte, N. log. Das Facit zog Biot dahin: „Die Differentialrechnung von L. wäre noch heute eine bewundernswerthe Schöpfung, wenn nur der Fluxionscalcul in der Weise existirte, wie ihn N's. Werke geben.“ In der That, L. und kein Anderer hat das Unendlich-kleine sans phrase als berechtigtes mathematisches Gebilde eingeführt. Von L. rührt die Formel Nr. 29 für die allgemeine Differentiation eines Produkts, Nr. 22 für die Differenzirung des Logarithmus. Die Probleme der Brachystochrone — Isochrone — Kettenlinie — Florentiner (Viviani) löste er. Was die Integralrechnung betrifft, so wird oft angegeben, dass sie von den Bernoulli's erfunden sei, und Jacob B. hat sie in der That ganz selbständig gefunden, aber lange nach L. und N., und der Briefwechsel beweist, dass L. die Methoden jener vielfach schon besass. Ein sehr wichtiger Fortschritt ist unbestritten sein Eigenthum, die Differentiation unter dem $\int$ nach einem veränderlichen Parameter, wodurch er wieder neue Wege bahnte, so für die Variationsrechnung, deren erste Keime in einem Brief an Johann B. vom 24. Juni 1695 liegen, und ebenso für die Auffindung bestimmter Integrale. Mit Johann B. gleichzeitig (Joh. B. an L. d. 10. Juni 1702, L. an B. 24. Juni 1702) fand er die Integration rationaler Integrale durch Zerlegung in Partialbrüche: (L.: Acta erud. 1702, Joh. B. Abhandl. der Par. Akad.); gemeinsam haben sie auch die Integration quadratischer Irrationalitäten erledigt. Die Verdienste der Bernoulli um die Ausbildung und die Verbreitung der neuen Rechnung hat L. selbst auf das dankbarste anerkannt, cf. seinen Brief v. 7. Juli 1694 an Joh. B. Das „erste Lehrbuch der Differentialrechnung“ lange Zeit das einzige und fast noch längere Zeit das am leichtesten lesbare, (C.) ist nach Joh.'s Lektionen von Marquis de l'Hospital geschrieben: „Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes. Par. 1696;“ Joh. selbst hat zum Gebrauch desselben Marquis das erste Lehrbuch der Integralrechnung verfasst. (De methodo integralium. Op. 3.)

Die Bernoulli's in Basel lasen zuerst über Differentialrechnung (Christian v. Wolf zuerst in Deutschland). Ueber die Begründung der Variationsrechnung durch den noch immer nicht genügend aufgeklärten Bruderkrieg zwischen Jacob I. und Johann I. vgl. man das Programm von Giesel, Torgau 1857. Es mögen sich einige Einzelheiten über Bezeichnung, Kunstausdrücke etc. anschliessen. Das $dx$ findet sich schriftlich zuerst bei L. 11. Nov. 1675, gedruckt 1684 in der Methodus nova, während das am 29. Oct. 1675 ein-

geführte $\int$ erst 1686 in der „De geometria revindicata" gedruckt ist. Uebrigens haben L. und Joh. B. nach 1695 und 96 das $\int$ als gewöhnliches Summenzeichen gebraucht, wie denn L. die Integralrechnung, Calc. summatorius nannte: Das Wort „Integral", zuerst gedruckt bei Jacob B. in den Acta erud. 1690 (Isochrone), später einigten sich Joh. und L. die Rechnung Integralrechnung zu nennen, das Zeichen $\int$ beizubehalten; unsere jetzige Schreibweise bestimmter Integrale $\int_a^x$ rührt von Fourier her. Calculus differentialis L. 1684, Differentialgleichung (lat.) zuerst im Brief von L. an Oldenburg (Newton) von 1677, eben dort zuerst derivare (ableiten), woraus dann bei Lagrange 1772 Ableitung. Die Bezeichnung $f'(x)$ oder vielmehr $\psi'(x)$ für $d\psi(x) : dx$ bei Lagrange in der „Nouvelle méthode 1770", das $\partial$ für die partielle Ableitung, die auch noch oft durch Klammern bezeichnet wird, bei Jacobi, Crelle Bd. 32 p. 4. 1842, Cauchy: $D_x f(xy)$ (Nouv. exerc. T. II). Das Differenzzeichen $\triangle$ bei Joh. B. 1701 (C. S. 437). Einhüllende Curven (Enveloppen) zuerst bei L. Act. erud. 1692: De linea ex lineis ...., wo auch zuerst krummlinige Coordinaten erwähnt werden und das Wort Parameter vorkommt, L. weist darauf hin, dass die Evoluten (die Krümmungsmittelpunktscurven) Huygens aus dem grossartigen horologium oscillatorium 1673 ein specieller Fall. Brennlinien (Kata- und Diakaustiken) hat Tschirnhausen 1682 behandelt (C.), ihre Theorie gab Jac. und Joh. Von Joh. sind die Trajectorien, sowohl die orthogonalen als die andern eingeführt. (Joh. B. Op. I. Gerhard, L. III. 469, 539.) Joh. hat auch die Theorie der kürzesten Linie geschaffen, wie er die Theorie der Exponentialgrössen (der Name rührt von L. her) in den Act. erud. März 1697 begründet und lange vor Euler, deren Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen gekannt (Acad. des scienc. 1702), die vollständige Theorie gab dann Euler in der Introductio, d. h. die erste einigermassen „strenge" Ableitung von $e^x$ gab Cauchy im cours d'analyse 1821. Was die Curvenlehre betrifft, so kommt das Wort Subtangente zuerst bei Huygens vor (C. S. 142). Die Inflexionspunkte hat zuerst de Sluse betrachtet 1668 (C.). Schnabel und Spitze de l'Hospital unterschieden 1696; Rückkehrpunkte (Points de rebroussements) als Punkte, in denen die Tangente unbestimmt wird. Joh.'s Brief an L. 18. Juni 1695 und 17. Juli. Die Lehre von den singulären Punkten, wie sie jetzt üblich, rührt von Saurin her.

Metaphysisch war die Grundvorstellung bei N., wenn auch verschleiert, offen trat sie als solche auf bei L. Am klarsten hat sich L. in der Antwort auf die Angriffe Nieuwentiits ausgesprochen: Responsio etc. in den Acta erud. 1695 (Gerhard Bd. 5, S. 320), er streift hier ganz das, was man heute „Grenzbegriff" nennt, allerdings greift er dann auch zur Mechanik und zeigt eine auffallende Uebereinstimmung mit N. Unklarer sind seine

Briefe an Varignon, dessen Commentar zu de l'Hospital sehr wichtig ist. Dieser schreibt sub 28. Nov. 1701: „Ich nenne infiniment petit oder Differenial einer Grösse das, woran sie unerschöpflich ist und diese Grösse selbst unendlich gross in Bezug auf jene." Diese Auffassung erleichtert besonders das Verständniss der höheren Differentiale, welches in jener Zeit die meiste Schwierigeit machte. L. antwortet auch hier wie so oft sonst mit dem Hinweis auf „sein" Gesetz der Continuität, dem zu Folge Ruhe Grenzfall der Bewegung, die Parabel Grenzfall der Ellipse etc. und die Gesetze, welche im Endlichen gelten, auch im Unendlichen giltig bleiben. L. selbst hat „sein" Gesetz wiederholt und stets schwerfällig formulirt, besser ist es von l'Huilier gefasst, in der Preisschrift „Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs (1786). Am einfachsten formulirt man: Eine Eigenschaft, welche jedem Glied einer infinit fortsetzbaren Reihe zukommt, kommt auch ihrer Grenze zu. Aber dass das Differential, das die endliche Grösse Erzeugende (prima ratio), also der von der Grösse selbst der Art nach verschiedene Grössenkeim sei, das entging L. so wenig wie „aemulo" (N.). Es ist das Verdienst H. Cohen's dies erwiesen zu haben in: „Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte 1883", einer gedankenreichen Schrift, welche wohl verdiente aus dem Kantischen in's Deutsche übersetzt zu werden. Es sei auch hier gleich auf das Ilfelder Programm 1883 von Freyer: „Studien zur Metaphysik der Differentialrechnung" hingewiesen, das sich durch Klarheit auszeichnet und vielfach mit Cohen zusammentrifft. Herr Vivanti hat, wenigstens nach dem Ueberblick im Eneström, beide Schriften nicht erwähnt. Da es L., weil er das Differential mit seinen Monaden verquickt, nicht gelang, das Fundament seines Calculs klarzustellen, so erhoben sich von allen Seiten Widersprüche, die alle zusammengefasst und begründet sind in Berkeley's Analytiker (1734) und die, wie Freyer treffend sagt, immer dieselben blieben bis auf den heutigen Tag; er weist dabei auf P. du Bois-Reymond's Funktionentheorie hin, eine Schrift, die ganz von vergeblichem Ringen nach Klarheit über den Grenzbegriff erfüllt ist. Freyer hat die 4 wesentlichen Einwände Berkeley's (und D'Alembert's) zusammengestellt.

1) Eine unendlich kleine Quantität, ein Ding zwischen der Null und einer endlichen Grösse sich befindend, sei nicht vorzustellen (dasselbe ist oft genug von der unendlich grossen Quantität gesagt).

2) Das Identitätsgesetz der Logik sei verletzt, erst haben die Momente oder Differentiale Grösse, dann wieder keine.

3) Der Begriff der Geschwindigkeit (und damit der Differentialquotient) sei ein abgeleiteter. Lässt man den Raum oder mit N. die Zeit verschwinden, so hören die Geschwindigkeiten auf und um so mehr ihr Verhältniss.

4) Dass die Resultate richtig seien (beim Rechnen mit unendlich kleinen Grössen), rühre von wiederholten Fehlern her, die sich ausgleichen. Der Einwand von 4 ist oft wiederholt, von L'Huilier, Lagrange, Carnot, selbst von Euler. N., der eine krankhafte Scheu vor allen Diskussionen hatte, hat in seinem Hauptwerk sich fast ganz an die Grenzmethode der Alten gehalten. Das bedeutendste Lehrbuch, das aus seiner Schule hervorging, Maclaurins' „Treatise of fluxions" (1742), trug den Berkeley'schen Einwänden möglichst Rechnung, die Newton'sche Richtung überwog völlig, das Unendlichkleine war geächtet, bis Cauchy den Bann brach und „die Strenge der einen Methode mit der Einfachheit der anderen zu versöhnen suchte" (Leçons sur le calc. diff. 1829) und 1841 Cournot das Unendlichkleine in sein Recht einsetzte. Die Einleitung zu Cournot's Lehrbuch (90 S.) enthält die klarste Philosophie der Differentialrechnung, die bis jetzt geschrieben. Neuerdings ist das Vorurtheil wieder in Aufnahme, als ob die Grenzmethode strenger sei (vergl. z. B. Stolz); dazu ist zu bemerken, dass nur durch Vermittelung des Unendlichkleinen als eines bereits feststehenden uns gegebenen Begriffs überhaupt von einer Annäherung an die Grenze gesprochen werden kann. Die Grenze z. B. 1 als $\lim \sum \frac{1}{2^k}$ steht a priori fest, und dass der unendliche Process sie erreicht, dass man $\sum \frac{1}{2^k}$ gleich 1 setzt, wird eben durch den Begriff des unendlich kleinen $du$ erzwungen, nur darf es nicht negativ definirt werden als die Grösse, welche kleiner als jede noch so kleine, — da würde Einwand I statthaben —, sondern positiv durch die Gleichung $u + kdu = u$, wenn $k$ endlich. Dabei bleibt noch zu erörtern, wie man auf das $du$ kommt. Seit Galilei und Kepler ist fortwährend mehr oder minder deutlich auf die eigentliche Bedeutung des $dx$ hingewiesen als das, wie Cohen sagt, realisirende, d. h. die intensive Grösse, bezw. der Grössenkeim, der durch einen unendlichen Process die endliche, d. h. mit unseren eigenen körperlichen Abmessungen vergleichbare Grösse erzeugt. Diese realisirende Bedeutung des $dx$ hat im bestimmten Integral niemals völlig unterdrückt werden können. Nur weil wir uns der einzelnen differentialen Stufen, durch welche unser Vorstellungsvermögen in Momenten N.'s hindurchgeht, nicht bewusst sind, gehen wir von der endlichen Grösse aus und kommen so auf das $dx$ rückwärts durch einen unendlichen Theilungsprocess als dessen Grenzabschluss. Dass wir im Grenzabschluss oder Grenzbegriff eine Kategorie der Vernunft besitzen, welche den rastlosen Fortgang der nach dem Trägheitsgesetz an sich unbegrenzten Vorstellungsreihe hemmt, ist in neuester Zeit des öfteren betont werden. Derselbe infinite Process, der aus dem $x$ das $dx$ erzeugt, erzeugt aus dem $dx$ das $d^2x$, etc. Dass das Unendlichkleine und das mit ihm stets verbundene Unendlichgrosse wohldefinirte Begriffe

sind, ist zuerst von Bolzano in seinen Paradoxien des Unendlichen (1847 und 48) nachgewiesen. Dort findet sich die Bemerkung, dass die Vorstellung des Ganzen keineswegs durch die aller Theile der Reihe nach durchzugehen braucht, dort die Stelle: „Eine Menge ist unendlich“, heisst: „es ist eine Vielheit, die sich durch eine blosse Zahl nicht bestimmen lässt“, daraus folgt aber noch gar nicht, dass diese Vielheit etwa auf keine Art zu bestimmen sei, z. B. die Menge der Punkte zwischen $A$ und $B$ [als welche ja angeschaut, bezw. gemessen werden kann]. Nächst Bolzano ist Kerry zu nennen, der im „System einer Theorie der Grenzbegriffe 1890“ die richtige Bemerkung macht, dass der Begriff einer unendlichen Zahl keineswegs selbst etwas unendliches ist und der, was sehr wesentlich, nachweist, dass dieser Begriff in die weite Klasse der indirekten (d. h. durch Beziehungen zu feststehenden gegebenen) gehört, wie jedes $x$ in einer Gleichung. Zu bemerken ist, dass eigentlich jeder Beziehungsbegriff seiner Natur nach auf einen unendlichen Prozess führt, z. B. die Gleichung $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$ führt unmittelbar auf die Reihe $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ Die Kunst des Mathematikers besteht gerade darin, durch Subtraktion und Multiplikation die direkte klare Vorstellung der 1 für $x$ zu erwecken. Man sieht, wie treffend Dedekind die unendliche Menge als die ursprünglichgegebene auffasst. Wie nichtssagend die negative Definition des Unendlichkleinen ist, geht am besten aus der Fassung hervor, die ihr Cauchy in dem klassischen „cours d'analyse“ von 1821 gegeben: „eine Grösse wird unendlich klein, wenn ihr Zahlenwerth bis in's Unendliche abnimmt, so dass er sich der Grenze 0 nähert“, dagegen hatte Berkeley völlig Recht mit Nr. 1; es muss heissen: Eine Grösse ist unendlich klein, wenn durch ihre unendlichfache Wiederholung eine endliche Grösse erzeugt werden kann. Auch auf die Einwände sub 2 und 3 muss eingegangen werden. Der Nullcharakter des Differentials ist nie verkannt worden, und Euler hat $dx$ oder $u$ geradezu mit Null bezeichnet, aber Null ist ein äusserst komplizirter Begriff, noch mehr als selbst 1, und die Mathematiker haben die Gewohnheit die verschiedensten Begriffe, wie z. B. die in $a^x$ mit demselben Zeichen zu bezeichnen. Die Null der Subtraktion ist u. a. Zeichen für einen Begriff, der Umfang ohne Inhalt hat, für einen Complex, der leer ist, und leer ist wohl die Grundbedeutung von *sifr*; die Null der Division ist ein Zeichen für einen Begriff, der Inhalt ohne Umfang hat, bezw. aus dessen Merkmalen ein Einzelnes, der Grösse nach Abstufbares verschwindet, wie das schon N. im lemma 8 der Prinzipien am Beispiel des Dreiecks, das seine Form bewahrt, wenn die Seiten unendlich klein werden, klar gemacht hat. Die Unterscheidung der beiden Hauptarten Null findet sich bei Euler in der Einleitung zu seiner Differentialrechnung, die weit tiefsinniger

ist, als sie den Zeitgenossen, die sie nicht verstanden, und daher nicht würdigten, erschien, wie schon Cohen betont hat; spotteten doch Johann B. und L. darüber, dass Nieuwentiit $2m$ und $m2$ unterschied, wenn $m$ unendlich. Kein Bild macht das Wesen der unendlich kleinen Grössen klarer als das von Berkeley im Spott gebrauchte; Gespenster der entschwundenen Grössen nennt er sie, es sind die Geister der werdenden Grössen. Unter sich sind die Differentiale gleicher Ordnung, d. h. die, welche durch gleich oft wiederholten infiniten Prozess die endliche Grösse erzeugen, völlig homogen und vergleichbar und können alle Beziehungen von Grössen haben.

Die weitere Fortsetzung der Geschichte der Differentialrechnung würde zu einer Geschichte der Mathematik des 18. und 19. Jahrh. werden müssen und ist eignen Werken zu überlassen. Ein sehr wichtiger Theil der Arbeit ist bereits geleistet durch die Geschichte der unendlichen Reihen von Reiff Tüb. 1889 und hier soll nur noch auf Cauchy eingegangen werden, der vielfach als Neubegründer der Analysis angesehen wird. Z. hat im 2. Heft der Kopenh. Berichte von 1895 hervorgehoben, dass das 17. Jahrh. incl. Huygens und Newton das Gefühl für die Strenge der Alten durchaus noch besass; das Gefühl ging im Laufe des 18. Jahrh. verloren, bewies doch L. mittelst Wahrscheinlichkeitsrechnung, dass $1 - 1 + 1 - 1 \cdots\cdots = \frac{1}{2}$, wenn auch der geniale Instinkt Eulers ihn selten irren liess. Erst bei d'Alembert und besonders Lagrange beginnt die Gegenströmung. Lagrange hat zunächst die Differentialrechnung frei von aller Metaphysik begründen wollen; zuerst in der Abhandlung von 1772, dann in der so berühmt gewordenen „théorie des fonctions analytiques 1796“.

Sein Grundirrthum, dass sich $f(x+h)$ stets nach Potenzen von $h$ entwickeln lasse, ist bekannt. Die Ableitung $f'(x)$ wird definirt als Koeffizient von $h$. Lagrange geht also von der Taylor'schen Reihe aus. Sie findet sich zuerst in der Methodus incrementorum Brook Taylors von 1715, den Namen gab ihr L'Huilier 1786 in der Berliner Preisschrift, die Methodus incrementorum enthält auch die Vertauschung der unabhängigen Variabeln zuerst (Kiepert-Formel 93). Die Reihe ist in derselben naiven Weise abgeleitet, wie dies heute noch in den Schulen unter der Annahme geschieht, dass $x + \varepsilon$ wirklich der $x$ benachbarte Werth ist, also $f(x+\varepsilon) = f(x) + \varepsilon f'(x)$ sei und $h = n\varepsilon$. Maclaurin leitete dann die nach ihm genannte Reihe mittelst der Methode der unbestimmten Koeffizienten ab. Joh. Bernoulli reklamirte die Taylor'sche Reihe als sein Eigenthum, und in der That ist sie im Grunde von der Bernoulli'schen Reihe, die Joh. bereits 1694 gegeben, nicht verschieden. Lagrange dehnte in der erwähnten Abhandlung von 1772 die Reihe auf Funktionen beliebig vieler Variabeln aus und gab in der Théorie des fonctions, die nach ihm genannte Form des Restes (N.) und

damit zugleich auch eigentlich den sog. ersten Mittelwerthsatz der Integralrechnung, wenigstens in dem speziellen Fall, wenn $h(x)$ gleich 1 ist. Cauchy's bedeutendste Leistungen knüpfen an die Taylor'sche Reihe an, er gab 1826 die nach ihm benannte Form des Restes, Kiepert-Formel Nr. 49b, die in der Anmerkung gegebene Erweiterung rührt von Roche her (Montpellier 1858, bezw. Schlömilch, Handbuch der Diff. und Integr. 1847). Von Cauchy ist das erste „Monstrum" die Funktion $e^{-\frac{1}{x^2}}$ behandelt, deren sämmtliche endliche Ableitungen verschwinden, deren Maclaurin'sche Entwickelung also für jedes $x$ convergirt, ohne $f(x)$ darzustellen.

Cauchy hat zuerst die Nothwendigkeit allgemein plausibel gemacht, die Grundbegriffe der Analyse, das Unendlichkleine, die Kontinuität, die Convergenz genau zu unterscheiden und zu definiren, wenngleich ihm Gauss und Bolzano vorangingen und ihn an Strenge übertrafen, so drangen sie doch nicht in die Oeffentlichkeit. Cauchy hat auch die Theorie der Funktionen complexer Variabeln, wenn auch nicht geschaffen, das hat auch Gauss vor ihm gethan, aber als neuen wichtigen Zweig in die wissenschaftliche Welt eingeführt. Zu bemerken ist, dass Cauchy die komplexen Zahlen nie als Zahlen anerkannt hat, wie dies Gauss, cf. die Anzeigen zur Theorie der biquadratischen Reste, gethan hat. Cauchy hat 1814 (Mémoire sur les intégrales définies) gezeigt, dass die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Integration nur gestattet ist, wenn keine innere Divergenz stattfindet; er hat die entsprechende Bedingung für die Differentiation unter dem $\int$ angegeben (Anc. exerc. Tom. II), die einfache Ableitung der Taylor'schen Reihe durch Integralrechnung gegeben und 1831 (Mém. sur le calc. des limites) den entscheidenden Satz gegeben: Dass die Taylor'sche Reihe convergirt im Innern eines Convergenzkreises, der durch den dem Entwicklungscentrum nächsten singulären Punkt geht. Dass die Reihe weiter convergiren kann, dann aber nicht die erzeugende Funktion, sondern die von der hebbaren Unstetigkeit befreite darstellt, hat wohl zuerst Riemann ausgesprochen. Abschliessend sind die Arbeiten von Pringsheim in den Berichten der Math.-Vereinigung von 1893. Als bedeutendste Leistung Cauchy's gilt das Mémoire von 1825 sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, in welchem er die Abhängigkeit des bestimmten Integrales vom Integrationsweg nachwies (also komplexe Werthe der Variabeln zuliess) und damit den eigentlichen Grund für die Periodicität der aus den Integralen algebraischer Integranden entspringenden Funktionen aufdeckte. Sofort nach dem Erscheinen des Briefwechsels zwischen Gauss und Bessel wurde in der deutschen Litter.-Zeit. von 1881 Nr. 37 darauf hingewiesen, dass Gauss im Brief vom 18. Dez. 1811 sich bereits mit der komplexen Integration als Quelle der Periodicität völlig vertraut zeigt. Gauss hat auch den Beweis, dass

das geschlossene Integral um einen synektischen Bereich 0 ist, durch Transformation auf ein Doppelintegral, das über sämmtliche Elemente der betreffenden Fläche summirt wird, gegeben. Das nimmt dem Verdienste Cauchy's nichts, der ja auch das grundlegende Theorem der Determinanten, das Multiplikationsgesetz zuerst mit Beweis veröffentlicht hat. Wohl sind in den 789 Memoiren viele Irrthümer, manche Einschränkungen sind seinen Sätzen über Stetigkeit etc. zuzufügen, aber die Theorie der Convergenz der Reihen nicht nur, sondern unsere ganze heutige Analysis geht auf Cauchy zurück, an den Weierstrass ganz unmittelbar anknüpft.

---

# LEBENSGESCHICHTE[1]

DES UNGARISCHEN MATHEMATIKERS

# JOHANN BOLYAI DE BOLYA,

K. K. HAUPTMANN IM GENIECORPS (1802—1860).

VON

**FRANZ SCHMIDT**

IN BUDAPEST.

1) Ein Auszug dieser Biographie ist in ungarischer Sprache auf S. XX—XXVIII der neuen Ausgabe des Appendix erschienen: „J. Bolyai: Scientia spatii absolute vera.“ Mit Vorwort, ungarischer Uebersetzung und Erläuterungen von J. Suták sowie J. Bolyais Biographie von F. Schmidt. Budapest 1897.

Als ich vor dreissig Jahren mit J. Hoüel[1]) in Bordeaux bekannt wurde, ersuchte mich dieser ihm nähere Mittheilungen über das Leben und die Werke der beiden ungarischen Mathematiker Wolfgang und Johann Bolyai zu machen. Ueber Wolfgang Bolyai war in Wurzbachers Biographischem Lexicon (2. Band, Wien 1857) eine Lebensgeschichte erschienen. Weitere Mittheilungen verdankte ich dem Herrn Prof. Samuel Szabó, gegenwärtig in Klausenburg, welcher auch die Güte hatte mir zwei Exemplare des Tentamen[2]) (sammt den übrigen ungarischen und deutschen Werken Wolfgang Bolyais) zu übersenden. Eines der Exemplare des Tentamen erhielt Prof. Hoüel in Bordeaux.

Die Nachrichten über Johann Bolyai beschränkten sich darauf, dass dieser k. k. Hauptmann im Genie-Corps war, viele Duelle hatte, den Appendix schrieb, 1833 in den Ruhestand trat — und 1860 starb.

Bestrebt nähere Aufschlüsse über das Leben und Wirken dieses genialen Mannes zu erhalten, dessen einzige Abhandlung nach einander in allen Cultursprachen und 1895 sogar japanisch erschienen ist, wandte ich mich an die königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, um eine Abschrift des Briefwechsels zwischen Wolfgang Bolyai und C. F. Gauss zu erlangen, denn W. Bolyai und Gauss waren Jugendfreunde, besuchten von 1796—1798 die Universität in Göttingen und blieben bis 1853 in Correspondenz. Meinem Ansuchen wurde im Dezember 1896 in dankenswerther Weise entsprochen und mit Benützung dieser Briefe, einer fragmentarischen Selbstbiographie Johanns und eines an seinen Vater gerichteten Briefes, der sich in seinen Papieren vorgefunden hat, kann ich die folgende Lebensbeschreibung geben.

Johann Bolyai de Bolya ist am 15. Dez. 1802 zu Klausenburg geboren. Sein Vater, Wolfgang, war 1804—1851 Professor der Mathematik

---

1) Jules Hoüel, Prof. an der Faculté des Sciences in Bordeaux, geboren 7. April 1823, gestorben 14. Juni 1886.

2) Unter Tentamen wird das zu Maros Vásárhely ohne Angabe des Verfassers 1832—33 erschienene und lateinisch verfasste Lehrbuch Wolfgang Bolyais in 2 Bänden verstanden. — Der Appendix zum ersten Band ist jene berühmte Abhandlung von Johann Bolyai über Nicht-Euklidische Geometrie, die kurz als „Appendix“ bezeichnet wird.



und Physik am ev.-ref. Collegium zu Maros Vásárhely und ist 81 Jahre alt am 20. November 1856 gestorben. Seine Mutter, Susanna Benkö de Arkos, war eine schöne Erscheinung mit vorzüglichen Fähigkeiten, aber hysterischer Natur; die letzten vier Jahre verlebte sie in Wahnsinn. Trotz des bescheidenen Einkommens eines damaligen Professors in Siebenbürgen liess der Vater seinem Sohne eine sorgfältige Erziehung zu Theil werden. Den ersten Unterricht erhielt der sehr aufgeweckte Sohn im elterlichen Hause. Die besten Studenten waren seine Hauslehrer. Den Unterricht in der Mathematik behielt der Vater für sich. Johanns Fortschritte in der Mathematik waren so schnell, dass er — wie sein Vater öfter erzählte — den Beweis des Theoremes gar nicht abwartete und die Lösung des Problemes selber gab. „Wie ein Teufel sprang er vor mich" — sind die Worte seines Vaters, „und bat mich weiter zu gehen." Im Alter von zwölf Jahren legte er das „Rigorosum" (die Prüfung über sechs Gymnasialklassen) ab, und wurde nach der Sitte jener Zeit „Student". Seine Uebersetzung aus dem Ungarischen ins Lateinische (bei dem Rigorosum) war im Stile des Tacitus geschrieben, so dass die Professoren die Arbeit nicht genug loben konnten. Student war er zwei Jahre lang, oder besser gesagt, zwei Jahre ging er in das Collegium Damen-Brett spielen. Die Vorlesungen besuchte er selten. Als die Zeit der Prüfungen herankam, klagten ihn die Professoren bei seinem Vater an, der dem leichtsinnigen Sohn einen Verweis ertheilte. Nach zweimaligem Durchlesen der Vorlesungen ging er zur Prüfung und antwortete vorzüglich; woraus man ihn auch fragen mochte, er war vollkommen vorbereitet.

Wenn der Vater krank war, schickte er den Sohn in die Schule, damit dieser den bärtigen Schülern jener Zeit Vorträge halte, und die Schüler hörten den 13jährigen Sohn lieber an, als den Vater, weil sie ihn besser verstanden.

Schon im zwölften Jahre war er ein vorzüglicher Violinspieler, so dass er die schwersten Stücke vom Blatte spielen konnte. In seiner Selbstbiographie findet sich über seine Kinderjahre folgende Stelle: „Schon mit 3—4 Jahren hatte ich Neigung zum Nach- und Selbstdenken und zur Mathematik, indem ich den Boden mit mathematischen Figuren vollschrieb, die fünf regelmässigen Körper kannte und auch ihre Namen. Auch über die Gestalt der Erde, des Himmels und das Wesen Gottes dachte ich nach." . . .

Diese selbstbiographischen Notizen werden ergänzt durch einen Brief, den sein Vater am 18. Dezember 1807 über seine Familie an Gauss schrieb: „Dieselbe besteht aus meinem Erstgebornen (eine Tochter ist mir gestorben), der ist ein geistvoller, schöner Bub und von festem Körper, er ist fünfjährig, ich lehre ihn noch nicht, doch im Spiele hat er viele Gestirne am

Himmel kennen gelernt und die gewöhnlichen geometrischen Gestalten u. dgl.; er macht von seinen Begriffen auch schickliche Anwendungen, z. B. er zeichnet von sich selbst die Lage der Sterne in den Gestirnen mit Kreide aus. Einmal noch im vorigen Winter schnitt er ein Kartoffel-Sinus eines Kartoffel-Bogens, und so war es; wieder als er auf dem Lande den Jupiter erblickte, sagte er: Wie ist es, dass man den auch von der Stadt, auch von da sieht, — er muss weit sein. — Wieder drei entlegene Oerter, wo er gewesen ist, verlangt er, ich sollte es ihm mit einem Worte bezeichnen; ich wusste es nicht, nun fragte er, ob das eine mit dem anderen in einer Linie wäre, und so alle nach der Reihe, nun sagte er, also ist es ein Triangel u. dgl. viele. Er hat eine grosse Lust am Papierschneiden mit der Scheere; einmal schneidet er ein △, es war rechtwinkelig; nun wiewohl ich ihm nichts von den Arten der Triangel jemals sagte, sprach er, dies sei so ein Dreieck, wie ein halbes Rechtangel. — Seinen Körper übe ich vorzüglich; kann mit seiner kleinen Haue in der Erde gut arbeiten. — Es kann die Blüthe fallen ohne Frucht zu lassen. Soll die Hoffnung nicht täuschen, so soll er nach 15 Jahren zu Euch reisen, und Dein Schüler sein; wenn ich gesund bin dazumal, begleite ich ihn zu Dir."

In Johann's Selbstbiographie findet sich ferner folgende Stelle: „Mit neun Jahren lernte ich durch Daniel Vajda die sechs Bücher des Euklid, später nach Vega's Vorlesungen. Er (= der Vater) machte mich auf die grosse Lücke und Unvollkommenheit der Parallelentheorie aufmerksam, bedeutete mich weit besseres als seine Vorgänger geleistet, vollständige und gebührende Befriedigung aber dennoch nicht gefunden zu haben, — insoferne als keines seiner Axiome den geforderten Grad geometrischer Evidenz besitze, obschon jedes zum strengen Beweis des XI. Axioms hinreiche und, so sehr auch jedes von ihnen auf den ersten Blick, und voreilig geurtheilt annehmbar scheine. Er behauptet jedoch ohne Beweis, es sei unmöglich das XI. Axiom zu beweisen. — Er suchte mich, nicht ohne Grund besorgt, ich könnte damit mein ganzes Leben umsonst oder vergeblich zubringen, auf alle mögliche und erdenkliche Art von allen weiteren Untersuchungen dieses Gegenstandes gänzlich abzuhalten und abzuschrecken. — Mit seiner gütigen Erlaubnis sei es gestattet, um seine Ideen darüber einigermassen zu schildern, einen Auszug aus einem Briefe von ihm einzurücken." (Fehlt.) — Dieser Brief ist vom Vater an den Sohn in der Ingenieur-Akademie gerichtet gewesen.

Am 10. April 1816 schreibt W. Bolyai an seinen Freund Gauss über seinen Sohn und über dessen weitere Ausbildung:

„Höre meinen Plan: Mein $13^1/_2$ Jahre alter Sohn konnte, als er das 9. Jahr erreichte, nichts als deutsch und ungarisch sprechen und schreiben,

und ziemlich aus Noten Violin spielen; er wusste sogar zu addieren nicht; ich fing zuerst mit Euklid an, nachdem wurde er mit Euler bekannt; jetzt weiss er von Vega (welcher mein Manual ist im Collegio) nicht nur die ersten zwei Bände überall, sondern ist auch im dritten und vierten Band bewandert, liebt Differential- und Integral-Rechnungen, und rechnet darin mit ausserordentlicher Fertigkeit und Leichtigkeit, so wie er in Violin-Concerten den Bogen in schweren Läufen leicht führen kann ... jetzt endigt er bald meine Physik- und Chemie-Vorlesungen; einmal hat er auch hiervon mit meinen erwachsenen Schülern ein öffentliches, sehr löbliches Examen gegeben in lateinischer Sprache, theils wo ihn andere ad aperturam fragten, theils bei Gelegenheit liess ich ihm einige Beweise in der Mechanik mit Integral-Rechnung führen, wie veränderliche Bewegung, der Cycloide u. dgl. Nichts war mehr zu wünschen, edle Einfachheit, Klarheit, Schnelligkeit und Leichtigkeit waren auch für Fremde hinreissend, er hat einen schnell und vielfassenden Kopf, und manchmal Blitze von Genie, die mehrere (Geistes-) Riesen auf einmal mit einem Blicke findend durchsehen; er liebt reine, tiefe Theorien und Astronomie; ist schön und ziemlich fest gebaut, und sieht sonst still aus; ausgenommen, dass er sehr gern und feuervoll mit andern Kindern spielt; sein Charakter wird, insofern man urtheilen kann, fest und edel; ich habe ihn zum Opfer der Mathematik bestimmt, er hat sich auch dazu gewidmet und verlangt nach zwei Jahren zu Dir, wenn Du auch verlangst einen echten Apostel der Wahrheit in einem fernen Lande zu bilden; ich wollte ihn 3 Jahre lang bei Dir halten, und wenn es möglich wäre (wir wollen treu und offenherzig alle Umstände erwägen) in Deinem Hause, denn allein kann man einen 15jährigen Jüngling nicht lassen, und einen Hofmeister mitzuschicken übersteigt meine, durch viele Processe geschwächten Kräfte; — indessen einem Studenten, der von hier hinaufginge, könnte ich ihn doch anvertrauen, und würde ihm ein Honorarium geben, wenn ich nur dann einen bekäme, dem ich soviel trauen könnte, — Deiner Frau Gemahlin Unkosten würde ich, versteht sichs, schon entschädigen. ... Wir würden alles anordnen, wenn ich mit ihm zu Dir hinaufginge. ... Einige haben gerathen ihn zu Pasquich (Ofner Astronom) .. zu geben; andere haben zum Bugge gerathen in Wien; ich und er verlangen in jeder Rücksicht zu Dir!" ...

Auf diesen Brief Bolyais kam von Gauss keine Antwort. Nachdem der Wunsch des Vaters, seinen Sohn nach Göttingen zu bringen, nicht in Erfüllung gegangen war, kam Johann 1817 nach Wien in die k. k. Genie-Akademie, ein Entschluss, der mit grossen Opfern verbunden war. — In der Genie-Akademie war Johann der beste Schüler seiner Klasse. — Sein Lehrer für Mathematik war Johann Wolter von Eckwehr, k. k. Hauptmann im Genie-Corps. Bei der Inspizirung der Schule durch den Chef des Genie-

Corps, den Erzherzog Johann, hatte Johann Gelegenheit Proben seines Talentes zu geben.

Schon aus der Genie-Akademie berichtete er seinem Vater: „Er habe zu einem möglichen Beweise des XI. Axioms zuerst den Weg eingeschlagen, zu beweisen, dass eine mit einer Geraden gleichlaufende d. i. davon in einer Ebene überall gleichweit abstehende Linie, auch eine Gerade sei, — und habe zu diesem Zweck die Eigenschaft einer solchen Linie für den Gegenfall zu entwickeln angefangen. — Da antwortete dieser 1820 in einem denkwürdigen Schreiben folgendermassen.“ (Dieser Brief fehlt.)

Aus den Akten des k. und k. Reichs-Kriegs-Ministeriums stammen folgende Daten:

Bolyai, Johann de Bolya, — Land: Siebenbürgen. — Geboren: 1802, Religion: reformirt. — Assentirt und eingetheilt am 7. September 1822. Vom Zögling der 7. Classe der Ingenieur-Akademie zum Cadetten des Ingenieur-Corps. — Ernannt: Unterlieutenant: 1. Sept. 1823 bei der Fortification-Localdirektion in Temesvar. — Ernannt: Oberlieutenant den 8. Sept. 1827. — Transferirt 2. September 1830 nach Lemberg. — Ernannt: Capit. Lieutenant 14. März 1832. — Uebersetzt 29. April 1832 zur Fortification-Localdirektion nach Olmütz. — Pensionirt 16. Juni 1833. — Gestorben 1860.

Die Reise in seine erste Garnison von Wien nach Temesvar, 72 Meilen, hat er vom 17. bis 30. September 1823 zurückgelegt, und dafür 36 fl. Conv. Münze Vorspann-Gebühren bezahlt.

In seinem Corps war er der erste Mathematiker, der beste Violinspieler, aber auch der erste Fechter.

In Temesvar scheint Johann dem Wesen nach sein Problem erfasst zu haben. In seinen Papieren hat mein Sohn, Prof. Dr. Martin Schmidt, einen in ungarischer Sprache geschriebenen Brief Johanns an seinen Vater vorgefunden, der wie folgt lautet:

„*Temesvar*, *3. November 1823.* — Lieber, guter Vater! Ich habe über meine Entdeckung so übermässig viel zu schreiben, dass ich mir gerade jetzt nicht anders zu helfen weiss, als dass ich mich in Nichts einlasse und blos auf einen Quartbogen schreibe; ich erwarte Antwort auf meinen zwei Bogen starken Brief .... Zuerst antworte ich auf das Binomium: ....“

Das Ende des Briefes lautet:

„Mein Entschluss steht fest ein Werk über die Parallelen herauszugeben, sobald ich den Stoff geordnet habe und es die Umstände erlauben; gegenwärtig hab' ich es noch nicht entdeckt, aber der Weg, welchen ich befolgt habe, verspricht beinahe sicher die Erreichung des Zieles, wenn es überhaupt möglich ist; ich habe das Ziel noch nicht, aber ich habe so

grossartige Sachen herausgebracht, dass ich selbst verblüfft war, und es ewig Schade wäre, sollten sie verloren gehen; wenn Sie sie sehen werden, werden Sie es auch erkennen; jetzt kann ich nur soviel sagen, dass ich aus Nichts eine neue andere Welt geschaffen habe; — alles, was ich bisher geschickt habe, ist ein Kartenhaus im Vergleich zu einem Thurme. Ich bin überzeugt, dass es mir nicht minder zur Ehre gereichen wird, als ob ich es schon entdeckt hätte."

Dieser Brief stimmt überein mit seinen selbstbiographischen Notizen, wo er sich folgendermassen äussert:

„Erst im Jahre 1823 hatte er dem Wesen nach sein Problem durchdrungen, obschon auch nachher noch Vervollkommnungen hinsichtlich der Materie und Form hinzukamen. — Diese Arbeit, worin bereits der Grund zum Ganzen gelegt war, teilte er seinem Vater und anderen Personen, auch seinem einstmaligen Lehrer J. Wolter von Eckwehr im Jahre 1825 mit, und das betreffende Schriftstück dürfte sich in des Letzteren Nachlasse befinden."

Meine zur Auffindung dieser Mittheilung unternommenen Schritte bei der Familie Wolters, von der nur noch ein Sohn am Leben ist, sind erfolglos geblieben. — In den nachgelassenen Aufzeichnungen Johann Bolyais befindet sich ein zwei Bogen umfassendes Manuscript des Appendix in deutscher Sprache, an vielen Stellen überschrieben und ausgebessert; das dazu verwendete Papier ist jenem des Briefes von 1823 ähnlich, vielleicht noch älter.

Der Appendix war also ursprünglich in deutscher Sprache geschrieben. Bei einem Zusammentreffen mit seinem Vater veranlasste dieser ihn die Arbeit in's Lateinische zu übersetzen. Johann übergab sie dem Vater zur Drucklegung und trug 104 fl. 54 Kr. zu den Kosten bei. —

Sie erschien als Appendix zum ersten Band in seines Vaters Werk: Tentamen juventutem studiosam ..... 1832[1]). Vom Appendix waren schon 1831 Separat-Abdrücke fertig gestellt.

Das Erscheinen dieser Abhandlung veranlasst Wolfgang Bolyai den 15 Jahre hindurch unterbrochenen Briefwechsel mit Gauss wieder aufzunehmen. — Ueber seinen Sohn schreibt W. Bolyai an Gauss am *20. Juni 1831* aus M. Vásárhely:

1) Der volle Titel des Appendix, dem auch eine Tafel beigefügt ist, lautet: Appendix, Scientiam Spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica. Auctore Johanne Bolyai de Eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo, — Maros-Vásárhelyini, 1832. Typis Collegii Reform. per Josephum et Simeonem Kali de Felső-Vist.



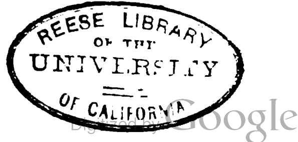
„Der ist schon Oberlieutenant im Genie-Corps und wird schon bald Hauptmann, ein schöner Jüngling, virtuos auf der Violin, guter Fechter und brav, aber hat oft duellirt[1]) und ist überhaupt noch ein zu wilder Soldat — aber auch sehr fein — Licht in Finsternis — und Finsternis im Lichte — und ein passionirter Mathematiker mit sehr seltenen Geistesfähigkeiten — itzt ist er in Lemberg in Garnison — ein grosser Verehrer von Dir — Dich zu verstehen und zu schätzen fähig. — Auf seine Bitte schicke ich dieses sein Werkchen zu Dir: habe die Güte es mit Deinem scharfen, durchdringenden Auge zu beurtheilen und Dein hohes Urtheil ohne Schonung in Deiner Antwort, auf die ich sehnsuchtsvoll warte, zu schreiben. Es ist der erste Anfang von meinem Werke, welches unter der Presse ist, ich war Willens den ersten Band itzt mitzuschicken, es ist aber noch nicht heraus. . . . Mein Sohn hält mehr von Deinem Urtheil, als von ganz Europa — . . . Der Uebergeber dieses Briefes, Sohn des damals in Göttingen gewesenen Daniel v. Zeyk, war in Paris, und ist aus London zu Euch gekommen, — einer meiner liebsten und besten Schüler". (Zeyk hat weder den Brief von 1831, noch die darin erwähnte Arbeit persönlich übergeben, sondern wie Gauss in seinem Brief vom 6. März 1832 erwähnt, sie nur zugestellt. Anm. von F. Schmidt.)

Nachdem auch auf diesen Brief keine Antwort gekommen war, schrieb W. Bolyai an Gauss abermals: *am 16. Jäner 1832*:

„Dieses Werkchen hatte ich zu gleicher Zeit mit dem ersten Briefe abgeschickt und wusste lange nicht, wo es in den fatalen Cholera-Umständen hingekommen sey — nun schicke ich es durch Post unter Recepisse zum H. Joseph von Zeyk mit der Bitte, dass er einen Weg ausfindig mache, mein Werk (sobald es herausкömmt) Dir kostenfrei einzuhändigen. — Wegen der Choleraumstände habe ich aus Ungarn kein Papier bekommen können. . . . Mein Sohn war nicht gegenwärtig, wie sein Werkchen gedruckt wurde: er liess die Errata (die hinten sind) drucken; ich habe die meisten, um Dir weniger lästig zu sein, mit Feder corrigirt. — Er schreibt aus Lemberg, dass er nachdem manches vereinfacht und eleganter gemacht, und die Unmöglichkeit, a priori zu bestimmen, ob das Ax. XI wahr sey oder nicht, bewiesen habe. Verzeihe mir dieser Angelegenheit wegen — mein Sohn hält mehr von Deinem Urtheile, als von ganz Europa — und harret allein darauf. Ich bitte Dich innigst mich bald von Deinem Urtheile zu benachrichtigen, welchem gemäss ich ihm nach Lemberg schreiben soll."

---

1) In einer Garnison forderten ihn 13 Cavallerie-Officiere; er nahm die Forderungen an, mit der Bedingung, dass ihm gestattet werde, nach je zwei Duellen ein Stück auf der Violin zu spielen. — Er blieb Sieger über Alle.



Nach einer Pause von 24 Jahren schreibt Gauss *am 6. März 1832*[1]):

„Durch Deine beiden, mir durch Herrn Zeyk zugestellten Briefe hast Du mein alter, mir unvergesslicher Freund mich sehr erfreut. Ich zögerte nach Empfang des ersten, Dir sogleich zu antworten, weil ich erst die Ankunft der versprochenen kleinen Schrift erwarten wollte. . . .

Jetzt Einiges über die Arbeit Deines Sohnes.

Wenn ich damit anfange „dass ich solche nicht loben darf" so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen: aber ich kann nicht anders; sie loben, hiesse mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen, zum Theil schon seit 30—35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der That bin ich dadurch auf das Aeusserste überrascht. Mein Vorsatz war, von meiner eigenen Arbeit, von der übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht war, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt, und ich habe nur wenig Menschen gefunden, die das, was ich ihnen mittheilte, mit besonderem Interesse aufnahmen. Um das zu können, muss man erst recht lebendig gefühlt haben, was eigentlich fehlt, und darüber sind die meisten Menschen ganz unklar.

Dagegen war meine Absicht mit der Zeit alles so zu Papier zu bringen, dass es wenigstens mit mir dereinst nicht unterginge.

Sehr bin ich also überrascht, dass diese Bemühung mir nun erspart werden kann und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist.

Sehr prägnant und abkürzend finde ich die Bezeichnungen: doch glaube ich, dass es gut sein wird für manche Hauptbegriffe nicht bloss Zeichen oder Buchstaben, sondern bestimmte Namen festzusetzen, und ich habe bereits vor langer Zeit an Einige solcher Namen gedacht. — So lange man die Sache nur in unmittelbarer Anschauung durchdenkt, braucht man keine Namen oder Zeichen; die werden erst nöthig, wenn man sich mit Anderen verständigen will. — So könnte z. B. die Fläche, die dein Sohn F. nennt, eine Parasphäre, die Linie $L$ ein Paracykel genannt werden: es ist im Grunde Kugelfläche oder Kreislinie von unendlichem Radius. Hypercykel könnte der Complexus aller Punkte heissen, die von einer Geraden, mit der sie in einer Ebene liegen, gleiche Distanz haben; ebenso Hypersphäre. Doch

1) Gauss letzter Brief war aus dem Jahre 1808.

das sind alles nur unbedeutende Nebensachen: die Hauptsache ist der Stoff, nicht die Form.

In manchem Theile der Untersuchung habe ich etwas andere Wege eingeschlagen. . . .

(Hier folgt ein geometrischer Beweis von Gauss, den Herr Prof. Dr. Paul Stäckel in Kiel in den Göttinger Nachrichten 1897 herausgegeben hat.)

. . . Es steht Dir frei es Deinem Sohne mitzutheilen: jedenfalls bitte ich Dich, ihn herzlich von mir zu grüssen und ihm meiner besonderen Hochachtung zu versichern, — fordere ihn aber doch zugleich auf sich mit der Aufgabe zu beschäftigen:

Den Kubikinhalt des Tetraeders (von vier Ebenen begrenzten Raumes) zu berechnen. Da der Flächeninhalt eines Dreiecks sich so einfach angeben lässt, so hätte man erwarten sollen, dass es auch für diesen Kubikinhalt einen eben so einfachen Ausdruck geben werde: aber diese Erwartung wird, wie es scheint, getäuscht.

Um die Geometrie vom Anfange an ordentlich zu behandeln, ist es unerlässlich die Möglichkeit eines Plannums zu beweisen; die gewöhnliche Definition enthält zu viel und implicirt eigentlich subreptive schon ein Theorem. Man muss sich wundern, dass alle Schriftsteller von Euklid bis auf die neusten Zeiten so nachlässig dabei zu Werk gegangen sind: allein diese Schwierigkeit ist von durchaus verschiedener mit der Schwierigkeit zwischen $\Sigma$ und $S$ zu entscheiden, und jene ist nicht gar schwer zu heben. — Gerade in der Unmöglichkeit, zwischen $\Sigma$ und $S$ a priori zu entscheiden, liegt der klarste Beweis, dass Kant unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei nur Form unserer Anschauung. Einen anderen eben so starken Grund habe ich in einem kleinen Aufsatz angedeutet, der in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen 1831 steht, Stück Seite 625. . . . . ."

Im Besitze eines Exemplars des Appendix, welches handschriftliche Aufzeichnungen von Johann und Wolfgang Bolyai enthält, theile ich die Wesentlichsten hier mit.

Dieses Exemplar scheint vom Vater an den Sohn nach Lemberg wegen Feststellung des Titels und der Figurentafel gesendet worden zu sein.

Die Innenseite des Umschlages ist von Johann Bolyai beschrieben und enthält folgende:

„Anmerkung. Des Verfassers Schuld könnte es doch offenbar nie sein, wenn allenfalls ein Urtheil hierüber bloss deshalb schief und geringschätzend ausfiele, weil betreffender Recensent nicht gehörig Meister der Sache geworden ist.

Zur Erleichterung der Beurtheilung und Vorbereitung wird es gut

sein, den mit dem Wesen der Sache noch nicht Vertrauten, das vom k. k. Oberstlieutnant Freiherr von Vega am Ende des 2. Bandes seiner hochgeschätzten Vorlesungen über die Mathematik anempfohlene Werk unter dem Titel: Kritik der Parallel-Theorie von Joh. Jos. Jg. Hoffmann, Jena 1807, fleissig lesen; indem selbst sonst berühmte Mathematiker hinsichtlich dieses Gegenstandes nicht nur ganz befangen und im Dunkeln, sondern Anfangs sogar unempfänglich und gleichgültig sind — die sich jedoch dann niemals zur Classe der Geometer vom ersten Range bekennen dürfen."

Es folgen dann zwei Blatt Schreibpapier: Auf dem ersten ist der Titel des Appendix, genau wie im Tentamen abgedruckt, von Johann Bolyai geschrieben. — Das nächste Blatt mit anderer Tinte von Wolfgang Bolyai geschrieben, enthält einen Titel lautend: Appendix prima. Scientia spatii absolute vera, nulli quoad parallelas supposito Axiomati (Euclideo vel alii simili) innixa. Auctore Johanne Bolyai de eadem Geometrarum in Exercitu Cesareo Regio Austriaco Castrensium Locumtenente Primario. Auctoris Filio; es scheint der vom Vater gewählte Titel zu sein. — Die Figurentafel ist gezeichnet und Fig. 23 bloss in Bleistift skizziert. — Im Texte sind am Rande meist unleserliche Bemerkungen gemacht. Das Exemplar scheint eine Art Correkturexemplar gewesen zu sein; dasselbe ist mehrfach durchstochen, wie diess bei Sendungen vorkommt, die aus mit Epidemien verseuchten Gegenden anlangen.

Am 20. April 1835 schreibt Bolyai gelegentlich der Uebersendung der zwei Bände seines Tentamens an Gauss: „... Am Ende des 2. Bandes ist nebst der Erleuchtung mancher im ersten gegebenen Begriffe, auch eine gewisse Einigkeit bei der Trigonometrie nach dem Gedanken meines Sohnes. — Gerne hätte ich die Auflösung des Tetraeders drucken lassen, welche mein Sohn noch ein Jahr vor der Herausgabe seines Appendix fand, aber die Formeln, die ich sah, waren zu verwickelt, und ich weiss sie nicht. — Und über alles hätte ich den Beweis davon drucken lassen, dass es absolut unmöglich sei, dem menschlichen Auge es einzusehen, ob das XI. Axiom wahr sei, oder nicht: mein Sohn behauptet, den evidenten Beweis davon zu haben, — ich kann sonst nichts beweisen, als dass sowohl das Sein, als das Nichtsein dieses Satzes mit den übrigen euklidischen Axiomen gleich bestehen könne, und dadurch zwei verschiedene Systeme (jedes für sich insofern gleichbestehend) seien, welches ich schon seit vielen Jahren her weiss." .... Schon am Ende dieses Briefes klagt Bolyai seinem Freunde über die Herzlosigkeit seines Sohnes.

Weiter findet sich im Briefwechsel zwischen Gauss und Bolyai nichts, ausser, dass das Verhältnis zwischen Vater und Sohn unleidlich wurde und soweit ausartete, dass der Sohn den Vater zum Duell forderte.

Im Jahre 1838 betheiligte sich Johann, sowie auch dessen Vater an einer Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowsky'schen Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig, über die Theorie des Imaginären, — Beide ohne einen Erfolg zu erringen.

Manchmal versuchte er, sich aus den sinnlichen Genüssen herauszureissen und sich der Mathematik wieder zuzuwenden. — Unter seinen Papieren hat sich der Titel gefunden: „Principia doctrinae novae quantitatum imaginariarum perfecte unique satisfacientis, aliaeque disquisitiones analyticae et analytico-geometricae cardinales gravissimaeque: auctore Johanne Bolyai de eadem etc. Vindobonae vel Maros-Vásárhelyini 1853. Doch war ausser dem Titelblatt nichts vorhanden.

Ferner versprach er ein Buch herauszugeben unter dem Titel: Lehre der Lehre (ungarisch: Tan-Tan), das alle Bücher entbehrlich machen sollte. — Mit diesen und ähnlichen Gegenständen, die gar keinen Sinn haben, sind viele Bogen vollgeschrieben.

J. Bolyai war verheiratet. — Von Statur mittelgross, hatte er auch in späteren Zeiten, trotz der fast bäuerlichen Kleidung, eine militärische Haltung. Seine materiellen Verhältnisse waren stets sehr ungünstig, was die mehrfachen Bittgesuche an seine Behörde um Unterstützung bezeugen.

Ein eigener Cynismus ergriff sein ganzes Wesen, und so starb er, mit sich und der Welt zerfallen, am 27. Januar 1860.

Im Jahre 1894 wurde sein fast vergessenes Grab von der ungarischen Mathematisch-Physikalischen Gesellschaft durch einen Grabstein geziert.

Bolyais epochemachende Abhandlung ist, wie erwähnt, 1832 erschienen, — war aber bis 1866 fast ganz vergessen, bis Prof. Richard Baltzer in der zweiten Auflage seiner Elemente der Mathematik 1867 auf dieses Kleinod mathematischen Scharfsinns aufmerksam machte. — Durch diesen angeregt wandte sich

1867 J. Hoüel an mich um Nachrichten über das Leben und die Werke der beiden Bolyai, und veranlasste mich zur Herausgabe einer Biographie beider, die in Grunerts Archiv für Math. u. Phys erschienen ist (48. Band, S. 217).

1868 übersetzte J. Hoüel den Appendix und die Biographie ins Französische. Er war es auch, der den Minister Baron Joseph Eötvös veranlasste, die Schriften der beiden Bolyai vom ev. ref. Collegium in M. V. zu verlangen, um sie der ungarischen Akademie zur Durchsicht zu übergeben.

Im selben Jahre wurde der Appendix von Battaglini, sowie die Biographie von Angelo Forti italienisch herausgegeben.

1872 bearbeitete J. Frischauf den Appendix in deutscher Sprache (bei Teubner, Leipzig).

1884 veröffentlichte Prof. K. Szily in den Schriften der ung. Akademie eine Biographie Wolfgang Bolyais, in der auch der Sohn Erwähnung findet.

1891 Juni erschien von Dr. George Bruce Halsted zu Austin in Texas die erste englische Uebersetzung.

1895 wurde der Appendix in Tokio ins Japanische übersetzt.

1896 erschien die vierte Auflage der englischen Uebersetzung. — Im Juli unternahm Herr Prof. Halsted eine Reise nach Maros Vásárhely, um nähere Daten über Johann Bolyai zu sammeln, bei welcher Gelegenheit er mich mit seinem Besuche beehrte.

1897 im Februar legte Herr Prof. Julius König den ersten Band der neuen Ausgabe (den arithmetischen Theil) des Tentamen der ungarischen Akademie vor. — In dieser Ausgabe wird der Appendix erst im 2. Bande erscheinen.

In demselben Jahr hat Herr Prof. Dr. Josef Suták auf meine Aufforderung den Appendix ins Ungarische übersetzt und mit einer Einleitung und Erläuterungen versehen. Dieser Ausgabe ist auch der lateinische Original-Text des Appendix vorgedruckt. Sie ist auf meine Kosten erschienen. Die einzige materielle Unterstützung, die mir bei der Herausgabe zu Theil geworden ist, verdanke ich Herrn Fabrik-Director P. Müller, wofür ich ihm hier meinen Dank ausspreche.

Da sich durch diese Ausgabe ein von mir seit dreissig Jahren gehegter Wunsch erfüllt hat: dass die Leistung eines der besten Söhne seines Vaterlandes in der engeren Heimat jene Verbreitung und Anerkennung finde, die ihm die übrigen Kulturvölker bedingungslos zollen — kann ich nicht umhin Herrn Prof. J. Suták meinen aufrichtigsten Dank dafür auszusprechen.

Ausser den schon erwähnten Quellen habe ich noch die Biographien W. Bolyais von den Herren J. Koncz und Kol. Szily theilweise benützt.

# DIE BERECHNUNG

DER

# IRRATIONALEN QUADRATWURZELN

UND DIE

# ERFINDUNG DER KETTENBRUECHE.

VON

**G. WERTHEIM.**

Drei wesentlich verschiedene Methoden sind vor der Erfindung der Logarithmen zur angenäherten Berechnung irrationaler Quadratwurzeln gegeben worden. Die erste besteht darin, dass man die vorgelegte Zahl $N$ mit einer grossen Quadratzahl $q^2$ multiplicirt, aus $Nq^2$ mittels der Formel $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$ die Wurzel zieht und den Rest, der sich dabei ergiebt, vernachlässigt. Der erhaltene Wurzelwerth wird sodann durch $q$ dividirt, und der Quotient ist ein Näherungswerth der Wurzel aus $N$, um so genauer, je grösser $q^2$ war. So verfahren z. B. der Marokkaner Ibn Albanna[1]), der italienische Mathematiker Maurolycus[2]) u. a. Wird für $q$ eine Potenz von 10 genommen, was zuerst in der durch Johannes Hispalensis aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzten Schrift Liber Algorismi de pratica arismetrice[3]) (noch unbekannten Verfassers) geschehen ist, so läuft diese Methode im Wesentlichen auf die jetzt allgemein angewandte hinaus.

Eine zweite Methode ist von Nicolas Chuquet erfunden worden. In dem Abschnitt „La rigle des nombres moyens" p. 101 seiner „Triparty en la science des nombres" bemerkt er, dass von dem Bruch $\frac{1}{2}$ zwei Bruchreihen ausgehen, eine fallende $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$ und eine steigende $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$ Weiter giebt er den Satz, dass der Bruch $\frac{a+c}{b+d}$ stets zwischen den Brüchen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ liegt. Das setzt ihn in den Stand, zwischen zwei beliebigen Zahlen einen Mittelwerth einzuschieben, und mittels dieser Betrachtung zieht er auf S. 111 des genannten Werks die Quadratwurzel aus 6. Da dieselbe zwischen 2 und 3 liegt, so nimmt er zunächst $2\frac{1}{2}$ an. Das Quadrat von $2\frac{1}{2}$ ist $6\frac{1}{4}$, also zu gross; daher muss für $\sqrt{6}$ eine kleinere Zahl $2\frac{1}{3}$ genommen werden. Da sich diese als zu klein erweist, indem $\left(2\frac{1}{3}\right)^2 = 5\frac{4}{9} < 6$ ist, so ist ein Mittelwerth zwischen $2\frac{1}{3}$ und $2\frac{1}{2}$ zu wählen; ein solcher ist $2\frac{1+1}{3+2} = 2\frac{2}{5}$. Das Quadrat dieser

1) Le Talkhys, S. 23.

2) Francisci Maurolyci Arithmeticorum libri duo, Venetiis 1575, p. 112.

3) Trattati d'Aritmetica, pubblicati da Boncompagni. II, p. 86.

Zahl erweist sich als zu klein, folglich ist ein zwischen $2\frac{2}{5}$ und $2\frac{1}{2}$ liegender Werth zu versuchen; ein solcher ist $2\frac{3}{7}$. In dieser Weise fährt Chuquet fort, bis sich ihm $2\frac{89}{198}$ als hinlänglich genauer Werth von $\sqrt{6}$ ergiebt.

Chuquet's Verfahren hat Estienne de la Roche[1]) wörtlich seiner Arithmetik einverleibt, und aus diesem Buche hat es wohl der spanische Mathematiker Joan Perez de Moya[2]) gelernt, der es in seiner Arithmetik auseinander setzt. Die Langwierigkeit des Verfahrens erklärt es zur Genüge, dafs Chuquet's Methode keinen sonderlichen Beifall gefunden hat und bald in Vergessenheit gerathen ist; wenigstens habe ich dieselbe bei keinem Schriftsteller aufser den genannten erwähnt gefunden.

Um die dritte Methode darzustellen, denken wir uns die vorgelegte Zahl $N$ auf die Form $a^2 + r$ gebracht, wo $a^2$ die grösste in $N$ enthaltene Quadratzahl, also $r < 2a + 1$ sei. Setzen wir dann $\sqrt{a^2 + r} = a + x$, so ergiebt sich durch Quadrirung und Vernachlässigung des Gliedes $x^2$, dass $r > 2ax$, also $x < \frac{r}{2a}$ ist. Daher ist $a + \frac{r}{2a}$ eine obere Grenze des gesuchten Wurzelwerths. Wird $a + \frac{r}{2a} = a'$ gesetzt, so kann man $N$ auf die Form $a'^2 - r'$ bringen; dann ist $a'' = a' - \frac{r'}{2a'}$ ein zweiter oberer Grenzwerth, der dem gesuchten Wurzelwerth näher als $a'$ liegt, da sein Quadrat sich von $N$ nur um $\left(\frac{r'}{2a'}\right)^2$ unterscheidet, während $a'^2 - N = \left(\frac{r}{2a}\right)^2$ ist. So fortfahrend findet man eine Reihe von Zahlen, die, sämmtlich grösser als die gesuchte Wurzel, sich dem Werthe derselben unbegrenzt nähern.

Auf ähnliche Weise lassen sich untere Grenzen für die irrationalen Quadratwurzeln angeben. Der nächstliegende untere Grenzwerth von $\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r}$ ist $a + \frac{r}{2a+1}$. Es ergiebt sich nämlich

$$\left(a + \frac{r}{2a+1}\right)^2 = a^2 + \frac{2ar}{2a+1} + \left(\frac{r}{2a+1}\right)^2$$

$$= a^2 + r - \frac{r}{2a+1} + \left(\frac{r}{2a+1}\right)^2 = a^2 + r - \frac{r}{2a+1}\left(1 - \frac{r}{2a+1}\right),$$

und da $r < 2a + 1$ vorausgesetzt wird, so ist der erhaltene Ausdruck $< a^2 + r$, d. i. $< N$, also $a' = a + \frac{r}{2a+1} < \sqrt{N}$. Von $a'$ ausgehend

1) Larismethique nouvellement composée par maitre Estienne de la roche etc. Lyon, 1520, fol. 32.

2) Arithmetica, practica y speculativa. Granada 1590, fol. 227.

kann man andere Grenzwerthe ermitteln, die, sämmtlich $< \sqrt{N}$, sich dem Werthe von $\sqrt{N}$ unbegrenzt nähern.[1])

Diese Methode ist schon von Heron von Alexandrien[2]) angewandt worden. Heron setzt $\sqrt{a^2 + r} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2+r}{a}\right)$, welcher Ausdruck mit $a + \frac{r}{2a}$ identisch ist, und fügt hinzu, dass man von dem so erhaltenen Näherungswerthe ausgehend durch dieselbe Formel einen zweiten, dritten u. s. w. erhalte. Nach den Darlegungen von Friedrich Hultsch[3]) ist es sogar wahrscheinlich, dass sich schon Archimedes dieser Methode bedient hat, um $\sqrt{3}$ zwischen zwei Grenzen einzuschliessen. Im dritten Satze seiner Kreismessung giebt er nämlich als untere Grenze $\frac{265}{153}$, als obere $\frac{1351}{780}$ für $\sqrt{3}$ an. Wie er zu diesen Werthen gelangt ist, darüber lassen sich bei dem Fehlen jeder direkten Mittheilung nur Vermuthungen anstellen. Hultsch legt dar, dass zunächst die obere Grenze bestimmt sei; Archimedes habe die Ungleichung $\sqrt{a^2 - r} < a - \frac{r}{2a}$ auf den Fall $a = \frac{5}{3}$ angewendet; dadurch ergiebt sich die obere Grenze $\frac{26}{15}$, und für diesen Werth von $a$ liefert dieselbe Ungleichung weiter $\frac{1351}{780}$. Diese obere Grenze, meint nun Hultsch, habe dann zur Bestimmung der unteren dienen müssen, und zwar habe Archimedes die Ungleichung $\sqrt{a^2 - r} > a - \frac{r}{2a-1}$ auf den Fall $a = 26$, $r = 1$[4]) angewandt. Die Rechnung ergiebt für diese Annahme $\sqrt{675} > 26 - \frac{1}{51}$, und daraus folgt $\frac{1}{15}\sqrt{675}$, d. i. $\sqrt{3} > \frac{26}{15} - \frac{1}{51.15}$, also $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$. Es ist möglich, dass Archimedes so gerechnet hat, obwohl der Weg ziemlich verschlungen ist, indem statt 3 erst $15^2 \cdot 3$ gesetzt und dann die Wurzel durch 15 dividirt ist. Vielleicht ist Archimedes bei seiner Berechnung der unteren Grenze gleichfalls von $\frac{5}{3}$ ausgegangen und hat sich zur Auffindung eines genaueren unteren Grenzwerthes der

1) Da es hier nicht auf eine vollständige Theorie des Verfahrens ankommt, so bleibt der Fall $N = a^2 - r$, in welchem die Grenzwerthe $a - \frac{r}{2a}$ und $a - \frac{r}{2a-1}$ sein würden, unberücksichtigt.

2) Paul Tannery, Un fragment des métriques de Heron. Schlömilchs Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. Bd. 39.

3) Die Näherungswerthe irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes. Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 28. Juni 1893.

4) Eine direkte Anwendung der Formel auf den Fall $a = \frac{26}{15}$, $r = \frac{1}{225}$ würde $\sqrt{3} > \frac{26}{15} - \frac{\frac{1}{225}}{\frac{52}{15} - 1}$, d. i. $\sqrt{3} > \frac{961}{555}$ ergeben.

Ungleichung $\sqrt{a^2+r} > a + \frac{r}{2a+1}$ oder vielmehr der hier geltenden Ungleichung $\sqrt{a^2+r} > a + \frac{r}{a+[a]+1}$ bedient, wo $[a]$ die grösste in $a$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet. Er hätte dann

$$\text{erstens} \quad \sqrt{\left(\tfrac{5}{3}\right)^2 + \tfrac{2}{9}} > \tfrac{5}{3} + \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{3}+1+1}, \text{ d. i. } \sqrt{3} > \tfrac{19}{11},$$

$$\text{zweitens} \quad \sqrt{\left(\tfrac{19}{11}\right)^2 + \tfrac{2}{121}} > \tfrac{19}{11} + \frac{\frac{2}{121}}{\frac{19}{11}+1+1}, \text{ d. i. } \sqrt{3} > \tfrac{71}{41},$$

$$\text{drittens} \quad \sqrt{\left(\tfrac{71}{41}\right)^2 + \tfrac{2}{1681}} > \tfrac{71}{41} + \frac{\frac{2}{1681}}{\frac{71}{41}+1+1}, \text{ d. i. } \sqrt{3} > \tfrac{265}{153}$$

erhalten.

Die meisten Schriftsteller, welche die Methode besprochen haben, haben sich auf die Berechnung einer Grenze, meist der oberen, beschränkt, was für praktische Zwecke ja genügt.

Von den Griechen ist die oben in ihren Grundzügen beschriebene Methode zu den Arabern[1]) und von diesen zu den Italienern[2]) übergegangen. Die auf dieselbe bezüglichen Stellen aus den Werken verschiedener italienischer Autoren hat Favaro in seiner Arbeit: Notizie storiche sulle frazioni continue[3]) wörtlich abgedruckt.

Mit ganz besonderer Sorgfalt hat Pietro Antonio Cataldi in seinem Trattato del modo brevissimo di trovare la Radice quadra delli numeri (Bologna, 1613) die Methode auseinander gesetzt und an zahlreichen Beispielen erläutert. Mit theoretischen Betrachtungen giebt er sich nicht ab; die verspricht er zu einer passenderen Zeit zu geben, wo er sich der Hülfe intelligenter Schreiber werde bedienen können; denn er sei sehr schwach und könne nur wenig und unvollkommen schreiben. Diese Schwäche hindert ihn aber nicht, die mühseligsten Rechnungen, zuweilen mit 15 bis 20stelligen Zahlen durchzuführen und die Beispiele so zu häufen, dass man merkt, dass er nicht bloss ein Rechner von seltener Gewandtheit und Furchtlosigkeit ist, sondern thatsächlich auch Freude am Rechnen selbst

1) Alkarkhi, Kâfî fîl Hisâb, Deutsch von Hochheim. II, S. 14. Ibn Albannâ, Le Talkhys, S. 21. Beha-eddin, Ausgabe von Nesselmann, S. 15. Alkalçâdi, Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei XII, S. 402.

2) Leonardo Pisano, Bd. I, S. 353. Lucas Paciuolo, Summa etc. Beide Ausgaben Carta 45 recto. Hieronimo Cardano, Practica Arithmetice, Cap. 23. Francesco Ghaligai, Pratica d'Arithmetica, Carta 21 in allen 3 Ausgaben. Nicolo Tartaglia, General trattato, Parte II, fol. 25 verso. Giuseppe Unicorno, Arithmetica universalis etc. Bombelli erwähnt die Methode nicht.

3) Bullettino Boncompagni, T. VII (1874).

empfindet. Er hat die Bestimmung der oberen und der unteren Grenzwerthe der irrationalen Quadratwurzeln auf Grund dieser Beispiele nach allen Richtungen untersucht, auch gezeigt, wie man aus einem oberen Grenzwerth nach Belieben einen oberen oder einen unteren und ebenso aus einem unteren einen oberen oder einen unteren von grösserer Genauigkeit herleiten kann. Genug, er hat der Methode, die uns hier beschäftigt, etwa die Hälfte seiner aus 140 engbedruckten Folioseiten bestehenden Arbeit gewidmet.

Durch die Erwägung, dass $\sqrt{21\frac{1}{2}}$ weniger als $4 \mathbin{\&} \frac{5\frac{1}{2}}{8}$, aber mehr als $4 \mathbin{\&} \frac{5\frac{1}{2}}{9}$ beträgt, dass man also sich dem wahren Werthe von $\sqrt{21\frac{1}{2}}$ nähern wird, wenn man dem Zähler $5\frac{1}{2}$ eine zwischen 8 und 9 liegende Zahl, etwa $8 \mathbin{\&} \frac{5\frac{1}{2}}{8}$ als Nenner giebt, wird dann Cataldi naturgemäfs dazu geführt, die irrationale Quadratwurzel $\sqrt{a^2 + r}$ durch den Kettenbruch $a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \cdots}}$, wofür er $a \mathbin{\&} \cfrac{r}{2a \mathbin{\&} \cfrac{r}{2a \mathbin{\&} \cdots}}$ oder, des bequemeren Drucks wegen, $a \mathbin{\&} \frac{r}{2a\,\cdot} \mathbin{\&} \frac{r}{2a\,\cdot}$ schreibt, auszudrücken.[1])

Cataldi verfährt in dem zweiten, der Kettenbruch-Entwicklung bestimmten Theil seiner Arbeit mit derselben Gründlichkeit wie im ersten. Ohne theoretische Betrachtungen, lediglich auf Beispiele gestützt, zeigt er[2]), dass die Näherungswerthe ungerader Ordnung eine steigende Reihe bilden und sämmtlich kleiner als der gesuchte Wurzelwerth sind, während die Näherungswerthe gerader Ordnung eine fallende Reihe bilden und sämmtlich grösser als der Wurzelwerth sind, auch dass die Wurzel, die immer zwischen zwei aufeinander folgenden Näherungswerthen enthalten ist, dem folgenden näher liegt als dem vorhergehenden. Ebenso deckt er den Zusammenhang auf, in welchem die durch das Heronische Verfahren gelieferten Näherungswerthe zu denjenigen stehen, welche die Kettenbruch-Entwicklung liefert.

Bezeichnet man nämlich die Näherungswerthe des Kettenbruchs $a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \cdots}}$ mit $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \cdots$, wo dann $p_0 = 1$, $q_0 = 0$, $p_1 = a$,

1) Aehnlich wie Cataldi durch einen Punkt ausdrückt, dass alles Folgende zu der mit dem Punkt versehenen Zahl gehöre, setzt Christoff Rudolff einen Punkt hinter das Wurzelzeichen, um auszudrücken, dass dasselbe sich auf alles Folgende beziehe. Er schreibt S. 141 seiner Coss $\sqrt{}.\ 12 + \sqrt{140}$ für $\sqrt{12 + \sqrt{140}}$.

2) l. c. S. 75 ff.

$q_1 = 1$, und allgemein

$$p_n = 2ap_{n-1} + rp_{n-2}, \; q_n = 2aq_{n-1} + rq_{n-2}$$

ist, und werden ferner die Näherungswerthe, welche die Heronische Methode liefert, mit $N_1, N_2, N_3, \ldots$ bezeichnet, wo also $N_1 = a$, $N_2 = a + \frac{r}{2a}$,

$N_3 = \left(a + \frac{r}{2a}\right) - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)}, \cdots$ ist, so besteht der Zusammenhang

$$N_1 = \frac{p_1}{q_1}, \; N_2 = \frac{p_2}{q_2}, \; N_3 = \frac{p_4}{q_4}, \; N_4 = \frac{p_8}{q_8}, \; \cdots, \; N_k = \frac{p_{2^{k-1}}}{q_{2^{k-1}}}.$$

Ebenso lässt sich ein Zusammenhang zwischen den unteren Grenzwerthen beider Methoden herleiten, und alle diese Beziehungen werden von Cataldi an Beispielen behandelt.

Trotzdem nun aber die Näherungswerthe der älteren Methode sich unter denjenigen des Kettenbruchs vorfinden, kann man von einer Erfindung der Kettenbrüche erst bei einem Schriftsteller sprechen, der wirklich ein solches Gebilde in seinem ganzen Verlauf im Geiste vor sich hatte, der also, — wenn es sich um Näherungswerthe handelt — diese Werthe sämmtlich in richtiger Reihenfolge nach dem Bildungsgesetz des Kettenbruchs berechnet hat. Ob er für den Kettenbruch eine bestimmte, etwa eine der heutigen ähnliche Form vorgeschlagen hat, kommt erst in zweiter Linie in Betracht.

Als Erfinder der Kettenbrüche wird jetzt allgemein Cataldi angesehen, dessen Leistungen in der Sache ich oben kurz geschildert habe. Dass später unabhängig von ihm der Nürnberger Daniel Schwenter in seiner *Geometria practica nova*[1]), deren erste Auflage 1618 erschienen ist, sich der Kettenbrüche bediente, um irreducibele Brüche durch Näherungswerthe in kleineren Zahlen auszudrücken, und dass noch später der Engländer Brouncker die Kettenbrüche zum dritten Male erfunden hat, als er das von Wallis gefundene unendliche Product für $\frac{4}{\pi}$ in einen Kettenbruch verwandelte, das Alles würde den Ruhm des Cataldi, wenn er wirklich der erste Erfinder wäre, nicht schmälern.

Für die Ansprüche des Cataldi ist zuerst Libri[2]) in schwungvollen Worten aufgetreten; er nimmt sogar die ältere, schon von Heron angewandte Methode für Cataldi in Anspruch. Ihm hat sich, was die Frage der Erfindung der Kettenbrüche betrifft, Favaro in der oben erwähnten

---

1) Traktat II, S. 58.

2) Histoire des Sciences mathématiques en Italie. T. IV, p. 92.

Arbeit angeschlossen, ebenso S. Günther[1]), und seitdem ist der Anspruch Cataldis nicht bestritten worden.[2]) Ich werde aber zeigen, dass Bombelli schon im Jahre 1572, also 41 Jahre früher als Cataldi sich der unendlichen Kettenbrüche bedient hat, um dem Werthe einer irrationalen Quadratwurzel beliebig nahe zu kommen.

Das berühmte Werk „L'Algebra" des Rafaele Bombelli, das in erster Auflage 1572, in zweiter Auflage[3]) 1579 in Bologna erschienen ist, besteht bekanntlich aus drei Büchern, von denen das erste die Operationen mit Wurzelgrössen, besonders die Ausziehung von Wurzeln, das zweite die Auflösung der Gleichungen der ersten vier Grade behandelt, während das dritte eine Sammlung von 274 Aufgaben ist, von denen 146 aus Diophants Arithmetik entnommen sind. Die grossen Verdienste Bombellis auf dem Gebiete der Theorie der Gleichungen dritten und vierten Grades haben naturgemäss die Aufmerksamkeit der Leser auf das zweite Buch concentrirt, und so erklärt es sich vielleicht, dass eine Stelle des ersten Buches bis jetzt wenig beachtet ist, in welcher Bombelli lehrt, wie Quadratwurzeln mittels unendlicher Kettenbrüche ausgezogen werden, und in welcher er, zwar an einem bestimmten Zahlenbeispiel aber doch allgemein, die Richtigkeit des Verfahrens auch beweist. Favaro hat die Stelle in seiner mehrfach erwähnten Arbeit abgedruckt, seltsamer Weise ohne sie nach Gebühr zu würdigen. Er stellt Bombelli mit seinen Vorgängern, die nur eine Darstellung der Heronischen Methode gegeben haben, in eine Reihe. Favaro merkt nicht, dass schon Bombelli das alte Verfahren durch die Kettenbruch-Entwicklung ersetzt hat, er meint, erst Cataldi habe diesen wichtigen Schritt gethan.

Bei der Wichtigkeit der Sache scheint es angemessen, die betreffende Stelle von Bombellis Algebra im Wortlaut und mit beigefügter Uebersetzung zu geben. Seite 35 heisst es:

| | |
|---|---|
| Modo di formare il rotto nella estrattione delle Radici quadrate. | Ueber die Art, den Bruch bei der Ausziehung der Quadratwurzeln zu bilden. |
| Molti modi sono stati scritti da gli altri autori de l' uso di formare il rotto; l' uno tassando e accusando l' altro (al mio | Viele Methoden sind von den anderen Schriftstellern über die Bildungsweise des Bruchs angegeben worden, und der eine tadelt den andern und hat an ihm etwas |

1) Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche. 1872.

2) M. Cantor, Vorlesungen. Bd. II, S. 694ff.

3) Vgl. eine Note von Favaro in der Bibliotheca mathematica 1893, S. 15 und eine Bemerkung von P. Riccardi ebenda S. 64.

giudicio) senza alcun proposito, perche tutti mirano ad un fine; E ben vero che l' una è più breve dell' altra, ma basta che tutte suppliscono, e quella ch' è più facile, non è dubbio ch' essa sarà accettata da gli huomini, e sarà posta in uso senza tassare alcuno; perche potria essere, che hoggi io insegnassi una regola, la quale piacerebbe più dell' altre date per il passato, e poi venisse un altro, e ne trovasse una più vaga, e facile, e cosi sarebbe all' hora quella accettata, e la mia confutata, perche (come si dice) la esperienza ci è maestra, e l' opra loda l' artefice.

auszusetzen, nach meiner Ansicht ganz ohne Grund, da alle denselben Zweck verfolgen. Wenn auch die eine Methode kürzer als die andere ist, so genügt es doch, dass alle ihren Zweck erfüllen, und diejenige, welche die leichtere ist, wird ohne Zweifel von den Menschen angenommen und, ohne einen andern zu tadeln, gebraucht werden. Denn es könnte sein, dass ich heute eine Regel lehre, welche mehr als die von meinem Vorgänger gegebenen gefällt, und dass sodann ein anderer kommt und eine schönere und leichtere findet, und so würde dann diese letztere angenommen und die meinige verworfen werden, weil (wie man sagt) die Erfahrung unsere Lehrerin ist und das Werk den Meister lobt.

Però metterò quella che più à me piace per hora, e sarà in arbitrio de gli huomini pigliare qual voranno:

Ich werde darum jene darlegen, welche mir jetzt am besten gefällt, und es wird von den Leuten abhängen zu nehmen, welche sie wollen werden.

Dunque venendo al fatto dico. Che presuposto, che si voglia il prossimo lato di 13, che sarà 3, e avanzerà 4, il quale si partirà per 6 (doppio del 3 sudetto) ne viene $\frac{2}{3}$, e questo è il primo rotto, che si hà da giongere al 3, che fà $3\frac{2}{3}$, ch' è il prossimo lato di 13, perche il suo quadrato è $13\frac{4}{9}$, ch' è superfluo $\frac{4}{9}$, ma volendosi più approssimare, al 6, doppio del 3 se gli aggionga il rotto, cioè li $\frac{2}{3}$, e sarà $6\frac{2}{3}$, e per esso

Um nun zur Sache zu kommen, sage ich, es werde vorausgesetzt, man wolle annäherungsweise die Quadratwurzel aus 13 ziehen. Dieselbe ist 3, und es bleibt der Rest 4, welcher bei der Division durch 6 (dem Doppelten der oben genannten 3) $\frac{2}{3}$ liefert, und dies ist der erste Bruch. Diesen hat man zu 3 zu addiren, was $3\frac{2}{3}$ giebt, und das ist der erste Näherungswerth der Wurzel aus 13, weil sein Quadrat $13\frac{4}{9}$ ist, was um $\frac{4}{9}$ zu viel ist. Wollen wir uns dem gesuchten Werth noch mehr nähern, so addiren wir zu 6, dem Doppelten von 3, den erhaltenen Bruch, d. i. $\frac{2}{3}$, was $6\frac{2}{3}$

partendosi il 4, che avanza dal 9 sino al 13, ne viene $\frac{3}{5}$, e questo si gionge al 3, che fà $3\frac{3}{5}$, ch' è il lato prossimo di 13, di cui il quadrato è $12\frac{24}{25}$, ch' è più prossimo di $3\frac{2}{3}$, ma volendo più prossimo, si aggionga il rotto al 6, fà $6\frac{3}{5}$, e con esso si parta pur il 4, ne viene $\frac{20}{33}$, e questo si aggionga, come si è fatto di sopra al 3, fà $3\frac{20}{33}$, ch' è l' altro numero più prossimo, perchè il suo quadrato è $13\frac{4}{1089}$, ch' è troppo $\frac{4}{1089}$, e volendo più prossimo, partasi 4 per $6\frac{20}{33}$, etc. etc. e cosi procedendo si può approssimare à una cosa insensibile.

ergiebt, und hierdurch dividiren wir 4, die Differenz zwischen 9 und 13; wir erhalten $\frac{3}{5}$; dies zu 3 addirt, giebt $3\frac{3}{5}$, und das ist der Näherungswerth der Wurzel aus 13; sein Quadrat ist $12\frac{24}{25}$, er liegt also dem gesuchten Werthe näher als $3\frac{2}{3}$. Um eine noch grössere Annäherung zu erhalten, addiren wir den gefundenen Bruch zu 6, das giebt $6\frac{3}{5}$, und damit dividiren wir in 4. Es ergiebt sich $\frac{20}{33}$, und wenn wir dies, wie es oben geschehen ist, zu 3 addiren, so erhalten wir $3\frac{20}{33}$; dies ist die andere der Wurzel aus 13 noch näher liegende Zahl; denn ihr Quadrat ist $13\frac{4}{1089}$, was um $\frac{4}{1089}$ zu viel ist. Wenn wir eine noch grössere Annäherung wollen, so dividiren wir 4 durch $6\frac{20}{33}$, u. s. w. u. s. w. und so fortfahrend können wir dem Werthe der Wurzel aus 13 bis auf einen verschwindend kleinen Betrag nahe kommen.

Ich habe es nicht für nöthig gehalten, die zwei weiteren Näherungswerthe, welche Bombelli auf $3\frac{20}{33}$ noch folgen lässt (in die sich übrigens ein verhängnissvoller Rechenfehler eingeschlichen hat), noch mitzutheilen, da das Angeführte hinlänglich zeigt, dass Bombellis Verfahren auf eine Anwendung der Formel

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}$$

hinausläuft. Wenn die vorgelegte Zahl von der Form $a^2 - 1$ ist, so würde das Verfahren zunächst

$$\sqrt{a^2-1} = (a-1) + \frac{2a-2}{2(a-1)} = (a-1) + 1 = a$$

liefern. Diesen Fall behandelt Bombelli besonders; er fährt nämlich fort:

Ma solo bisogna avertire, di formare il rotto tre volte, quando il numero, di cui se ne hà da pigliare il lato, è

Ich muss aber darauf aufmerksam machen, dass man den Bruch dreimal zu bilden hat, wenn die Zahl, deren Quadratwurzel genommen werden soll, um 1 kleiner als

un manco di numero quadrato (come sarebbe 8), che per trovare il suo lato, si cavarà 4 maggior numero quadrato, e resterà 4, che partito per il doppio di 2, lato del numero quadrato, ne verrà $\frac{4}{4}$, che sarebbe 1, il quale gionto col 2 fa 3 e in questo caso quadrisi il 3 fa 9, del quale cavatone 8 numero, di cui se ne hà à pigliare il lato, resta 1, e questo si parte per 6, doppio del 3, ne viene $\frac{1}{6}$, il qual rotto si cava del 3, e resta $2\frac{5}{6}$ per il lato prossimo di 8, il quadrato del quale è $8\frac{1}{36}$, che è $\frac{1}{36}$ superfluo, e volendosi più approssimare: aggiongasi a $2\frac{5}{6}$ il 3, fa $5\frac{5}{6}$, e per questo si parta quel 1 detto di sopra, ne viene $\frac{6}{35}$, che levato di 3, resta $2\frac{29}{35}$, e questo sarà l' altro lato più prossimo, e volendosi più approssimare: si partirà 1 per $5\frac{29}{35}$, e procedendo (come si è fatto di sopra) si approssimarà quanto l' huomo vorrà, e se bene ci sono molte altre regole: queste non dimeno mi sono parse le più facili, però à queste mi atterrò, le quali hò trovato con fondamento, qual non voglio restare di porlo, benche non sarà inteso, se non da chi intende l'aggua-gliare di potenze e tanti eguali

eine Quadratzahl ist (wie es 8 sein würde). Um die Quadratwurzel aus 8 zu finden, subtrahiren wir die nächst grosse Quadratzahl 4; es bleibt der Rest 4, der bei der Division durch das Doppelte von 2, der Wurzel der Quadratzahl, $\frac{4}{4}$ ergiebt, was 1 sein würde, und wenn wir dies zu der 2 addiren, so erhalten wir 3. Wenn wir jetzt 3 quadriren, so ergiebt sich 9, und wenn hiervon 8, die Zahl, aus welcher die Quadratwurzel gezogen werden soll, subtrahirt wird, so bleibt der Rest 1; dieser, durch 6, das Doppelte von 3, dividirt, giebt $\frac{1}{6}$, und wenn wir diesen Bruch von 3 subtrahiren, so bleibt $2\frac{5}{6}$ als Näherungswerth der Wurzel aus 8. Sein Quadrat ist $8\frac{1}{36}$, was $\frac{1}{36}$ zu viel ist. Will man eine weitere Annäherung, so addire man die 3 zu $2\frac{5}{6}$, das giebt $5\frac{5}{6}$, und hierdurch dividire man die oben genannte 1; man erhält $\frac{6}{35}$, und wenn das von 3 subtrahirt wird, so bleibt $2\frac{29}{35}$; dies ist der zweite der gesuchten Wurzel noch näher liegende Werth. Will man eine noch grössere Annäherung, so wird man 1 durch $5\frac{29}{35}$ dividiren, und so fortfahrend (wie es oben geschehen ist) wird man sich dem gesuchten Werthe beliebig nähern. Es giebt zwar viele andere Regeln, aber diese sind mir nichts desto weniger als die leichtesten erschienen, und daher werde ich mich an diese halten, welche ich mit ihrer Begründung gefunden habe, die ich nicht verfehlen will mitzutheilen, obgleich sie nur von demjenigen verstanden wird, welcher die Gleichung

$$ax^2 + bx = c,$$

à numeri, del quale tratterò nel secondo libro à pieno: Però hora parlo solo con quelli.

die ich im zweiten Buche vollständig behandeln werde, zu lösen versteht. Zu diesen allein spreche ich jetzt.

Nachdem Bombelli auf diese Weise auch ein Beispiel nach der Formel

$$\sqrt{a^2 - b} = a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \cdots}}$$

oder vielmehr

$$\sqrt{a^2 - b} = a - \cfrac{b}{a + a - \cfrac{b}{a + a - \cfrac{b}{a + a - \cdots}}},$$

freilich nur für den speciellen Fall $b = 1$ gerechnet hat (einen kleinen Rechenfehler, den er dabei gemacht hat, habe ich berichtigt), wendet er sich zum Beweis seiner Regeln. Er sagt:

Pongasi dunque, che si habbia à trovare il lato prossimo di 13, di cui il più prossimo quadrato è 9, di cui il lato è 3, però pongo che il lato prossimo di 13 sia 3. p. 1. tanto, e il suo quadrato è 9. piu 6 tanti p. 1. potenza, il qual' è eguale à 13. che levato 9 à ciascuna delle parti, resta 4, eguale à 6 tanti più 1 potenza. Molti hanno lasciato andare quella potenza, e solo hanno agguagliato 6 tanti à 4, che il tanto valeria $\frac{2}{3}$ e hanno fatto, che l' approssimatione si è $3\frac{2}{3}$, perche la positione fù 3. p. 1. tanto, viene ad essere $3\frac{2}{3}$, ma volendo tenere conto della potenza ancora, valendo il tanto $\frac{2}{3}$, la potenza valerà $\frac{2}{3}$ di tanto, che aggionto con li 6 tanti di prima: si haverà $6\frac{2}{3}$ tanti eguale à 4, che ag-

Nehmen wir also an, man solle einen Näherungswerth der Wurzel aus 13 finden. Die nächste Quadratzahl ist 9, die Wurzel davon 3. Ich nehme deshalb an, der Näherungswerth der Wurzel aus 13 sei $3 + x$. Das Quadrat davon ist $9 + 6x + x^2$. Das ist gleich 13, und wenn beiderseits 9 subtrahirt wird, so bleibt

$$4 = 6x + x^2.$$

Viele haben nun jenes $x^2$ weggelassen und einfach

$$6x = 4$$

gesetzt, so dass sich $x = \frac{2}{3}$ ergab. Sie haben so bewirkt, dass der Näherungswerth $3\frac{2}{3}$ ist; denn da derselbe gleich $3 + x$ gesetzt worden war, so wird er $3\frac{2}{3}$. Will man aber auch $x^2$ in Rechnung ziehen, so wird, da

$$x = \tfrac{2}{3} \text{ ist, } x^2 = \tfrac{2}{3}x$$

sein, so dass sich durch Addition zu den früheren $6x$

$$6\tfrac{2}{3}x = 4$$

ergiebt, woraus man

$$x = \tfrac{3}{5}$$

guagliato il tanto valerà $\frac{3}{5}$, e perche fù posto 3. p. 1. tanto, sarà $3\frac{3}{5}$, e valendo il tanto $\frac{3}{5}$, la potenza valerà $\frac{3}{5}$ di tanto, e si haverà $6\frac{3}{5}$ di tanto eguale à 4, si che si vede donde nascono le regole dette si sopra.

erhält, und da der Näherungswerth gleich $3 + x$ gesetzt war, so wird derselbe $3\frac{3}{5}$ sein. Ebenso wird, wenn $x = \frac{3}{5}$ ist, $x^2 = \frac{3}{5}x$ sein; man erhält dann $6\frac{3}{5}x = 4$, und auf diese Weise erkennt man, wie die oben angegebenen Regeln entstehen.

Bombelli hat also thatsächlich Kettenbrüche gebildet und deren Näherungswerthe berechnet, auch bewiesen, dass auf diese Weise der Werth einer irrationalen Quadratwurzel beliebig genau annäherungsweise ermittelt werden kann. Das Werk Bombellis hat die weite Verbreitung gefunden, die es verdiente, und ist sicherlich auch von Cataldi studirt worden, zumal es in Bologna, der Heimath Bombellis, erschienen ist und Cataldi in eben dieser Stadt von 1584 bis 1626 Professor der Mathematik war. Es unterliegt also keinem Zweifel, dass Cataldi die Entwicklung der irrationalen Quadratwurzel in einen Kettenbruch aus Bombellis Algebra gelernt hat. Freilich hat er sich dann sehr eingehend mit der Sache beschäftigt; er hat — und das ist ein nicht geringes Verdienst — dem von Bombelli erdachten Gebilde eine passende Form gegeben; er hat erkannt, dass man sich nicht damit begnügen darf, einen Näherungswerth zu berechnen, sondern dass in jedem Falle auch die Grösse des begangenen Fehlers bestimmt werden muss, und so ist es ihm dank seiner Ausdauer und seiner grossen Gewandtheit im Rechnen gelungen, die Eigenschaften der Näherungswerthe der Kettenbrüche, welche Bombelli wohl nur in Folge des oben erwähnten Rechenfehlers verborgen geblieben waren, vollständig aufzufinden.

---

# ZUR
# GESCHICHTE DES THERMOSKOPS.

VON

**WILHELM SCHMIDT.**

Am 20. September 1638 schrieb der Pater Benedetto Castelli aus Brescia, Galileis Schüler, in einem Briefe[1]) an Monsignore Ferdinand Cesarini:

In questo tempo mi sovvenne un' esperienza fattami vedere già più di trentacinque anni sono dal nostro Signor Galileo, la quale fu che presa una caraffella di vetro di grandezza di un piccolo uovo di gallina col collo lungo due palmi in circa e sottile quanto un gambo di pianta di grano e riscaldata bene colle palme delle mani detta caraffella e poi rivoltando la bocca di essa in vaso sottoposto, nel quale era un poco di acqua, lasciando libera dal calor delle mani la caraffella, subito l' acqua cominciò a salire nel collo e sormontò sopra il livello dell' acqua del vaso più d'un palmo, del quale effetto poi il medesimo Signor Galileo si era servito per fabbricare un istrumento da esaminare i gradi del caldo e del freddo.

In dieser Zeit fiel mir ein Versuch ein, welcher mir bereits vor mehr als 35 Jahren von unserem Herrn Galileo gezeigt war, ein Versuch, welcher darin bestand, dass er eine kleine Karaffe (= Retortenblase) aus Glas von der Grösse eines kleinen Hühnereies mit einem etwa zwei Spannen langen und wie ein Weizenhalm engen Halse nahm, mit den inneren Handflächen besagte Karaffe ordentlich erwärmte und dann ihre Mündung umgekehrt in ein darunterstehendes Gefäss setzte, in welchem etwas Wasser war. Als er dann die warmen Hände von der Retortenblase wegnahm, begann das Wasser sofort in den Hals zu steigen und erhob sich über das Niveau des Wassers im Gefässe mehr als eine Spanne, eine Wirkung, welcher sich darauf derselbe Herr Galileo bedient hatte, um ein Instrument zur Prüfung der Wärme- und Kältegrade herzustellen.

Dass Galilei thatsächlich ein derartiges Thermoskop construirt hatte, bestätigt weiter eine Notiz in dem Briefe des vornehmen Venezianers Joh.

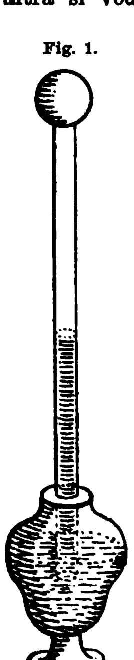
1) Vgl. Nelli *Vita e commercio letterario di Galileo Galilei.* Losanna 1793. S. 69. 70. Wieder abgedruckt bei Venturi *Memorie e lettere di Galileo Galilei.* Modena 1818. I, 20.

Fr. Sagredo vom 9. Mai 1613, in welcher er Galilei mittheilt, dass er verschiedene Aenderungen daran vorgenommen habe. Die Stelle lautet:

L' istrumento per misurare il caldo inventato da VS. Eccellentissima è stato da me ridotto in diverse forme assai comode ed esquisite, intantochè la differenza della temperie di una stanza all' altra si vede fin 100 gradi.

Das Instrument zum Messen der Wärme, welches von Eurer Excellenten Herrlichkeit erfunden ist, ist von mir in verschiedene sehr bequeme und ausgesuchte Formen gebracht worden, so dass man die Differenz der Temperatur von einem Zimmer zum andern bis auf 100 Grade sieht.

Fig. 1.



Existirte nun Galileis Thermoskop nach Sagredo vor 1613, nach Castelli wenigstens vor 1603, so bezeugt Vincenzio Viviani[1]), Galileis vertrauter Schüler und Biograph, dass Galilei das Thermometer in Padua zwischen 1593 und 1597 erfunden habe. Merkwürdig bleibt dabei allerdings, dass Galilei selber des Thermoskops in seinen Schriften nicht Erwähnung thut. Auch in der neuen, vortrefflich ausgestatteten Galileiausgabe[2]) haben wir keine Spur davon entdecken können. Nelli giebt in seiner Biographie S. 70 eine Figur von Galileis Thermoskop, welche wir unter Fig. 1 getreu nachgebildet haben. Wir können aber nicht umhin, darauf hinzuweisen, dass diese Figur vermuthlich von Nelli selbst entworfen ist und dass in dem Castellischen Briefe sich eine entsprechende Figur nicht vorzufinden scheint, wenn wenigstens auf Nellis Schweigen Verlass ist. Die Figur selbst bedarf keiner weiteren Erklärung. Dass das Röhrenende unten im Wasser offen sein muss, ist selbstverständlich. Ob das Gefäss mit Wasser oben verschlossen war, geht aus Castellis Worten nicht hervor. Nelli scheint es anzunehmen, nach der Figur zu urtheilen; dagegen spricht er in der beigegebenen Erklärung richtiger von der Atmosphäre, welche bei Abkühlung der Retorte auf den Wasserspiegel drücke. Daraus dürfte doch wohl folgen, dass das Gefäss mit Wasser oben offen war. Es könnte schliesslich jemand aus den zuletzt citirten Worten Sagredos entnehmen wollen, als habe dieser erst die Gradeintheilung eingeführt. Doch spricht auch Castelli schon von Graden. Sagredos Neuerung dürfte also lediglich darin bestanden haben, dass er die Grade verkleinerte und ihre Zahl erheblich vermehrte.

---

1) Die von ihm verfasste Lebensbeschreibung Galileis ist zwar erst 1718 gedruckt, aber schon 1654 verfasst.

2) *Le opere di Galileo Galilei* I—VI. Firenze 1890 ff.

Eine gewisse Aehnlichkeit mit dem Galileischen Thermoskop wird man in der nebenstehenden Portaschen Figur erkennen (Fig. 2). Giambattista della Porta beschrieb sein Thermoskop in seiner 1606 erschienenen Pneumatik (*I tre libri de' spiritali*[1])). Porta tauchte eine Retorte aus Glas (*A*) in ein Gefäss voll Wasser (*B*). Durch Erwärmung wird die Luft in der Retorte ausgedehnt und geht in Blasen, die man im Wasser aufsteigen sieht, hinaus. 'Je mehr die Luft erwärmt wird, um so mehr Blasen steigen auf.' Bei der Abkühlung steigt das Wasser lebhaft in der Retorte auf und füllt sie bis auf den Theil an, den die auf ihr natürliches Volumen reducirte, zurückgebliebene Luft innehat. Wird die Retorte von

Fig. 2.

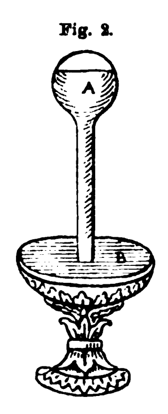



Fig. 3.



neuem erwärmt, so fällt das Wasser wieder, wird sie dann abermals abgekühlt, so steigt es. Der höchste Wasserstand wird durch einen Strich bezeichnet.

Im Principe stimmt mit Galilei und Porta auch Drebbel überein, dessen niedliche Figur (Fig. 3) wir dem *Tractat von der Natur der Elementen*[2]) (1608) entnommen haben. Dort heisst es 'im vierdten Capittel': 'Gleich wie die Wärme Lufft unnd Wasser subtil, dün unnd grob machet, also vergrobet, verkleinert und truckt zusamen die kälte, als ein contrarium

---

1) Ein entsprechender Auszug aus dieser von Escrivano mit Zusätzen Portas angefertigten italienischen Uebersetzung ist bei Libri *Histoire des sciences mathématiques en Italie* Paris 1841, IV, 469 abgedruckt. In der lateinischen Originalausgabe (1601) befindet sich dieser Abschnitt noch nicht.

2) Ein kurtzer Tractat von der Natur Der Elementen Und wie sie den Windt, Regen, Blitz und Donner verursachen u. s. w. Durch Cornelium Drebbel in Niederlandisch geschrieben unnd allen der Naturliebhaberen zu nutz ins Hochteutsch getreulich uber gesetzt. Gedruckt zu Leyden in Hollandt. Bey Henrichen von Haestens 1608.

der wärme, und zeucht also wieder in[1]) alle Winde, die durch die Wärme aufs gegangen wahren, gleich wie wir klarlich sehen, wan wir hangen eine ledige glaserne Retortam, mit dem mundt in ein Fas mit Wasser, unnd unter dem Bauch ein Warm Feuwer legen, wie diese Figur aufs weiset unnd mit bringt. So Werden Wir sehen, so baldt der Lufft im glas anfangt warm zu werden, das Winde steigen aufs dem mund der Retorten, und das das wasser voller blafsen[2]) wirdt, und dis wirdt wehren[3]), so lange der Lüfft je lenger je warmer wirdt, aber wan du die retort vom Feuwer nimbst, unnd der Lůfft anhebt zu erkalten, so wird der Lüft wieder in der Retort in einander gehen[4]), grob und dicke werden, also das das glas wirt mit Wasser erfullet werden, weil der Lůft, der zu vor heifs, entschlossen unnd Rarificirt war durch das Feuwer, dan so fern du das glas sonder brechen gar heifs machen kanst, so wirdt die Retorta, wan sie kalt wirt, mit Wasser erfullet sein' u. s. w.

Im vorigen Jahrhundert haben Holländer und Deutsche Cornelius Drebbel die Priorität der Erfindung des Thermoskops zugeschrieben. Sie werden das in gutem Glauben gethan haben, weil vermuthlich darüber aus Italien zu ihnen keine Kunde gedrungen war. Dagegen war dem Engländer Robert Fludd, welcher Frankreich, Deutschland und Italien bereiste, das Thermoskop wohl in Padua als eine neue Erfindung gepriesen worden. Fludd selbst ist später von einem Jesuitenpater als der erste Erfinder des Thermoskops ('il primo inventore del termoscopio') namhaft gemacht, aber ohne Grund. Im Gegentheil weist Fludd in seiner *Philosophia Moysaica*[5]) Fol. 1$^r$ (Lib. I cap. II) darauf hin, dass das Thermoskop überhaupt keine neue Erfindung sei: Quod instrumentum vulgo speculum Calendarium dictum falso a quibusdam nostri seculi hominibus sibimet ipsis arrogatur, utpote qui illud propriam suam inventionem esse falso gloriantur. — neque jure mihi fabricam hujus instrumenti primariam arrogare aut vendicare[6]) queam, quamvis illo in naturali Macrocosmi mei historia et alibi ad veritatem argumenti mei philosophici demonstrandam sum usus: et agnosco me illud in veteri quingentorum saltem annorum antiquitatis manuscripto graphice specificatum atque geometrice delineatum invenisse.

---

1) Druckfehler statt 'an' ('zieht — an').

2) Blasen.

3) währen.

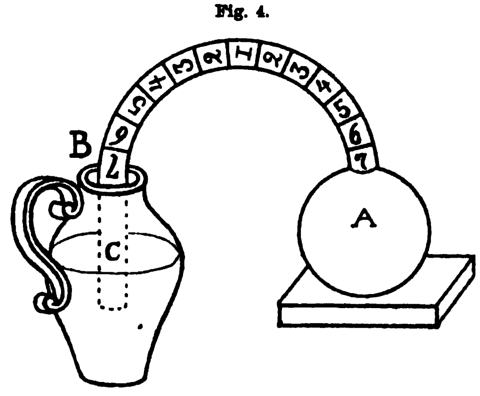
4) sich zusammenziehen.

5) Philosophia Moysaica, in qua sapientia et scientia creationis et creaturarum sacra vereque christiana ad amussim et enucleate explicatur Authore Rob. Fludd, alias de Fluctibus Armigero. Goudae 1638.

6) vindicare 'in Anspruch nehmen'.

Auf Fol. 2r giebt **Fludd** zwei Figuren nebst zugehöriger Beschreibung, von denen die links stehende eine Reconstruction der von **Fludd** in der Handschrift vorgefundenen geometrischen Figur darstellt (= Fig. 4), während die rechts danebenstehende eben das speculum calendarium oder die angeblich neue Erfindung ähnlich wie **Galileis** oder **Portas** Thermoskop giebt. Dazu bemerkt **Fludd** sehr richtig, dass die neue Erfindung und die Vorrichtung der Handschrift identisch seien ('ista duo solummodo in figura et non natura inter se variare'). Aus der Beschreibung zu Fig. 4 lernen wir nichts wesentlich Neues; nur möchten wir darauf hinweisen, dass auch hier die Luftblasen wieder besonders hervorgehoben werden: radij solares calore suo in globum (eine Bleikugel, sphaera plumbea) concavum capitis · A · operantes faciunt, ut inclusus aer eorum actu rarefactus per fistulam · A · B · in ollam (Gefäss) aquae descendat et per superficiem aquae in forma bullarum (Blasen) egrediatur; occidente vero sole nocteque frigida appropinquante iterum congelatur, contrahitur atque condensatur aër ille inclusus — tantum aquae ex olla · C · in fistulam plumbeam exsugitur, quantum aeris in rarefaciendo est exhalatum.

Fig. 4.

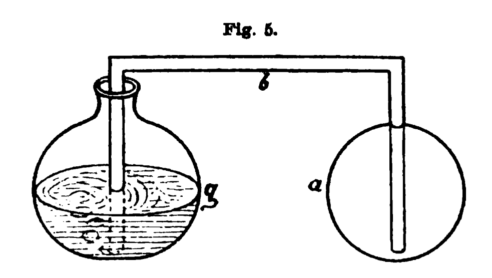



Es liegt gewiss die Frage nahe, ob nicht die von **Fludd** erwähnte Handschrift noch existire. Und falls man etwas Aehnliches entdeckt, könnte man versucht sein, es mit den Fludd'schen Angaben in Verbindung zu bringen, zumal wer etwa vernimmt, dass sich gerade an dem Orte, au welchem Fludd sich vor dem Erscheinen seiner Philosophia Moysaica aufhielt, nämlich in London, thatsächlich etwas Aehnliches findet. Ehe wir aber darauf näher eingehen, müssen wir noch einiges vorausschicken.

Im Ausgange des dritten Jahrhunderts vor Christi Geburt lebte ein Mechaniker **Philon**, welcher aus **Byzanz** stammte. Er unternahm im späteren Lebensalter noch zu seiner Fortbildung weitere Reisen und kam dabei auch nach Rhodos und Alexandria. In letzterer Stadt lernte er mechanische Kunstwerke mannigfacher Art kennen, wie die des **Ktesibios**, eines alexandrinischen Erfindergenies, der auch auf dem Gebiete der Pneumatik Rühmliches geleistet hat. Philon fasste seine physikalischen Kenntnisse und die verschiedenen Arten ihrer praktischen Verwerthung in einem

grossen Werke zusammen, welches er 'Handbuch der Mechanik' (*Μηχανικὴ σύνταξις*, Mechanische Zusammenstellung) betitelte und von welchem leider nur wenige Bruchstücke erhalten sind. Zu diesen Fragmenten gehört auch eine Abhandlung über die Pneumatik, welche aber nicht in dem originalen griechischen Wortlaute uns überkommen ist, sondern nur in der lateinischen Uebertragung einer wohl gleichfalls verlorenen arabischen Uebersetzung vorliegt. Der lateinische Titel lautet: '*De ingeniis spiritualibus, Ueber die Druckwerke*'.[1]) Dort wird von Philon das Thermoskop folgendermassen beschrieben: 'Man stelle eine Bleikugel (Fig. 5)[2]) von mässiger Grösse her, die inwendig leer (hohl) und geräumig ist. Sie sei weder zu dünn, um nicht gleich zu platzen, noch zu schwer, aber ganz trocken. Man durchbohre sie oben und setze eine gebogene Röhre ein, die fast bis auf den Boden reiche. Das andere Ende dieser Röhre stelle man in ein anderes, mit Wasser gefülltes Gefäss. Dieses Ende reiche wie in der Kugel fast bis auf den Boden, um den Ausfluss des Wassers zu erleichtern. Die Kugel sei *a*, die Röhre *b*, das Gefäss *g*. Ich behaupte also, wenn man die Kugel in die Sonne stellt, so wird nach Erwärmung der Kugel ein Theil der in der Röhre eingeschlossenen Luft hinausgehen. Dies kann man daran sehen, dass die Luft, welche aus der Röhre ins Wasser strömt, das Wasser in Bewegung setzt und eine Luftblase nach der anderen hervorruft. Wird aber die Kugel in den Schatten oder an eine Stelle gesetzt, zu der kein Sonnenstrahl dringt,

Fig. 5.




1) Man findet den lateinischen Text bei V. Rose *Anecdota Graeca et Graecolatina* II, 307 f.; ferner in neuer lateinisch-deutscher Bearbeitung im ersten Bändchen der in Vorbereitung befindlichen griechisch-deutschen Heronausgabe der Bibliotheca Teubneriana. Die Hoffnung, dass die arabische Handschrift 966 der Bodleiana in Oxford den arabischen Text zu Philons Pneumatik enthalte, hat sich leider nicht erfüllt. Herr Baron Carra de Vaux, Château de Rieux bei Montmirail, welcher im zweiten Bändchen der Heronausgabe die von ihm entdeckte, als Ganzes nur arabisch überlieferte Mechanik Herons auf neuer Grundlage mit beigefügter, deutscher Uebersetzung des Herrn Privatdocenten Dr. Nix in Bonn ediren wird, hat auf meine Bitte die Liebenswürdigkeit gehabt, die erwähnte arabische Handschrift zu untersuchen und mir ein Inhaltsverzeichniss der einzelnen Kapitel mitgetheilt. Es stehen allerdings eine Anzahl unbekannter und nicht uninteressanter Philonischer Apparate (Druckwerke, kleinere Automaten u. dgl.) darin, aber anscheinend nichts, was sich mit dem liber de ingeniis spiritualibus in Verbindung bringen liesse.

2) Vgl. bei Rose a. a. O. die handschriftliche, geometrische Zeichnung.

so steigt das Wasser durch die Röhre empor und fliesst bis in die Kugel. Stellt man die Kugel nachher wieder in die Sonne, so wird das Wasser in jenes Gefäss zurückfliessen. So oft man den Vorgang wiederholt, zeigt sich dieselbe Erscheinung. Dieselbe Wirkung erzielt man, wenn man die Kugel durch Feuer erhitzt oder heisses Wasser darauf giesst. Wird sie dagegen abgekühlt, so steigt das Wasser wieder auf'.

Dass die eben beschriebene Vorrichtung ein Thermoskop ist, welches im Principe mit den erwähnten modernen, als Vorläufer des Thermometers geltenden Thermoskopen übereinstimmt, steht wohl ausser Zweifel. Ist dem aber wirklich so, so tritt nunmehr die Prioritätsfrage, die Nelli nicht mit Unrecht gegen Drebbel und andere[1]) zu Gunsten Galileis entschied, in ein anderes Stadium, insofern das erste Thermoskop um mehr als 2000 Jahre eher anzusetzen ist, als man bisher gethan hat. Es kann daher keine Frage sein, dass die Priorität der Erfindung dem Alterthume zukommt und dass die beginnende Neuzeit nur den Anspruch erheben darf, das Thermoskop durch die Gradeintheilung vervollkommnet und dadurch allerdings dem Thermometer vorgearbeitet zu haben. Ob nicht auch das Alterthum noch die doch sehr nahe liegende Graduirung[2]) vorgenommen hat, steht dahin. Ueberliefert ist davon nichts; aber man bedenke, wie viel Litteratur des Alterthums gerade über die Gebiete der exakten Wissenschaften uns verloren gegangen ist!

Es drängen sich nunmehr verschiedene Fragen von selbst auf, die man freilich nicht mit Sicherheit oder Wahrscheinlichkeit wird beantworten können. Zunächst die: Hatte Fludd etwa ein Manuscript von Philons 'liber de ingeniis spiritualibus'? Wer weiss, dass thatsächlich diese Schrift ausser in anderen in einer Londoner Handschrift, welche sich aus Stücken des 12. bis 14. Jahrhunderts zusammensetzt, überliefert ist, wird nicht abgeneigt sein, dies für möglich zu halten.[3]) Aber sicher ist das nicht. Denn im einzelnen weicht Fludd in seiner Beschreibung von Philon ab, auch hat Fludd schon die Gradeintheilung, wenigstens in seiner Figur. Dazu kommt, dass in der Londoner Handschrift irrthümlicherweise die Philonische Schrift dem Aristoteles zugeschrieben wird, dessen Namen Fludd doch vermuthlich erwähnt hätte. Dass der Philonische Abschnitt der Handschrift dem 14. Jahrhundert angehört und nicht, wie man nach Fludd's

---

1) Bacon von Verulam erwähnt die *vitra calendaria* erst 1620 und Sarpi nennt das Thermoskop erst 1617. Es kommen also beide nicht weiter in Betracht.

2) Graduirungen, wenn auch anderer Art, kommen z. B. in Herons Druckwerken wiederholt vor. Vgl. Heron. op. vol. I, 285. 295 = p. 215. 218 Thévenot.

3) Merkwürdig ist, dass Fludd noch einen anderen Philonischen Versuch (Kap. 8 = 308, 5 – 309, 9 Rose) kennt.

Angabe vermuthen muss, dem 12., ist wohl von geringerer Bedeutung. Er könnte sich ja über das Alter dieses Theiles der Handschrift geirrt haben, wie es auch heute noch vorkommt. Hätte Fludd trotz alledem den Philon benutzt, so zeigt er jedenfalls keine sklavische Abhängigkeit.

Sollte ferner Galilei deswegen des Thermoskops in seinen Werken nicht gedacht haben, weil er etwa selbst durch eine solche antike Beschreibung angeregt war und demgemäss es nicht als seine Erfindung im eigentlichen Sinne betrachtete? Es ist zwar sicher, dass Galilei ausser Aristoteles von Schriftstellern des Alterthums noch Archimedes, Apollonius, Ptolemaeus, Fragmente des Heraclides Ponticus, Heron[1]) u. a. studiert hat und wohl auch Anregungen von ihnen empfangen haben mag, aber Philon's Namen haben wir in der neuen Galileiausgabe nicht finden können. Wenn man nun die Bestimmtheit von Sagredo's Worten: 'Das von Eurer Herrlichkeit erfundene Instrument' ins Auge fasst und dazu aus einem späteren Briefe Sagredo's an Galilei die Worte nimmt: 'da, wie Sie mir schreiben, Sie der erste Verfertiger und Erfinder gewesen sind'[2]), so wird man Bedenken tragen, die Selbständigkeit der Galileischen Erfindung in Zweifel zu ziehen.

Noch weniger sicher sind wir bei Porta. Schon bei der Camera obscura, welche gewöhnlich als Portas eigenthümliche Erfindung gilt, ist man im Zweifel, ob er sie zuerst erfunden oder nur vervollkommnet habe.[3]) Jedenfalls war er eifrig auf das Sammeln antiker Handschriften bedacht, um dieses oder jenes daraus für seine Zwecke zu verwerthen (requirenti mihi veterum in omni rerum genere quaedam manuscripta monumenta, ut arcani quid et abditi inde depromerem). So ist es z. B. sicher, dass Porta die Pneumatik und die Automatentheater Heron's kannte; er erwähnt ausser anderem[4]) Heron's Wasserorgel (Heron. op. I, 192 ff. = p. 228 Th.) und bezeichnet einen Heronsbrunnen (Heron. op. I, 170 ff. = p. 190 Th.) als 'pulcherrima fontis structura'. Es ist daher die Möglichkeit, dass Porta durch eine antike Beschreibung des Thermoskops angeregt sei, nicht ganz ausgeschlossen, aber Bestimmteres lässt sich nicht ermitteln. Nur

---

1) Bemerkenswerth ist, dass Galilei in einem Briefe vom 11. Januar 1594 an Alvise Mocenigo (Venturi a. a. O. I, 12) eine ausführliche Darstellung des in Herons Pneumatik (Heron. op. I, 266 = p. 222 Th.) beschriebenen Heronsbrunnens giebt, mit ausdrücklicher Beziehung auf Heron und in freier lateinischer Bearbeitung. (S. die Einleitung Heron. op. I zu Fig. 66.) Venturi I, 21 hält es für wahrscheinlich, dass Galilei die Idee seines Thermoskops von Heron empfing.

2) Vgl. Heller *Geschichte der Physik* I, 389.

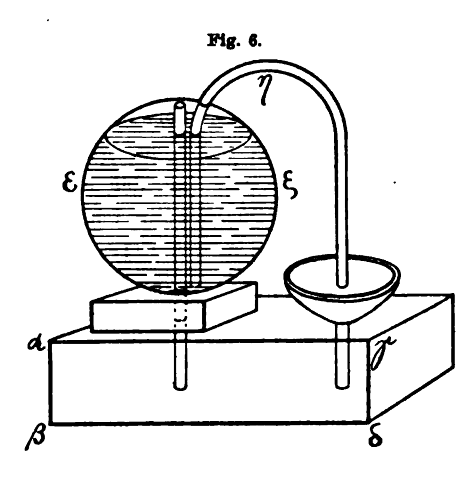
3) Vgl. Heller *Geschichte der Physik* I, 308 u. Poggendorff *Gesch. d. Phys.* S. 135.

4) Vgl. noch J. L. Heiberg *Nogle Eftervirkninger af graesk Mechanik* in den Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i Aaret 1886, S. 8.

sei noch darauf hingewiesen, wie Porta zuerst die auch bei Philon erwähnten Luftblasen besonders hervorhebt. Porta wollte übrigens weniger die Wärme oder Kälte messen als den Grad der Verdünnung der Luft durch die Wärme bestimmen.

Die Schriften Philons von Byzanz sind schon im Alterthume selbst von Heron aus Alexandria, welcher vermuthlich noch im ersten Jahrhundert nach Christi Geburt lebte, benutzt worden. Heron citirt Philon mit Namen in seinem Werke über die Automatentheater (Heron. op. I, 404, 10 = p. 263 Th.). Auch in der Pneumatik scheint Heron den Philon öfter zu Rathe gezogen zu haben. Wenigstens weisen mehrere von Heron's Druckwerken eine auffallende Aehnlichkeit mit Philonischen Druckwerken auf (z. B. der Kapselheber Heron. op. I, 41 ff. = p. 156 Th. mit Philon Kap. 10 = p. 310, 3—12 Rose, das constante Niveau Heron. op. I, 103 ff. = p. 173 Th. mit Philon Kap. 12 = p. 311, 9 ff. R.), wie sie nicht minder in der ihrer Pneumatik voraufgehenden Einleitung über die Theorie des Vacuum übereinstimmen. So mag denn wohl Philons Thermoskop auch Heron den Anstoss zu einer ähnlichen Vorrichtung gegeben haben (Heron. op. I, 225 = p. 200 Th.). Im Princip stimmt Heron mit Philon überein, aber im einzelnen ist die Ausführung verschieden. Nach Heron wird eine theilweise mit Wasser gefüllte Kugel $\varepsilon\zeta$ (Fig. 6) von der Sonne erwärmt. Dadurch wird die Luft in derselben ausgedehnt, übt auf das in der Kugel enthaltene Wasser einen Druck aus und drängt es mit Hilfe der an beiden Enden offenen Röhre $\eta$ durch einen Trichter in die Basis $\alpha\beta\gamma\delta$. Wird die Kugel abgekühlt, so zieht sich die Luft in derselben zusammen, und das Wasser steigt durch eine zweite, vom Boden der Basis oben in die Kugel führende Röhre aus der Basis wieder nach der Kugel.[1])

Fig. 6.

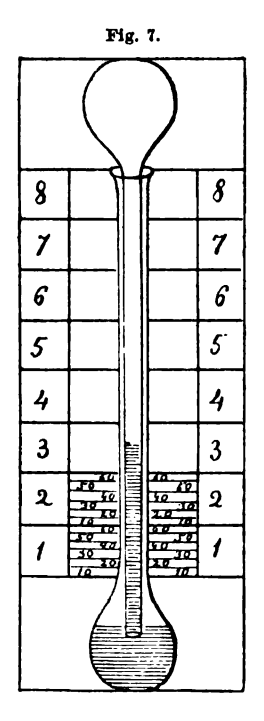



1) Wenn die Röhre $\eta$ aufhört zu fliessen, so wird freilich die atmosphärische Luft bestrebt sein, durch diese in den luftverdünnten Raum der Kugel zu gelangen, aber da sie ihren Weg durchs Wasser nehmen müsste und nur in Form von Luftblasen hineingelangen könnte, so dürfte doch die beabsichtigte Wirkung erreicht sein, ehe die atmosphärische Luft in grösserer Quantität in den luftverdünnten Raum der Kugel eintritt.



An Heron knüpft erst im Jahre 1612 Santorio, Professor der Medicin in Padua, wieder an. In einem medicinischen Werke, welches im genannten Jahre erschien, erwähnt er das Thermoskop zum ersten Male ganz allgemein. Genauere Angaben giebt er in einer anderen, im Jahre 1625 herausgegebenen Schrift.[1]) Dort heisst es: 'Secunda figura est vas vitreum, quo facillime possumus singulis horis dimetiri temperaturam frigidam vel calidam et perfecte scire singulis horis, quantum temperatura recedat a naturali statu prius mensurato. Quod vas ab Herone in alium usum[2]) proponitur. Nos vero illud accommodavimus et pro dignoscenda temperatura calida et frigida aeris et omnium partium corporis et pro dignoscendo gradu caloris febricitantium.' Ob und welche Aenderungen Santorio etwa an der Heronischen Vorrichtung vorgenommen hat, kann ich hier leider nicht feststellen.

Fig. 7.



Die Form eines modernen Thermometers zeigt anscheinend zuerst das Instrument, welches Telioux, ein römischer Ingenieur, im Jahre 1611 in seiner *Matematica meravigliosa*[3]) erwähnt. Telioux füllt die Blase einer Retorte (Fig. 7) zu drei Viertel mit Wasser und setzt eine andere Retorte in die Röhre der ersten. Wird die untere Blase erwärmt, so steigt das Wasser in der inneren Röhre empor, wird sie abgekühlt, so fällt es wieder zurück. An den Seiten der Röhren ist eine Scala angebracht. So verschieden auch auf den ersten Blick in ihrer äusseren Einrichtung der Heronische Apparat und Telioux' Luftthermometer erscheinen mögen, so finden doch im Grunde in beiden dieselben physikalischen Vorgänge statt. Nur hat Telioux, vielleicht unabhängig von Heron, ganz abgesehen von der Scala, die Sache einfacher und praktischer eingerichtet, indem er statt der zwei Heronischen Röhren nur eine einzige nahm und statt wie Heron das bei der Hitze ausströmende Wasser in eine unter der Kugel befindliche Basis zu leiten, es in eine vertikal darüber stehende Retorte

1) Die Originalausgabe war mir leider nicht zugänglich. Die citirten Worte finden sich bei Nelli I, 81. Ich bedauere lebhaft, dass ich aus dem angeführten Grunde Santorios Figur nicht vorführen kann. Vermuthlich stimmt sie mit der Heronischen (Fig. 6) überein.

2) Herons Apparat hiess bei den Alten 'die Traufe' (Libás).

3) Vgl. Libri a. a. O. IV, 471.

steigen lässt. Aber hier wie dort wirkt die Wärme auf ein Gefäss mit Wasser ein und bringt die Flüssigkeit aus einem geschlossenen[1]) Raume zum Ausfluss, und hier wie dort führt die Abkühlung die ausgeströmte Flüssigkeit zurück. Beim Thermoskope Philons, Galileis u. s. w. wirkte dagegen die Wärme nur auf ein lufterfülltes Gefäss ein und beeinflusste entweder kaum das Wasser in dem offenen Gefässe oder brachte es in der Röhre zum Sinken und drängte es ins Gefäss zurück, während erst die Kälte eine steigende Bewegung des Wassers herbeiführte und das Steigen selbst auch der Veränderlichkeit des Luftdrucks unterworfen war.

---

1) Dass Telioux das Thermoskop gänzlich dem Einflusse des veränderlichen Luftdruckes entzog, war wohl der bedeutendste Fortschritt; bei Heron ist immer noch, wenigstens während der Abkühlung, eine gewisse Einwirkung des Luftdrucks denkbar. Uebrigens hält J. C. Poggendorff *Geschichte der Physik* S. 258 im Gegensatz zu Libri a. a. O. es für ungewiss, ob Telioux' Thermometer luftdicht gewesen sei. Die Worte: 'che non possa pigliare aria dass sie keine Luft hineinlassen kann' beziehen sich allerdings nur auf die innere Röhre; es wird aber doch zu Anfang gesagt, dass die äussere Retorte nur so viel grösser sein soll, als nöthig ist, um die zweite Röhre hineinschieben zu können. Man beachte auch, dass Telioux die Wärme auf die untere Blase einwirken lässt. Stände diese aber mit der atmosphärischen Luft in Verbindung, so würde das Wasser überhaupt nicht steigen; denn die Luft, welche bei völliger Abgeschlossenheit durch ihre Ausdehnung das Steigen bewirkt, würde in jenem Falle nach aussen entweichen. Aus Telioux' Figur darf man keine Schlüsse ziehen; sie ist in Hinsicht auf die Luftdichtigkeit ungenau gezeichnet. Ein praktischer Versuch hat uns ausserdem die Notwendigkeit, dass die äussere Retorte luftdicht sei, bestätigt.

# HERON VON ALEXANDRIA,

# KONRAD DASYPODIUS

UND DIE

# STRASSBURGER ASTRONOMISCHE MUENSTERUHR.

VON

**WILHELM SCHMIDT.**

Am St. Johannistage 1574 wurde im Strassburger Münster, jenem altehrwürdigen Denkmal deutscher Baukunst, ein Kunstwerk eingeweiht, das zwei Jahrhunderte hindurch bewundert und gepriesen wurde, jene berühmte astronomische Uhr, welche Konrad Dasypodius im Verein mit David Wolckenstein aus Breslau und Tobias Stimmer nebst den Gebrüdern Habrecht aus Schaffhausen geschaffen hatte. Das Interesse für astronomische Dinge war im 16. Jahrhundert bedeutend. War es doch in diesem Nicolaus Copernicus vorbehalten, eine Weltordnung zu stürzen, die mehr denn anderthalb Jahrtausende fast unangefochten in Geltung gewesen war. Jenes Interesse beschränkte sich aber nicht auf die Männer der Wissenschaft, sondern muss auch in weitere Kreise gedrungen sein, wie eine Anzahl gerade in diesem Jahrhunderte angefertigter astronomischer Kunstuhren beweist. Es gab solche ausser in Strassburg auch in Cassel (aus dem Jahre 1561), Dresden (1568), Marburg (1575) und Prag (1592)[1]. Dass sie sich noch dem Ptolemäischen Weltsystem[2]) anschliessen, wird den nicht wunder nehmen, der weiss, dass selbst Tycho Brahe sich von der Richtigkeit von Copernicus' heliocentrischem Systeme nicht hatte überzeugen könnnen. Bei der Strassburger astronomischen Uhr könnte allerdings leicht jemand eine unbewusste Ironie darin finden, dass ihr Urheber Dasypodius, kurz bevor er mit der Herstellung der Uhr beauftragt wurde, eine Schrift, die zu Copernicus in Beziehung stand[3]), veröffentlichte und ferner an dem Gewichtsthurme der Uhr 'des herrlichen und Gelehrten Mathematici Nic. Copernici warhafftige abconterfet' (so!) malen liess, ohne dass die Uhr selbst dessen epochemachendes System zum Ausdruck brachte.

---

1) Vgl. C. Alhard von Drach *Die zu Marburg im mathematisch-physikalischen Institut befindliche Globusuhr Wilhelms IV. von Hessen als Kunstwerk und astronomisches Instrument.* Marburg 1894, S. 6. 11.

2) Dies ist von der Casseler bestimmt überliefert. Mit der letzteren stimmt die Dresdener überein. Auch die Strassburger gründete sich auf das Ptolemäische System, wie der Sonnenzeiger auf dem Astrolabium zur Genüge darthut; denn er dreht sich inmitten der Planetenzeiger in einem Jahre in dem Thierkreise.

3) *Hypotyposes orbium coelestium congruentes cum tabulis Alfonsinis et Copernici seu etiam tabulis Prutenicis* editae a Cunrado Dasypodio. Argent. 1568. Vgl. J. G. L. Blumhof *Vom alten Mathematiker Conrad Dasypodius.* Göttingen 1796, S. 20.

Konrad Dasypodius (zu deutsch 'Rauhfuss oder Has') war der Sohn des Schweizer Humanisten Petrus Dasypodius, den wir zuletzt in Strassburg finden. Die Lebensjahre seines Sohnes Konrad umfassen die Zeit von 1530 bis 1600. Konrad Dasypodius war an der Akademie in Strassburg als Professor der Mathematik thätig, studierte eifrig die antiken Mathematiker, von denen er selbst mehrere, unter anderen Euklid wiederholt (1564, 1570 f.), im Druck erscheinen liess, und war in Wort und Schrift beflissen, das Studium der Mathematik zu heben. Von 28 Schriften des Konrad Dasypodius, welche Blumhof anführt, weisen 20 schon im Titel auf die Beziehung zu der antiken exakten Wissenschaft hin, und unter den übrigen dürften auch noch mehrere in ihrem Inhalte sich an die klassische Wissenschaft anlehnen. Dasypodius beschäftigten nicht bloss die Mathematiker, wie Apollonius, Theodosius, Serenus, Diophantus, Pappus ausser Euklid, sondern auch die Astronomen wie Autolykos, Ptolemäus und Hypsikles, der Optiker Damianos, die Mechaniker wie Ktesibios, Philon von Byzanz, Athenaeus und Heron von Alexandria. Von Autolykos gab Dasypodius 1572 die beiden Schriften *Περὶ κινουμένης σφαίρας* 'Ueber die Bewegung einer Kugel' und *Περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων* 'Vom Auf- und Untergang der Fixsterne' heraus, zu Ptolemäus schrieb er Scholien. Von Heron aus Alexandria veröffentlichte er im Anschluss an das 1. Buch von Euklids Elementen 'vocabula quaedam geometrica'[1]), ebenso 8 Jahre später 'Hieronis (= Heronis) Alexandrini nomenclaturae vocabulorum geometricorum translatio'[2]). Dasypodius kennt ferner aus eigener Lektüre die Belopoiika (Geschützbau), die Dioptra (Nivellirinstrument), die Pneumatik (Druckwerke), die Automaten (Automatentheater), den Barulkos (Hebewinde) Herons. Dass er sie wirklich studirt hat, beweisen viele Stellen über den Inhalt der genannten Schriften in der Abhandlung, welche er seiner Beschreibung der Strassburger Münsteruhr vorausschickt[3]). Da

1) *Euclidis Elementorum liber primus.* Item *Heronis Alexandrini vocabula quaedam geometrica:* antehac nunquam edita, graece et latine. Argentinae 1571. Das sind die Ὅροι oder Definitionen des Heron. Vgl. F. Hultsch *Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae.* Berolini 1864, S. IX.

2) Der genauere Titel lautet: *Oratio Conradi Dasypodii de disciplinis mathematicis.* Eiusdem *Hieronis* etc. *vocab. geom. translatio.* Eiusdem *lexicon mathematicum* ex diversis collectum antiquis scriptis.

3) Diese Beschreibung ist in einer deutschen und lateinischen Ausgabe vorhanden, von denen die deutsche etwas ausführlicher ist. Die Titel lauten: Cunradi Dasypodii *Warhafftige Ausslegung und Beschreybung des Astronomischen Uhrwercks zu Strassburg.* Strassburg 11. Mai 1580. Die eigentliche Beschreibung der Uhr ist hiernach wieder abgedruckt in der *Elsassischen und Strassburgischen Chronicke von Jacob von Königshoven* herausgeg. von D. Johann Schiltern. Strass-

Dasypodius auch Herons mechanisch-physikalische Werke schon um 1571 gelesen haben wird, aber der griechische Text erst 1693 zum ersten Mal gedruckt ist und die älteste vollständige (lateinische) Uebersetzung der Pneumatik von Commandini erst 1575, die älteste (italienische) Uebersetzung der Automaten von Baldi erst 1589 im Druck erschienen, so leuchtet ein, dass Dasypodius über Herons mechanisch-physikalische Werke etwas Handschriftliches besessen haben muss. War dies eine Uebersetzung oder der Originaltext? Es ist wahrscheinlich, dass Dasypodius sich um Heronhandschriften bemühte. Wenigstens schrieb er an den erwähnten Commandini, einen gelehrten, aber in Vorurtheilen befangenen Arzt aus Urbino. Als guter Katholik hielt dieser es für unthunlich, sich einem schmutzigen Ketzer gefällig zu erzeigen; er fürchtete sich dadurch zu beflecken (vgl. *Giornale de' letterati d'Italia* XIX, 180: 'non giudicò bene l'uomo Catolico il contaminarsi con l'amicizia di persona imbrattata e lorda dal fango dell' Eresie'!)[1]). Vielleicht sah Commandini in Dasypodius auch einen Concurrenten. Im Besitz von Heronhandschriften war derzeit auch Petrus Ramus, jener aufrichtige Verehrer deutscher Gelehrsamkeit, der 1572 ein Opfer der Bartholomäusnacht wurde[2]). Das bezeugt er selbst mit folgenden Worten: 'Studiose vel curiose potius Heronis opera nobis exquisita sunt, tandemque e variis bibliothecis collecta graece et manu descripta *πνευματικὰ* (Druckwerke) integra, *αὐτοματοποιητικὰ* (Automatentheater) multis locis corrupta, fragmenta quaedam geodaetica: alia vero pleraque Heronis praedicantur, ut de machinis bellicis earumque figuris eleganter descriptis *περὶ βελοποιΐας* (Geschützbau) etc.' Mit diesem Gelehrten, den Dasypodius vielleicht 1569

---

burg 1698. Die lateinische Beschreibung schliesst sich an die Universitätsnachrichten des Jahres 1580: Cunradi Dasypodii *Heron mechanicus seu de mechanicis artibus atque disciplinis.* Eiusdem *Horologii astronomici Argentorati in summo templo erecti descriptio.* Argent. 6. Juni 1580. Mit letzterer Schrift befasst sich auch J. L. Heiberg *Nogle Eftervirkninger af graesk Mechanik* in den Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i Aaret 1886, S. 9—14. (Auf die Heiberg'sche Abhandlung wurde ich aufmerksam durch Herrn Oberschulrat Professor Dr. F. Hultsch in Dresden-Striesen.) Eine poetische Beschreibung der astronomischen Uhr giebt der unglückliche Tübinger Professor Frischlin bereits ein Jahr nach Vollendung des Werkes: *Carmen de astronomico horologio Argentoratensi scriptum a* M. Nicodemo Frischlino. Argentorati 1575.

1) Denn Konrad Dasypodius war wohl Anhänger der reformirten Lehre. Sein Vater war wenigstens mit Ulrich Zwingli befreundet, ward von diesem an die Züricher Schola Carolina berufen und unterrichtete später dessen Söhne. Dem Italiener mochte die zur evangelischen Lehre übergetretene Stadt Strassburg überhaupt als Hochburg der Ketzerei erscheinen.

2) Vgl. Petri Rami *scholarum mathematicarum* libri unus et triginta. Frankfurt 1627, S. 33. Heiberg a. a. O. S. 10.

persönlich kennen lernte, als Ramus auf seiner Reise durch Deutschland Strassburg berührte, stand Dasypodius in gelehrtem Briefwechsel. 'Dasypodius nobis etiam familiaribus literis notus,' schreibt Ramus in den Schol. math. S. 64. Auch an ihn wird sich Dasypodius wegen Handschriften gewandt haben, obwohl das nicht ausdrücklich berichtet wird und infolgedessen auch nicht bekannt sein kann, mit welchem Erfolge. Trotzdem könnten wir, auch ohne bestimmtere Nachrichten, vermuthen, dass Dasypodius einen griechischen Herontext besessen haben muss. In der Einleitung zu der oben erwähnten Schrift 'Oratio de disciplinis mathematicis' kündigt er ein Unternehmen an, welches sich zur Aufgabe stelle, eine Anzahl mathematischer und physikalischer Schriften des Alterthums in einem vierbändigen Werke zu vereinigen. Diese Sammlung ist zwar niemals erschienen, aber es ist kein Zweifel, dass Dasypodius seine Vorbereitungen dazu getroffen hatte. Er spricht ausdrücklich von der Nothwendigkeit einer 'Bibliotheca variis variarum linguarum manuscriptis graecis latinisque antiquis exemplaribus instructissima[1])'. Der vierte Band insbesondere sollte enthalten: *ὀργανοποιητικὰ* (damit sind wahrscheinlich des Athenaeus Schrift *Περὶ μηχανημάτων* (Kriegsmaschinen) und Biton's *Κατασκευαὶ πολεμικῶν ὀργάνων καὶ καταπελτικῶν* (Herstellung von Kriegsmaschinen und Geschützen) gemeint, vgl. unten S. 182), *βελοποιητικά* (ohne Zweifel Herons Schrift vom Geschützbau), *πνευματικὰ ὑδραυλικά* (beides umfasst Herons Druckwerke), *αὐτοματοποιητικά* (Herons Automatentheater), *ἀρχιτεκτονικά*[2]). Erwähnt sei

1) In seinem ungedruckten Gesuche um Versetzung in den Ruhestand vom 25. October 1597, welches in Strassburg im Collegium Wilhelmitanum aufbewahrt wird und mir dank der Güte des Hrn. Dr. Erichson (s. unten S. 182, Anm. 5) vorliegt, erklärt er, seinem Nachfolger gern mit seiner 'Bibliotheca, quam ad haec studia mediocriter instructam habeo', zu Hilfe kommen zu wollen.

2) Es ist nicht ganz sicher, was damit gemeint ist; vermutlich waren es die in der erwähnten Schrift von Dasypodius ins Lateinische übersetzten Excerpte, welche R. Schöne *Damianos Schrift über Optik*. Griechisch und Deutsch. Berlin 1897, S. 22—30 als Auszüge aus Geminos bezeichnet, welche aber noch F. Hultsch *Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae*. Berolini 1864, S. 249, 14—252, 22 als Heronisch galten, weil ihre Ueberlieferung sich oft an Heronische Schriften anschliesst. Vgl. R. Schöne, S. X. Bemerkenswert ist jedenfalls, dass die erwähnten Auszüge sich mit architektonischer Perspective beschäftigen, wie auch das am Schlusse derselben stehende Bruchstück *Τί τὸ σκηνογραφικόν* (Was ist Skenographie?), welch letzteres Dasypodius anscheinend im zweiten Bande geben wollte, aber auch schon a. a. O. S. 18 lateinisch übersetzt hat. Uebrigens hat Dasypodius auch die übrigen Excerpte (Hultsch a. a. O. S. 246, 16—249, 12 aus Geminus, 252, 24—276, 14 aus Proklos mit einigen Auslassungen und 276, 16—279, 8 aus Anatolius (278, 19 *τὸ ἀρχιτεκτονικόν*!) übersetzt und giebt sie alle für Heronisch aus.

noch, dass der dritte Band ausser anderem 'Dioptrica', ohne Zweifel Herons Schrift *Περὶ διόπτρας* (s. unten S. 182), enthalten sollte[1]). Dasypodius beabsichtigte auch den erwähnten Schriften Figuren beizugeben und zwar reconstruirte. Dass er damals aber wirklich bereits eine griechische Heronhandschrift besass, welche fast alle mechanisch-physikalischen Schriften Herons enthielt, beweist eine weitere Notiz in der Vorrede der erwähnten Schrift 'de disciplinis mathematicis': omnia quae ab eodem Hierone scripta sunt intelligentur, ut sunt *πνευματικά*, *ὑδραυλικά*, *διοπτρικά*, *κλάσματα καὶ αὐτοματοποιητικὰ* et alia cum huius tum aliorum authorum scripta, quae penes me habeo et in lucem ederem, si consiliis opera auxiliisve magnorum virorum iuvarer'. Hier begegnet uns zum ersten Mal der Ausdruck *κλάσματα*. Er kehrt wieder in der historischen Einleitung des 'Heron mechanicus' in folgendem Zusammenhange: 'Pneumatica et clasmata (sc. Hero) ita tractat, ut, siquis saltem ea quae de vacuo proponit legat, summo et ingenio et doctrina excellenti eum praeditum fuisse deprehendat'. Schon aus dem Zusammenhange könnte man wohl entnehmen, dass 'pneumatica et clasmata' sich auf ein Werk beziehen müssen. Aber was sind die clasmata (= *κλάσματα*)? Nichts anderes als Fragmente. Es ergiebt sich nämlich aus der Ueberlieferungsgeschichte der Heronischen Pneumatik, dass in irgend einer älteren Handschrift der Pneumatik eine ganze Reihe von Capiteln durch Ausfall mehrerer Quaternionen ausgelassen war[2]). Diese gekürzte Pneumatik liegt in vielen handschriftlichen Exemplaren vor. In einigen anderen stehen wieder nur die *κλάσματα*, eben die in der gekürzten Pneumatik fehlenden Abschnitte. Wieder in einer anderen kleinen Gruppe von Handschriften sind am Schlusse der gekürzten Pneumatik die genannten Fragmente sei es unmittelbar, sei es hinter anderen dazwischen stehenden Werken zugefügt worden. Zu den wenigen Handschriften, die also zwar die vollständige Pneumatik, aber, um mit Dasypodius zu reden, als 'pneumatica und clasmata' enthalten, gehörte bis zu ihrer Verbrennung im Jahre 1870 auch die Handschrift C III 6 des evangelischen Seminars in Strassburg. Zum Glück sind Beschreibungen derselben von Vincent[3])

---

1) Die Dioptra wird auch in der neuen griechisch-deutschen Heronausgabe der Bibliotheca Teubneriana im dritten Bändchen von Herrn Dr. H. Schöne in Berlin herausgegeben werden, während Herons Pneumatik und Automaten im ersten Bändchen stehen, dessen Erscheinen unmittelbar bevorsteht. Die Belopoiika nebst der Mechanik und der Katoptrik wird auf Grund neuer Vergleichungen das zweite Bändchen bringen.

2) Vgl. die Einleitung zu Heronis op. I der Bibliotheca Teubneriana.

3) *Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque impériale* XIX, 2. Paris 1858. S. 172 und 431.

und Wescher[1]) sowie ihre Lesarten durch Friedrich Haase[2]) erhalten. Die Strassburger Handschrift enthielt danach folgende Schriften: Herons *Πνευματικά*, *Βελοποιητικά*, *Περὶ διόπτρας*, dann folgten Schriften des Athenaeus, Biton (s. oben S. 180) und ein von Wescher als Heronisch bezeichneter Abschnitt, welcher vermuthlich mit den oben S. 180, Anmerk. 2 besprochenen Stücken identisch ist. Hieran reihen sich *Τινὰ κλάσματα* und *Περὶ αὐτοματοποιητικῆς*. Den Schluss bildete Euklids Katoptrik. Wir sehen, dass die Handschrift lauter Dinge enthielt, welche Dasypodius in seinem Sammelwerke herausgeben wollte[3]). Zu dieser inneren Beziehung gesellt sich schliesslich auch noch ein äusseres Zeugniss. Die Handschrift enthielt unter dem Deckel den Vermerk: 'Mathiae Berneggeri ex biblioth. Dasypod. 1613.'[4])

Als ich das Resultat der vorstehenden Untersuchung Sr. Excellenz Hrn. Wirkl. Geh. Rath Richard Schöne mittheilte, äusserte dieser, wenn dem so sei, so rühre wahrscheinlich auch die Wolfenbüttler Handschrift August. 68, 2, welche eine lateinische Uebersetzung von Herons Dioptra mit perspectivischen, also reconstruirten Zeichnungen enthält, von Dasypodius her, wie er immer vermuthet habe. Trotzdem die Schriftzüge des Dasypodius mit denen der Handschrift nicht übereinstimmen[5]), ist dennoch eine innere Möglichkeit für die Abfassung der lateinischen Uebersetzung durch Dasypodius dadurch gegeben, dass sie in ihren Lesarten nach Mittheilung des Hrn. Dr. H. Schöne mit der Strassburger, freilich auch mit einer Pariser Handschrift, stimmt. Ich glaube jene Vermuthung nun meinerseits noch durch folgende Erwägungen stützen zu können. Gegen das Ende der fraglichen Handschrift findet sich von derselben Hand, welche den Text geschrieben hat, auf dem Rande (Fol. 54$^v$) ein kritisirender Hinweis auf Fig. 54 von Bessonus *Theatrum instrumentorum et machinarum*. Dieses Buch ist erst 1578 in Lyon erschienen. Also muss die Handschrift

---

1) *Poliorcétique des Grecs.* Paris 1867. S. XXXV.

2) Die Haase'schen Collationen sind jetzt im Besitze Seiner Excellenz des Herrn Wirklichen Geheimen Rathes und Generaldirectors der Königlichen Museen in Berlin, Professors Dr. R. Schöne. Dessen bekannte Liberalität ermöglichte mir die Benutzung der Haase'schen Collationen, die mir auch in diesem Augenblicke für die Pneumatik und die Automaten noch vorliegen.

3) 'Catoptrica' waren von Dasypodius für den zweiten Band vorgesehen. Er hatte übrigens Euklids Katoptrik schon einmal im Jahre 1557 herausgegeben.

4) Nach Anm. 3 könnte Dasypodius die Handschrift schon im Jahre 1557 besessen haben. In diesem Jahre trat er die Professur an.

5) Herr Dr. Erichson, Director des Collegium Wilhelmitanum in Strassburg, hatte die Liebenswürdigkeit, zwei eigenhändige Schriftstücke des Konrad Dasypodius (von 1562 und 1597) zum Vergleich zu übersenden.

nach dieser Zeit entstanden sein. Jedenfalls wusste, nach einer Randbemerkung auf Fol. 44r der Urheber derselben, dass die berühmte Heronische Dreiecksformel[1]) sich bei Heron dem Jüngeren wiederhole[2]), der dort allerdings mit Heron aus Alexandria identificirt wird, ferner bei Jordanus Nemorarius (13. Jahrh.), Pediasimus (14. Jahrh.), Tartalea (Tartaglia † 1557), Nonnesius (Nunnez? † 1577)[3]) und dass Freigius, dessen sowohl anderen als auch Konrad Dasypodius und David Wolckenstein gewidmete 'quaestiones geometricae et stereometricae' 1583 in Basel erschienen[4]), mit Unrecht behaupte, sie sei nicht von Heron überliefert. Auch kannte der Bearbeiter das 21. Kapitel der Kesten des Julius Africanus, das ihm bei der Aufgabe, von einem Ufer aus die Breite eines Flusses zu messen (Dioptra, Cap. 9, S. 210 Vinc. und ebenda S. 408), wegen des gleichen Vorwurfs in Erinnerung kommt. Ebenso muss dem Uebersetzer die Schrift des Heron aus Alexandria über die Automatentheater bekannt gewesen sein. Denn zur Dioptra, Cap. 17, S. 240, 11 (*σχοινίον εὖ ἐκτεταμένον καὶ προβεβασανισμένον*), wo von einem gut ausgezogenen und vorher auf die Probe gestellten Seile die Rede ist, erinnert sich der Schreiber einer Stelle der Automaten (Heron. op. I, 344, 12 ff. = S. 245 Thévenot), an welcher ein zweckentsprechendes Verfahren beschrieben ist. Daher auf Fol. 32v die Randbemerkung: 'id quomodo fiat docet (sc. Hero) in automatopoeeticis'[5]). Die Handschrift ist nicht etwa Abschrift einer älteren lateinischen Uebersetzung, sondern die Uebersetzung ist, wie ihr Titel besagt, nach dem Griechischen gemacht (e Graeco in Latinum conversus). Auch finden sich an manchen Stellen Verbesserungen in der Art, wie wenn jemand sein Manuscript behufs Drucklegung nochmals selbst durchcorrigirt oder corrigiren lässt, so auf Fol. 2r eine dreifache Correctur für die Uebersetzung der Worte S. 174, 10, 11, *ἐξέσται τοῖς βουλομένοις ἐντυγχάνουσι κρίνειν τὴν διαφοράν.* Ferner sind für das Räderwerk von Herons Wegmesser (Hodometer) nicht weniger als drei

1) In Herons neuentdeckten Metrika ist die Formel in einer von der Dioptra abweichenden Recension überliefert. Siehe Band III der neuen Heronausgabe ed. H. Schöne. (In Vorbereitung.)

2) Vgl. Martin *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie* in den Mémoires présentés par divers savants à l'academie des inscriptiones et belles-lettres. Paris 1854, S. 488, 489.

3) Gewöhnlich heisst Nunnez lateinisch Nonius. Ein Nonius de arte navig. wird auch wiederholt in der Handschrift erwähnt. Das ist auf alle Fälle Nunnez, dessen Schrift '*de arte et ratione navigandi*' zuerst 1546, dann 1566 und 1573 erschien.

4) Vgl. Kästner, *Gesch. der Mathematik.* Göttingen 1797, II, 738.

5) Dass der Urheber dieser Randbemerkung grosses Interesse an der erwähnten Sache nahm, leuchtet ein. Vgl. dazu unten S. 188. 191.

verschiedene Entwürfe vorhanden, von denen zwei wieder durchgestrichen sind. So viel ist also wohl sicher, dass wir es hier nicht mit einer gewöhnlichen Abschrift, sondern mit der Arbeit eines Gelehrten des 16. Jahrhunderts zu thun haben, der ausser anderen Heron und auch Pediasimus kannte, wie Dasypodius; denn auch des Pediasimus gedenkt Dasypodius in der Vorrede zu seiner bekannten 'Oratio etc.'

Nehmen wir einmal an, die Uebersetzung rühre wirklich von Dasypodius her, so bliebe die Frage zu beantworten, auf welche Weise sie nach Wolfenbüttel kommen konnte. Die Handschrift gehört zu den von Herzog August dem Jüngeren, dem verdienstvollen Gründer der Wolfenbüttler Bibliothek, erworbenen. Dieser hatte ständig einen Agenten in Strassburg, das war in den Jahren 1620—1634 der Professor Joachim Cluten, der ihm abgesehen von der Mittheilung wichtiger politischer Ereignisse, auch hin und wieder den Ankauf von Büchern vermittelte. Darüber giebt eine stattliche Reihe wohlerhaltener Briefe Clutens (Handschrift 88 Nov.) an den Herzog Aufschluss[1]). Bereits in diesen Briefen ist wiederholt von einem mathematischen Catalogus die Rede, den Cluten am 3. Juni 1621 (Fol. 21$^r$) bestimmt erklärt, über acht Tage absenden zu wollen. Es wird zwar nicht gesagt, ob es sich um Handschriften oder Bücher handelt. Aber es geht doch daraus hervor, dass dem Cluten bekannt war, wie sehr sich der Herzog auch für mathematische Dinge interessirte. Mehrere Male wird in Clutens Briefen auch Mathias Bernegger erwähnt, dem 50 Rthll. übergeben werden sollen (Fol. 211$^r$); wofür, ist nicht bekannt. Dieser Bernegger, ein angesehener Gelehrter, Professor der Akademie in Strassburg, Uebersetzer einer Schrift Galileis und Herausgeber trigonometrischer Tafeln, muss aber damals schon für den Herzog Bücher besorgt haben. Wenigstens findet sich auf einem Briefe vom 26. Februar 1632 (Fol. 211$^r$, von des Herzogs Hand?) eine Randnotiz, nach welcher ihm ein Buch übersandt werden soll, 'so Berneggerus hat'. Letzterer vermittelte nach Clutens Tode für den Herzog den Ankauf von dessen Bibliothek, von welcher über die Hälfte 1637 nach Braunschweig und später nach Wolfenbüttel kam. Zugleich wurde Bernegger bis zu seinem Tode (also 1636—1640) Clutens Nachfolger als Agent des Herzogs. Nach Bernegger's Tode versah dessen Schwiegersohn Joh. Freinsheim diese Stellung bis 1642. Beide erhielten ebenso wie Cluten ein Jahrgehalt (annuum salarium) vom Herzog.

Nun liegt es gewiss nicht so fern zu vermuthen, dass Dasypodius, wie schon 'Hieronis nomenclatura', auch die anderen Schriften Herons für sein

1) Vgl. auch Jacob Burckhard *Historia bibliothecae Augustae*. Lipsiae 1744, S. 195.



mathematisches Sammelwerk lateinisch bearbeitete, um sie in seiner Ausgabe dem griechischen Texte zu leichterem Verständnis hinzuzufügen. Ist dem so, so war es möglich, dass Bernegger, der, wie uns bekannt (s. oben S. 21), aus der Bibliothek des Dasypodius die griechische Heronhandschrift erworben hatte, auch die lateinische Bearbeitung sich verschaffte, und da letztere für ihn selber neben dem griechischen Exemplare nicht solchen Werth haben mochte als für den von einer 'summa codices manuscriptos undique colligendi cupiditas' (Burckhardt a. a. O. S. 226) erfüllten Herzog, welcher derzeit überhaupt kein Exemplar von Heron besass, so hatte er die beste Gelegenheit, durch Ueberlassung dieser mit nicht unschönen technischen Reconstructionen ausgestatteten Handschrift sich seinem fürstlichen Auftraggeber und Gönner, von dessen Interesse für mathematische Dinge[1]) er wusste, gefällig zu erzeigen. Sollte es nun nach diesen Auseinandersetzungen wahrscheinlich sein, dass die Wolfenbüttler Dioptra von Dasypodius stammt, so würde daraus gefolgert werden müssen, dass Dasypodius in technischen Dingen nicht unerfahren gewesen ist. Denn in des Dasypodius griechischer Handschrift der Dioptra befand sich nach Mittheilung des Herrn Dr. H. Schöne eine Lücke, welche in der lateinischen Bearbeitung zwar als solche kenntlich gemacht, aber auch zugleich in sachkundiger Weise ergänzt ist. Wir werden uns dessen später wieder erinnern, wollen aber zuvor das Werk im Umriss skizziren, welches mehr als alle litterarische Thätigkeit dem Dasypodius ein Andenken bei der Nachwelt gesichert hat.

Das ist die Strassburger astronomische Münsteruhr[2]). Wir geben eine kurze Beschreibung ihrer äusseren Einrichtung.

---

1) Des Herzogs Interesse für mathematische Dinge wird unter anderem dadurch bestätigt, dass er später den berühmten, um 600 n. Chr. entstandenen Codex Arcerianus kaufte, welcher inhaltlich in so naher Beziehung zu Heron steht, dass mehr als ein Gelehrter die im Codex Arcerianus überlieferten römischen Agrimensoren geradezu aus Heron schöpfen lässt.

2) Ein schöner Kupferstich des Strassburger Hohenlohe-Museums aus dem Jahre 1574 zeigt uns deutlich das Aeussere der Uhr des Dasypodius. Der Stich stand uns in Braunschweig dank der Liebenswürdigkeit des Hrn. Directors Dr. Seyboth zur Verfügung. Die beabsichtigte Reproduction liess sich leider nicht ausführen, da der Stich sich zu einer Wiedergabe durch Autotypie nicht eignet. Um aber das Verständniss der Beschreibung der Uhr doch etwas zu erleichtern, haben wir uns entschlossen, eine Zinkotypie der heutigen Uhr beizugeben. Denn das äussere Gehäuse der Uhr ist noch heute in der Schwilgué'schen Uhr (1838—1842) im wesentlichen dasselbe wie in der des Dasypodius. Vgl. Schwilgué, *Description abrégée de l'horloge astronomique de la Cathédrale de Strasbourg.* Strasbourg 1847. 3e édition, S. 22. Eine getreue Nachbildung der heutigen Uhr in trefflicher Heliogravüre giebt A. Stolberg in den *Studien zur deutschen Kunstgeschichte* Heft 18: *Tobias*

Abgesondert lag vor dem ganzen Werke ein Himmelsglobus[1]) zur Darstellung der täglichen Drehung des gestirnten Himmels. Die Zahl der Fixsterne (1022) ist die Ptolemäische. Die Kugel drehte sich in 24 Stunden automatisch um sich selbst. Sie wurde getragen von einem nicht mehr vorhandenen Pelikan, welcher nach der Absicht des Dasypodius ein Abbild der Ewigkeit sein sollte, während er sonst das Sinnbild aufopfernder Liebe ist. Der Pelikan hatte aber noch den praktischen Zweck, einige innere Bewegungsvorrichtungen, nämlich Zahnräder und die Achsen des Himmelsglobus aufzunehmen und zu verbergen[2]). Wie die Verbindung mit dem übrigen Werke hergestellt wurde, ist im einzelnen nicht bekannt. Den Globus hatte Dasypodius selbst aus 'Tuch, Papier, Leym, Kreyd und anderer Materie' unter Beihilfe von Tobias Stimmer angefertigt. Der Durchmesser des Globus betrug drei Werkschuh, wobei er sich an eine entsprechende antike Vorschrift hielt[3]).

Hinter dem Globus befand sich in der Mitte des Sockels der immerwährende Kalender, bestehend aus zwei beweglichen Ringen und einer unbeweglichen Scheibe, auf welch letzterer eine Karte von Strassburg und den benachbarten Rheingegenden dargestellt war. Der äussere Kalenderring gab die 365 Tage des Jahres an, welche rechts (in der Richtung nach dem Beschauer) Apollo mit einem Pfeile zeigte, während links gegenüber Diana den entsprechenden Tag nach einem halben Jahre andeutete. Der Kalenderring drehte sich einmal im Jahre von links nach rechts, sein Durchmesser betrug 10 Werkschuh, seine Breite einen. Ein (grosses) hölzernes Rad für die Bewegung des Kalenderreifens sowie eine Anzahl (kleinerer) nicht montirter Räder und Getriebe dazu sind noch im Frauenhause zu Strassburg vorhanden, wie Herr Münsterbaumeister Arntz[4]) die

---

*Stimmers Malereien an der astronomischen Münsteruhr zu Strassburg.* Strassb. 1898. Es wurde uns von der Verlagsfirma J. H. E. Heitz in Strassburg gütigst gestattet, sie zur Reproduction auf der am Schluss des Heftes beigefügten Tafel zu benutzen. Dafür wissen ihr Verleger und Verfasser nicht wenig Dank.

1) Er steht jetzt im Frauenhause zu Strassburg. Siehe Anm. 4.

2) Vgl. Heron mechanicus, Blatt $G^v$ (Rückseite) letzte Zeile und N. Frischlin a. a. O. Blatt C $III^r$ (Vorderseite), Zeile 19.

3) Siehe Heron mechanicus Blatt G, Zeile 7—9: 'quam quidam ex antiquis et probatis scriptoribus volunt tantam esse debere, ut diameter eius ad minus trium sit pedum, quanta nostri globi magnitudo est.'

4) Ich fühle mich Herrn Arntz für seine werthvollen brieflichen Mittheilungen über den jetzigen Bestand und Befund der Uhr des Dasypodius zu grossem Danke verpflichtet, dem ich gern hiermit öffentlich Ausdruck gebe. Auch hatte Herr Arntz die Liebenswürdigkeit, mir für einige Zeit eine dem 'Stift Unser-Frauen-Werk' gehörige photographische Aufnahme des noch vorhandenen montirten Räderwerks zur Benutzung zu überlassen.

Güte hatte mir mitzutheilen. Der zweite[1]) innere, drei Werkschuh breite, bewegliche Ring, welcher sich in hundert Jahren einmal von rechts nach links drehte, enthielt auf 16 abgeteilten concentrischen Kreisen die Jahreszahlen für ein Jahrhundert (1573—1673) nach christlicher Zeitrechnung und in Jahren seit Erschaffung der Welt, die Frühlings-Tag- und Nachtgleichen (zugleich die Präcession der Tag- und Nachtgleichen, wenigstens nach Heron mech. G III$^r$), die beweglichen Feste, die Schaltjahre u. drgl.

Ueber dem immerwährenden Kalender waren zur bildlichen Darstellung der sieben Wochentage in einer niedrigen Nische die sieben Wochenplaneten Mars, Mercur, Jupiter, Venus, Saturn und (wegen des Ptolemäischen Systems) die Sonne und der Mond auf einer drehbaren Scheibe so aufgestellt, dass allemal nur der Planet hervortrat, welcher dem betreffenden Tage den Namen gab, also Mars am Dienstag, Mercur am Mittwoch u. s. w., am Sonntag aber Phöbus Apollo und am Montag Diana[2]).

Oberhalb der Planeten ragt über den oberen Rand des Sockels ein Zifferblatt mit Viertelstunden- und Minuteneintheilung[3]) hervor. Daneben sitzt auf der einen Seite ein Genius, welcher beim Stundenschlage sein Scepter hob und damit die Stunden zählte, während der andere stündlich nach dem Glockenschlage eine Sanduhr umkehrte. Das Räderwerk für die letztere Vorrichtung ist erhalten.

Im Mittelgaden befindet sich das Astrolabium[4]), eine Scheibe mit sieben sich von einander unabhängig und ungehindert bewegenden Zeigern, welche den jeweiligen Stand der sieben Ptolemäischen Planeten im Thierkreise, der einen kleineren Kreis innerhalb der Scheibe bildete, anzeigten. Der Zeiger für den Mond brauchte zu seiner Umdrehung einen Monat, der für die Sonne, Mercur und Venus je ein Jahr, für Mars 2 Jahre, für Jupiter 12 Jahre und für Saturn 30 Jahre[5]). Auf dem äusseren Rande des Astrolabiums waren die ganzen[6]) und die halben Stunden angegeben.

---

1) Diesem zweiten Ringe entspricht der Lage nach bei Schwilgué die azurblaue breite Ringscheibe in der Mitte.

2) An diesen 'Wochentagen' hat Schwilgué anscheinend nichts oder doch nichts Wesentliches geändert.

3) Das ist bei Schwilgué ein modernes Zifferblatt mit Stunden- und Minutenzeiger.

4) Das hat Schwilgué durch ein Planetarium nach Copernicanischem System mit unbeweglicher Sonne in der Mitte ersetzt.

5) Vgl. Warhafft. Ausleg. S. 15. Die Umdrehungszeiten sind abgerundet, allerdings bei einigen Planeten im Vergleich zur heutigen Rechnung wenig genau.

6) Das Räderwerk zur Bewegung des Schlagwerks der ganzen (und der Viertelstunden) ist erhalten. Der Lage nach waren bei Dasypodius die Stunden verzeichnet, wo bei Schwilgué der Thierkreis steht, also auf dem äusseren Rande.

Der Stundenzeiger (Drachenzeiger) bewegte sich in 24 Stunden einmal um die Scheibe. Die 24 Stunden zerfielen in zweimal 12 Stunden. Die Mitte des Astrolabiums zierte eine Erdkugel, welche auch die Zeiger enthielt. Das zum Astrolabium gehörige Räderwerk stand dahinter.

Ueber dem Astrolabium sah man die Sternscheibe mit dem Monde. Der Mond, durch eine Scheibe[1]) mit vergoldeter Figur dargestellt, verschwand zur Zeit des Neumonds hinter der durch zwei Halbkreise abgegrenzten unteren Hälfte der Scheibe und kam nach und nach wieder hervor, bis er bei Vollmond die ganze Scheibe zeigte. Das Räderwerk für diese Sternscheibe ist, wenn auch ohne Gestell, erhalten.

In dem oberen halbrunden Vorbau befand sich unten ein drehbarer horizontaler Kreisring ('Radd') mit vier die menschlichen Lebensalter[2]) darstellenden Figuren, von denen ein Knabe mit einem Beckenschlage das erste Viertel einer Stunde, ein Jüngling mit zwei Schlägen das zweite, ein Mann mit drei das dritte und ein Greis mit vier das letzte Viertel anzeigte. In dem Stockwerke darüber standen rechts und links von einer Glocke die Figuren Christi und des Todes ebenfalls auf einem horizontalen Kreisringe ('Radd'). Beim Stundenschlage trat Christus mit Kreuz und Palmzweig zum Zeichen der Erlösung vor, während der Tod[3]) zurückwich. Dann drehte sich aber der Ring plötzlich nach der entgegengesetzten Richtung, und der Tod ging wieder vor und gab die der Stunde entsprechenden Glockenschläge. Von den erwähnten Reifen ist nichts mehr vorhanden.

Der Thurm zur Linken des Beschauers enthielt die Gegengewichte, welche an hanfenen Schnüren (Frischlin: 'funes cannabaei') hingen. Vielleicht gingen auch noch nach einzelnen Walzen Schnüre. Weder Schnüre noch Gegengewichte sind erhalten[4]).

Das Räderwerk ist aus eisernen Stirnrädern und Kron- oder Kammrädern von sehr verschiedenem Durchmesser und sehr verschiedener Zahnzahl und kleineren Getrieben zusammengesetzt. Die Räderübersetzung ist in ausgiebigem Maasse verwandt. Die eisernen Achsen sind sowohl horizontal als vertical.

---

1) Das ist bei Schwilgué jetzt ein Mondglobus, bestimmt, die Mondphasen sichtbar zu machen.

2) Die vier Lebensalter hat Schwilgué mit einigen Aenderungen beibehalten.

3) Den Tod hat Schwilgué zu den Lebensaltern versetzt und an seine Stelle die 12 Apostel treten lassen, welche 12 Uhr Mittags, wie allbekannt, vor ihrem Herrn und Meister vorüberziehen und sich vor ihm verneigen.

4) Ich übergehe den Hahn und das Glockenspiel, weil ersterer von Dasypodius aus dem noch älteren Werke übernommen ist und letzteres ganz von David Wolckenstein stammt. Uebrigens ist das Räderwerk für beides erhalten.

Was nun die technische Einrichtung der Uhr betrifft, so liegt es nahe, anzunehmen, dass diese ganz und gar dem Habrecht aus Schaffhausen anzurechnen sei, wenn man weiss, dass Dasypodius in erster Linie Gelehrter war und dass andrerseits Habrecht nach Dasypodius' eignem Zeugnisse schon anderweitig Uhrwerke angefertigt hatte. Darum nennt z. B. das *„Buch der Erfindungen, Gewerbe und Industrien“* VI, 183[7] geradezu den Habrecht als Urheber der astronomischen Uhr, ohne irgendwie des Dasypodius zu gedenken. Ich glaube aber, dass damit dem Dasypodius Unrecht geschieht. Nach unserer Auffassung hat sich Dasypodius auch um die technische Einrichtung gekümmert. Z. B. hinsichtlich der Räderübersetzungen waren doch gewiss genaue Berechnungen erforderlich, um zu wissen, wie gross die verschiedenen Durchmesser der Räder oder wie gross die Zahl der Zähne an den verschiedenen Uebertragungen sein musste, um das eine Mal eine Umdrehung in hundert Jahren, ein anderes Mal in 30, in 12 oder in kürzerer Zeit herbeizuführen. Um dies festzustellen, genügten wohl nicht die Kenntnisse des praktischen Technikers, da mussten die theoretischen des 'mechanici logici', wie Dasypodius sich nennt, aushelfen. Wir sind daher nicht der Meinung, dass sich die Mitwirkung des Dasypodius lediglich auf die astronomischen und kirchlichen Daten beschränkt habe.[1]) Nun sind die Gebrüder Habrecht nicht etwa ihres bedeutenden Rufes wegen aus Schaffhausen nach Strassburg geholt, sondern sie haben sich selbst durch Schaffhausener Stipendiaten dem Dasypodius empfehlen lassen, der von ihrer Kunstfertigkeit noch nichts weiss, aber erklärt, es 'mit ihnen gewagt zu haben'. Den Plan zu der Uhr entwirft dann Dasypodius allein. Kann man sich denken, dass er alle die erwähnten Dinge anordnete, ohne eine Vorstellung von einem entsprechenden Mechanismus zu haben? Erst nachdem Dasypodius von Oswald Schreckenfucks (so!) in Freiburg seinen 'Abriss' hat begutachten lassen, werden die Habrecht gefragt, ob sie sich das zu machen unterstehen, was Dasypodius 'an(ge)geben und erfunden'. Auch die ganze Ausführung des Werkes überwacht Dasypodius, unterstützt von David Wolckenstein, selbst während einer schweren Krankheit wird nicht 'das Geringste' ausgeführt, worüber Dasypodius nicht erst befragt wäre. Dazu kommen noch folgende Aeusserungen des Dasypodius, Warhafft. Aussleg. S. 17: 'das (= dass) solches werck nicht gering betrachtens erfordert hat, auch nicht auss dem Uhrenmacher allein her flüsset, sonder auss der Astronomey unnd aller schwerichsten und höchsten stücken diser

1) Es sei gestattet, auf die kunstvolle Marburger Globusuhr als auf einen analogen Fall hinzuweisen. Der Mechanismus wurde zwar praktisch von dem Uhrmacher Hans Buch ausgeführt, aber ersonnen von Eberhard Baldewein. Vgl. Alhard von Drach a. a. O. S. 15.

kunst, auch keinem Uhrenmacher oder Handtwercksman, der die Astronomey nicht auss rechten grundt gestudiert, erlernet und erfahren hat, müglich sein kan und mag, solches Astronomisch Uhrenwerck erfinden angeben, anordnen, und zum ende zubringen.“ Sodann spricht Dasypodius a. a. O. S. 13 ausdrücklich von der ‘underweisung deren so daran gearbeit unnd als handtwercks leüt nôtig zu disem Astronomischen Uhrwerck gewesen.’ Denn nach Heron mech. H IIv waren die ‘opifices’ in den Künsten unerfahren, welche die selbstthätigen Bewegungen, die Zeigervorrichtungen u. s. w. betrafen (artium, ex quibus automata, gnomonica, pneumatica, sphaerica desumpta fuerunt, ignari erant). Dass die erwähnte Unterweisung sich aber thatsächlich auch auf solche technische Dinge wie das Räderwerk bezogen haben muss, beweist eine Stelle aus Frischlin, wo er den Isaak Habrecht feiert:

> . . . tu gyris addere certos
> Doctus ab Astronomo dentis rite omnia solus
> Ictibus innumeris operosa incude parasti.

Damit ist unzweideutig gesagt, dass Habrecht die Zahnräder nach der Anweisung des Astronomen, also des Dasypodius, geschmiedet und mit einer bestimmten Anzahl Zähne versehen habe.

Aus dem allen geht das eine zur Genüge hervor, dass Dasypodius sich auch um die technische Einrichtung gekümmert und etwas davon verstanden haben muss, wie wir auch oben (S. 185) technische Kenntnisse bei ihm glaubten voraussetzen zu dürfen. Dass Habrecht dabei seine eigenen praktischen Erfahrungen mit verwerthet haben wird, ist zu natürlich, als dass man das in Abrede stellen dürfte. Dafür aber, dass die Idee und die allgemeinen Principien des Mechanismus nicht von Dasypodius herrühren könnten, muss der Beweis erst noch erbracht werden.

Dürfen nun die vorstehenden Ausführungen einigen Anspruch auf Wahrscheinlichkeit erheben, so sind wir auch berechtigt zu fragen, woher Dasypodius seine technischen Kenntnisse hatte. Schon in der Mitte des 16. Jahrhunderts waren freilich Räderuhrwerke mit Schlagwerken nichts Seltenes. Wir würden uns darauf beschränken müssen, in derartigen Vorrichtungen das Material zu sehen, aus dem Dasypodius seine Kenntnisse der Mechanik gewonnen hätte, wenn er nicht selber in seiner lateinischen Beschreibung der Uhr, seinem Heron mechanicus — an sich schon sehr bezeichnend! — sich wiederholt auf antike Mechaniker beriefe. Die eine Vorrichtung erklärt er, der antiken *γνωμονική* (gnomoniké, Zeigervorrichtungen)[1],

1) Vgl. Procl. in I. Eucl. elem. ed. Friedl. 41, 25 *ἡ γνωμονικὴ περὶ τὴν ὡρῶν καταμέτρησιν ἀσχολουμένη διὰ τῆς τῶν γνωμόνων θέσεως* ‘die Gnomonik, welche



eine andere der *σφαιροποιΐα* (sphairopoiïa)[1]), eine dritte der *αὐτοματοποιητική* (automatopoietiké, selbstthätige Bewegungsvorrichtungen) entnommen zu haben. Dass damit Herons Automatentheater (*Περὶ αὐτοματοποιητικῆς*) gemeint sind, dürfte nach unseren früheren Ausführungen niemand ernstlich in Zweifel ziehen. Auf Heron weisen schliesslich auch in der 'Warhafft. Aussleg.' S. 1 die Worte hin: 'Zu dem so hat Heron Alexandrinus das redderwerck, die gewicht, mass und was dergleichen, also beschriben, auch in das werck gericht an uhren, an anderen dergleichen wercken, das solches handtwerck der gar alten[2]) eins ist, und nicht newlich erfunden'.

Was konnte nun Dasypodius aus Heron für seine Zwecke lernen?

Bei seinen Automatentheatern, sowohl dem fahrenden als dem stehenden (vgl. Heron. op. I, 347, 21. 357 = S. 245. 248 Thév.) spricht Heron vielfach von Gegengewichten, welche sich in einem senkrecht auf einem Unterbau stehenden, kastenartigen Behälter befanden, ähnlich wie bei der astronomischen Uhr. Bezüglich der Schnüre erscheint beachtenswert, dass Heron in der Beschreibung der Automatentheater (Heron. op. I, 345, 23 = S. 245 Thévenot, s. oben S. 183) ausdrücklich betont, man solle keine Schnüre aus Sehnen nehmen, weil sie sich je nach der Veränderung der Luft zusammenzögen oder dehnten. Diese Vorschrift hat Dasypodius beachtet, denn nach Frischlin waren die nicht mehr vorhandenen Schnüre aus Hanf[3]). Ferner sind Heron Zahnräder geläufig, z. B. in der Pneumatik bei der sich selbst regulirenden Lampe (Heron. op. I, 162 = S. 197 Thév.) oder beim stehenden

sich mit der Stundenmessung mit Hilfe Einsetzens der Zeiger (an der Sonnenuhr) beschäftigt'.

1) Bei der Himmelskugel beruft sich Dasypodius auf Archimedes. Vgl. Procl. ibid. 41, 16 *ἡ σφαιροποιΐα κατὰ μίμησιν τῶν οὐρανίων περιφορῶν, οἵαν καὶ Ἀρχιμήδης ἐπραγματεύσατο* 'die Kunst, Himmelsgloben zur Nachahmung des Umlaufs der Gestirne herzustellen, eine Kunst, welche schon Archimedes ausübte' und Papp. collect. 1026, 9—11 ed. F. Hultsch, *Κάρπος δὲ πού φησιν ὁ Ἀντιοχεὺς Ἀρχιμήδη τὸν Συρακόσιον ἓν μόνον βιβλίον συντεταχέναι μηχανικὸν τὸ κατὰ τὴν σφαιροποιΐαν* 'Kárpos aus Antiochia aber sagt irgendwo, Archimedes aus Syrakus habe nur ein Buch über Mechanik verfasst, nämlich das, welches von der Anfertigung von Himmelsgloben handelt' und dazu den Aufsatz von F. Hultsch *Ueber den Himmelsglobus des Archimedes*. Ztschr. f. Math. u. Phys. Hist. lit. Abth. XXII, 1877, S. 106 f.

2) Vgl. noch *Warhafft. Ausleg.*. Vorrede: 'Aber ob unsere Handtwercks leiit so künstlich seyen als der Heron, Archimedes und andere, das ist gar nicht zuzugeben.'

3) Es ist übrigens die Bemerkung von S. Günther *Abriss der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften im Alterthum*, S. 265, Anm. 6 über Herons Kenntniss der erwähnten hygrometrischen Thatsache dahin zu vervollständigen, dass Philon Mech. Synt. IV, 72, 20 ed. R. Schöne, bereits die Einwirkung der Luftveränderung auf die Thiersehnen gekannt hat.

Automaten ein Sternrad zur automatischen Bewegung eines hämmernden oder zimmernden Armes (Her. op. I, 422 = S. 265. 266 Thév.). Wichtig ist besonders die mehrmalige Anwendung der mechanischen Uebersetzung, von denen ein Beispiel in Herons Automatentheatern (Heron, op. I, 398 = S. 291 Thév.), drei andere in dessen Dioptra S. 306—316, 330—334 ed. Vinc. bezw. Papp. collect. VIII, 1060—1068 ed. Hultsch vorkommen, die letzteren drei bei Zahnrädern.[1]) Dioptra, Cap. 35 (316 Vinc.) beschreibt einen selbstthätigen Distanzmesser[2]) für Schiffe. Ein Flügelrad setzt eine Schraube ohne Ende in Drehung, diese eine gezahnte Welle (Rad) mit daran befestigtem gezahntem Triebrad für eine zweite derartige Welle. Das mit dieser verbundene Getriebe setzt wieder eine dritte gezahnte Welle mit gezahntem Triebrad in Bewegung und letzteres eine vierte gezahnte Welle mit äusserer Zeigervorrichtung. Das erste Zahnrad hat 81 Zähne, das damit verbundene Triebrad 9, das zweite Zahnrad 100 Zähne und sein Getriebe 18, das dritte 72 Zähne mit Getriebe von 18 Zähnen, das vierte 100 Zähne. Eine Umdrehung des vierten Zahnrades mit dem Zeiger ergiebt also $\frac{100}{18} \cdot \frac{72}{18} \cdot \frac{100}{9} \cdot 81 = 20\,000$ Umdrehungen des Flügelrades oder, da dieses mit einer Umdrehung 5 Schritte zurücklegt, 100 000 Schritte. Das äussere Zifferblatt mit dem Zeiger, welches in 100 Grade geteilt war, zeigte also mit jedem Grade eine Entfernung von 1000 Schritten oder einer römischen Meile an[3]). Ein anderes Beispiel bildet der Barulkos (Hebewinde, Dioptra, Cap. 37 = Mechanik I, 1), welcher mit Hilfe von Zahnräderübersetzungen ein Gewicht von beispielsweise 1000 Talenten unter Aufwendung einer Kraft von nur 5 Talenten hebt. Die Uebersetzung wird in diesem Falle nicht nach der Zahl der Zähne, sondern nach dem Verhältniss der Durchmesser[4]) berechnet, von denen der des Getriebes bis auf das letzte immer fünfmal kleiner ist als der mit ihm verbundenen gezahnten Welle. Für die Berechnung wird das Hebelgesetz zu Grunde gelegt. Da die zu bewegende Last 1000 Talente beträgt, so ergiebt sich für die Kraft[5]) $x_1$, welche an der ersten

---

1) Auch in der S. 168, 1 erwähnten Heronischen Mechanik findet sich die Zahnräderübersetzung ausführlich erläutert. Indessen kannte Dasypodius natürlich Herons Mechanik nicht, mit Ausnahme der auch griechisch überlieferten Abschnitte.

2) Der Distanzmesser Herons erinnert in seiner Einrichtung sehr an den Woltemann'schen Strommesser.

3) Es wird dabei natürlich die Stärke des Stromes überall als gleichmässig vorausgesetzt.

4) Die Zähne der ineinander greifenden Wellen und Getriebe stehen natürlich in gleichem Verhältnisse, wie ihre Durchmesser.

5) Es bezeichnen $x_2$, $x_3$, $x_4$ die Kräfte, welche an den anderen Zahnrädern angreifen.

gezahnten Welle angreift, das statische Moment $5x_1 = 1000$, weil $x_1 : 1000 = 1 : 5$, oder $x_1 = 200$; entsprechend für die zweite Uebersetzung $x_2 : 200 = 1 : 5$ oder $x_2 = 40$, für die dritte $5x_3 = 1 \cdot 40$ oder $x_3 = 8$. Für die vierte und letzte Uebersetzung ist das Verhältniss der Durchmesser aber $8 : 5$[1]). Daraus folgt die Gleichung $8x_4 = 8 \cdot 5$ oder $x_4 = 5$. Und damit ist bewiesen, dass bei der erwähnten vierfachen Uebersetzung in den angegebenen Verhältnissen eine Kraft von 5 Talenten einer Last von 1000 Talenten das Gleichgewicht hält und dass es nur noch eines kleinen Ueberschusses von Kraft bedarf, um die Reibung zu überwinden und die Last emporzuziehen.

Wir erinnern uns jetzt, dass Dasypodius bei der astronomischen Uhr Räderübersetzungen in ausgiebigem Masse verwandt hat, mit Zahnrädern von ungleicher Zahnzahl und Wellen und Getrieben von ungleichen Durchmessern, und verwenden musste. Denn er hatte Umdrehungen von ungleicher Dauer (Viertelstunden, Stunde, Tag, Woche, Jahr, von 2, 12, 30 und 100 Jahren) auszuführen, und die Räderübersetzung dient ja nicht bloss zum Heben von Lasten, sondern ist auch geeignet, eine Achsendrehung zu beschleunigen oder zu verlangsamen, wie man aus dem ersten Heronischen Beispiele erkennen kann. Nun sind freilich Räderübersetzungen schon im Mittelalter, z. B. im Anfange des 15. Jahrhunderts, wahrscheinlich auch schon im 14. Jahrhundert, praktisch angewendet[2]). Aber ich fürchte, dass die mittelalterlichen Vorrichtungen lediglich auf praktischen Versuchen beruhen, dass also z. B. das gegenseitige Verhältniss der Durchmesser bei einer Räderübersetzung oder die Schwere des Gegengewichts nicht durch Berechnung[3]) gefunden wurde, wie das sicher für die grossen Dimensionen der Strassburger astronomischen Uhr erforderlich war. Das war für jene Zeit nicht gut möglich, weil man nicht wusste, dass das Hebelgesetz auch auf das Wellrad Anwendung finde. Die Kenntniss dieser Thatsache, welche von Heron im Anschluss an Archimedes mit Bewusstsein verwertet wird[4]), scheint im Mittelalter verloren gegangen zu sein, und erst Ubaldo del Monte, Galileis Lehrer, hat die erwähnte Thatsache 1577 wieder ans Licht gestellt, als er die einfachen Maschinen auf den Hebel zurück-

1) In Herons Mechanik I, 1 ist dieses Verhältniss 2 : 1. Danach ist $2x_4 = 8$ oder $x_4 = 4$, und es bleibt ein Ueberschuss von einem Talente, der zur Ueberwindung der Reibung dient.

2) Vgl. Th. Beck *Historische Notizen* XIII, Tafel XXI. XXII im *„Civilingenieur“* Bd. XXXVIII, Heft 8.

3) Eine Berechnung nach der Zahl der Zähne findet sich bei Cardanus *de rerum varietate* (1557) S. 636—643 und *de subtilitate* (1560) S. 43. Ueber die Beziehungen des Cardanus zu Heron s. unten S. 210 Anm. 1.

4) Vgl. ausser Herons Mechanik (Bd. II der neuen Heronausgabe) auch Herons Autom. (Heron, op. I, 399, 21).

führte.[1]) Wir sehen also, dass Dasypodius für die Mechanik seiner Uhr aus Herons Schriften etwas Wichtiges lernen konnte.

Schliesslich sei darauf hingewiesen, dass die Uhr des Dasypodius mehrere Kreisringe verwendete, darunter einen mit den Figuren der vier Lebensalter. Einen solchen drehbaren Ring mit Figuren (Bacchantinnen), die sich im Kreise um den Tempel des Dionysos drehen, hat auch Heron bei seinem fahrenden Automatentheater. Ob Dasypodius sich hier an Heron anlehnt, kann indessen bezweifelt werden, da eine ähnliche Vorrichtung sich schon in der ältesten Münsteruhr aus dem Jahre 1352 befand, nämlich 'ein rad, auff welchem die drey Kônig stunden'. Von dem Ringe für jene vier Figuren ist nichts mehr erhalten. Auch ist unbekannt, wie er in Drehung versetzt wurde.

Das sind im wesentlichen die Beziehungen, welche das Werk des Dasypodius zu Heron, wenn nicht hat, so doch haben könnte. Beriefe sich Dasypodius nicht selber auf Heron, so würde es kaum jemand wagen, einen antiken Mechaniker mit der berühmten Strassburger astronomischen Münsteruhr in Verbindung zu bringen. So aber glaubten wir, dazu berechtigt zu sein.

---

1) Vgl. Heller *Geschichte der Physik* I, 339.

# HERON VON ALEXANDRIA

## IM 17. JAHRHUNDERT.

VON

**WILHELM SCHMIDT.**

Es ist ausser Frage, dass das Studium der Schriften der Alten den ersten Impuls zur neueren Naturforschung gegeben hat.

Poggendorff.

Schon zur Zeit der Renaissance übten die physikalischen Schriften Herons von Alexandria auf die Gelehrten keinen geringen Reiz aus. Das beweist die fast unübersehbare Zahl griechischer Handschriften, welche wir z. B. von der Pneumatik haben.[1]) Man hat daher sicher im Jahre 1575[2]) das Erscheinen von Commandinis lateinischer Uebersetzung mit Freuden begrüsst. Und das lebhafte Interesse für die Heronische Pneumatik giebt sich nicht nur in den wiederholten Auflagen dieser lateinischen Bearbeitung (1583, 1680) kund, sondern auch in dem Erscheinen einer Anzahl italienischer Uebersetzungen (Aleotti 1589,[3]) 1647; Giorgi 1592, 1595), dem sich 1688 kurz vor der einzigen Veröffentlichung des griechischen Textes (1693) eine deutsche, ebenso wie meist die italienischen von Commandini abhängige Uebersetzung des Agathus Cario[4]) anschloss. (Vergl. Heron. op. I, Einleitung.)

Zu einer Schrift über Druck- und Saugwerke wurde durch Heron im Anfange des 17. Jahrhunderts Giambattista della Porta angeregt. Ihr Titel lautet: *Pneumaticorum libri tres.* Neapoli 1601. Das Werk wurde 1606 von einem Spanier, Juan Escrivano, einem Schüler Portas, ins Italienische übersetzt und mit Zusätzen Portas versehen ('vi ho aggiunto di più tutte quelle cose che ho inteso a bocca da V. S.'). Portas Pneumatik ist nicht etwa eine Uebersetzung der Heronischen Pneumatik, wie man

1) S. das Nähere Heron. op. I § 2. (Das Erscheinen der neuen griechisch-deutschen Heronausgabe der Bibliotheca Teubneriana steht bevor.)

2) Einzelne Capitel Herons waren 1501 von Georg Valla in eignem Namen lateinisch veröffentlicht.

3) Mit einigen selbsterfundenen, aber sich im Princip an Heron anlehnenden Wasserkünsten.

4) Im Anhange 'Von allerhand Mühl-, Wasser- und Grottenwercken aus Salomon de Cous'. Dieser Anhang hat anscheinend S. Günther *Abriss der Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Alterthum* S. 265, Anm. 7 zu dem Irrthume verleitet, dass S. de Caus († 1630) Heron 1688 ins Deutsche übersetzt habe. (Nach Jöcher ist A. Cario Pseudonym für den Württemberger Tobias Nislen.)

irrthümlich[1]) gemeint hat, sondern ein selbständiges Werk, welches freilich auf Heron, nicht ohne eine Reihe kritisirender Bemerkungen, zurückgeht. Die letzteren sind nicht überall zutreffend, wenngleich sie im Laufe des 17. Jahrhunderts vielfach nachgesprochen sind. Escrivano meint, dass Porta erst der Pneumatik Norm und Methode gegeben habe, nachdem man bis dahin, seiner Auffassung nach mit Unrecht, Heron aus Alexandria auf diesem Gebiete für massgebend erachtet habe (Herone tenuto insino ad hora principalissimo in questa materia).

Einzelne Heronische Experimente führt 1617 der bereits früher erwähnte Robert Fludd vor (*Utriusque Cosmi historia* Oppenheim I. Macrocosmus). Herons gedenkt auch Kaspar Ens in seinem '*Thaumaturgus mathematicus.* Coloniae. 1636' S. 205. Es finden sich aber nur wenig Druckwerke bei ihm, die zu Heronischen in Beziehung stehen. Nach Schott (s. unten S. 199) S. 12 hat Ens eine Arbeit des Jesuitenpaters Leurechon benutzt, der 1624 anonym eine '*Récréation mathématique*'[2]) geschrieben hatte.

Da die Heronischen Druckwerke zum grossen Theile in das Gebiet der unterhaltenden Physik fallen, so konnte auch der Jesuit Daniel Schwenter, Professor der Mathematik und orientalischen Sprachen in Altorf, 1636 manche in seinen '*Deliciae physico-mathematicae oder mathematischen und philosophischen Erquickstunden*' verwerten, die freilich erst nach dessen Tode erschienen sind und theilweise auch auf Leurechon zurückgehen sollen. Dies wird also der 'französische Author' sein, den Schwenter wiederholt erwähnt. Auch der zweite Teil dieses Werkes, 1651 'zusammengetragen durch Georg Philip Harsdörffern' aus Nürnberg, bringt einzelnes aus Herons Pneumatik.

Nicht minder interessirte sich Athanasius Kircher, Jesuit und Professor der Mathematik und orientalischen Sprachen in Würzburg und später am Collegio Romano, noch heute allgemein bekannt durch das 'Museo Kircheriano', für Heron. Er führt an mehreren Stellen Heronische Vorrichtungen in seinem grossen Sammelwerke '*Oedipus Aegyptiacus.* Romae 1643' an, indem er zuweilen kritische Bemerkungen daran knüpft. Was Kircher in seinem Werke '*de arte magnetica.* Romae 1654' S. 419—430 von hydraulischen Maschinen anführt, ist wohl auch zum grossen Theile durch Heron beeinflusst.

Wir nennen ferner den Minoritenpater Marin Mersenne, Descartes'

---

1) In diesem Irrthume befinden sich z. B. Martin *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie.* Paris 1854. S. 44 und A. de Rochas *La science des philosophes et l'art des thaumaturges dans l'antiquité.* Paris 1882 S. 81. Ebenso S. Günther a. a. O.

2) Diese Schrift stand mir nicht zur Verfügung.



vertrauten Freund, der in den '*Cogitata physico-mathematica.* Parisiis 1644', z. B. in dem darin enthaltenen '*Tractatus mechanicus*' Herons Barulkos (Hebewinde mit Räderübersetzung) unter Beifügung einer Zeichnung behandelt. In den '*Hydraulica pneumatica*', wo man besonders Bezugnahme auf Heron erwarten könnte, wird Herons allerdings kaum gedacht.

Eingehender beschäftigt sich mit Heron ein drittes Mitglied der Gesellschaft Jesu, Kaspar Schott, Professor der Mathematik und Physik in Würzburg, Kirchers und Guerickes Freund, in seiner 1657 erschienenen '*Mechanica hydraulico-pneumatica.*' Schott behauptet S. 51, dass er lange nach einer griechischen Heronhandschrift gesucht habe, aber vergeblich. Das scheint uns kaum glaublich, da in Italien überall griechische Heronhandschriften waren und sind. Schott begnügt sich daher wie auch alle anderen mit Commandinis Uebersetzung und glaubt, dabei mehrere angebliche Irrthümer Herons auf Commandinis Rechnung setzen zu sollen.

Auch Salomon de Caus, dem die Franzosen die Erfindung der Dampfmaschine zuschreiben wollen (vgl. Poggendorff *Geschichte der Physik* S. 446 f.), hat sich anscheinend, wenn auch in geringerem Umfange mit Heron befasst.[1]) Da Caus als Ingenieur und Baumeister in Diensten des Kurfürsten von der Pfalz stand und für diesen die Anlage von allerlei Grotten und Wasserkünsten geleitet hat, so hat er vielleicht auch in dieser Hinsicht von Heron Anregungen empfangen und nicht bloss hinsichtlich der Dampfmaschine, obgleich sich aus dem 'Hortus Palatinus'[2]) im einzelnen nichts nachweisen lässt.

Es ist bemerkenswerth, dass gerade zu Anfang des 17. Jahrhunderts die Wasserkünste in fürstlichen Gärten eine grosse Rolle spielen, nicht bloss in Heidelberg, sondern z. B. auch in Tivoli. Und wer kennte nicht die noch vorhandenen Wasserkünste der von Giacomo della Porta erbauten Villa Aldobrandini oberhalb Frascati, Wasserkünste, welche um 1603 Giovanni Fontana zum Ergötzen der Mit- und Nachwelt geschaffen hat? Es ist nicht unwahrscheinlich, dass auch hierzu in letzter Instanz Heron die Anregung gegeben hat.

Unter den Männern der Wissenschaft beschäftigte Porta und Schott zunächst die Lehre vom Vacuum, welche Heron (1. Jahrh. n. Chr.) nach-

1) Sein Werk ist betitelt: *Les raisons des forces mouvantes avec diverses machines tant utiles que plaisantes.* Frankfurt 1615. Mir lag leider nicht das ganze Werk, sondern nur einige Auszüge daraus vor.

2) *Hortus Palatinus* a Friderico Rege Boemiae Electore Palatino Heidelbergae exstructus Salomone de Caus architecto 1620. Francofurti. De Rochas weist a. a. O. S. *158 auf eine* Vorrichtung des de Caus hin, welche eine Bewegung des Wassers *durch die* Sonnenwärme herbeiführt, ähnlich wie bei Herons Thermoskop.

weislich (vgl. H. Diels *Ueber das physikalische System des Straton.* Sitzgsber. d. kgl. Acad. d. Wiss. Berlin 1893 S. 110) dem Peripatetiker Straton aus Lampsakos (3. Jahrh. v. Chr.), dem Physiker κατ' ἐξοχήν, entlehnt hat. Heron nimmt danach mit letzterem ein feinvertheiltes Vacuum mit ebenso feinvertheilten Molekülen an im Gegensatz zu Aristoteles, der jedes Vacuum gegenüber Demokrit geleugnet hatte. Die entsprechenden Ausführungen nehmen bei Heron einen breiten Raum ein (Heron. op. I, 1—29 = S. 145 —152 Thévenot). Hervorzuheben dürfte daraus sein, dass Heron (a. a. O. I, 16—19 = S. 149 Th.) bezw. sein Gewährsmann Straton zum Beweise für das Vorhandensein des Vacuums ein mit peinlicher Vorsicht unternommenes Experiment vorführt. Danach wird man die landläufige Meinung (s. Poggendorff *Gesch. d. Phys.* S. 10), dass das Experiment den Alten 'so gut wie gänzlich unbekannt war', doch etwas einschränken müssen. Von Herons Argumenten für das Vacuum tadelt Porta besonders, dass nach Heron beim Mischen von Wein und Wasser (a. a. O. I, 27, 15. 16 = S. 152 Th.) der Wein in die Vacua des Wassers treten solle. Das sei nicht richtig, weil die Flüssigkeit ums Doppelte steige, wenn man z. B. eine gleiche Quantität Wein und Wasser mische (Porta Pneum. I 6 S. 8). Ebensowenig gefällt Porta Herons Beweis von dem Durchgange des Lichtes durchs Wasser (I, 27, 7—14). Porta (S. 9) leugnet aber nicht etwa das Vacuum, sondern erkennt es nur unter gewissen Bedingungen an.

An Herons Heber (Pneum. I, 1 S. 29 = S. 152 Th.) konnten Porta (I, 12 S. 19. 20), Schott S. 93, Schwenter S. 479 und Ens S. 77 natürlich nichts aussetzen, da Heron sehr wohl bekannt ist, dass die äussere Hebermündung tiefer liegen muss als der innere Flüssigkeitsspiegel. Dass Heron, Porta und Schwenter das Steigen der Flüssigkeit auf den horror vacui zurückführen, wird niemand wunder nehmen, wohl aber, dass Schott noch nichts von Torricelli, dessen bekannter Versuch ins Jahr 1643 fällt, über den Luftdruck gelernt hat. Daher glaubte Porta (und mit ihm Schwenter, Mersenne und Schott) mittels einer besonderen Vorrichtung das Wasser 'aus tiefen Thälern über die höchsten Berge' leiten zu können, ein Irrthum, in dem sich auch Leonardo da Vinci befand (vgl. Beck *Historische Notizen* S. A. aus dem *Civilingenieur* XXXIX, 8. Heft S. 16 f.). Aber Schott hätte schon klüger sein können. Zwar erklärt Porta bezeichnenderweise, dass die Sache um so schwieriger sei, als die Alten sich nicht darüber geäussert hätten (tanto id difficilius erit, quanto minus de his a maioribus nostris (Escrivano: dagli antichi) sit traditum). Und dennoch trotz eines verächtlichen Seitenblicks auf Heron, der überhaupt nicht helfen könne (S. 44: 'extat Heronis illud quod retulimus et falsum indicavimus') hat Portas Vorrichtung eine unverkennbare Aehnlichkeit mit Heron. Pneum. I, 31

S. 145 (s. unten Taf. 2, Fig. 1), nur dass Porta das trinkende Thier, welches im Innern eine Hebervorrichtung mit einem trichterförmigen Eingusse enthält, mit dem Berge vertauscht hat und dass dementsprechend bei Heron die Vorrichtung functionirt und bei Porta nicht. Auch darin polemisirt Porta gegen Heron (Pneum. I, 2 S. 37, 16) nicht glücklich, dass er leugnet, dass ein oben in einen Heber gebohrtes Loch die Flüssigkeit auseinander reissen könne (Porta II, 13. 14).

Dass nach Heron. Pneum. I, 2 S. 33, 25 die Flüssigkeit im Zustande der Ruhe eine kugelförmige Oberfläche bilde, welche mit der Erde gleichen Mittelpunkt hat, wie auch Archimedes in seiner Hydrostatik (*Περὶ ὀχουμένων* Kap. 2 'Ueber die schwimmenden Körper') und schon früher Aristoteles de coelo B 287b, 13 lehrt, findet Schotts (S. 68. 88) Billigung. Auch Porta Pneum. I. 9 S. 14 scheint dieser Auffassung zuzustimmen.

In Bezug auf die communicirenden Gefässe (Heron I, 2 S. 35 = S. 54 Th.) stimmt Schott S. 75 mit Heron überein.

Ein besonderes Interesse hatte für die damalige Zeit auch der Kapsel- oder Glockenheber (Pniktós diabétes 'versteckter Heber', Her. I, 3 S. 41 = S. 156 Th.), schon von Philon (3. Jahrh. v. Chr.) als 'canalis latens' in seiner Pneumatik (Her. I, 480) erwähnt. Der innere Schenkel dieses Hebers (Fig. 2) wird durch einen Hohlraum gebildet, welcher sich zwischen der inneren und der umschliessenden Röhre befindet. Schott widmet ihm eine längere Beschreibung S. 95, auch Schwenter S. 498. Bekannt ist er auch Fludd Macrocosm. S. 202 und Kaspar Ens S. 55.

Dass die Heber, der gebogene und der Kapselheber, ohne Ansaugen von selbst zu fliessen beginnen, wenn die Flüssigkeit über ihren höchsten Punkt steigt (Her. I, 13 S. 83 = S. 167 Th.), weiss nicht nur Schwenter S. 499, sondern auch Schott S. 96. 183 und Ens S. 55. Schott fügt noch hinzu, dass dies in dem Garten eines Herrn Aynscombe in Antwerpen bei einem Springbrunnen zur Nachahmung von Ebbe und Flut benutzt worden sei.

Bekanntlich ist nach Torricelli (1641) die Ausflussgeschwindigkeit von der Druckhöhe abhängig. Will man daher eine stets gleichmässige Ausflussgeschwindigkeit erzielen, so muss man Vorkehrungen treffen, um die Druckhöhe constant zu erhalten. Ich brauche an Mariottes Gefäss nicht zu erinnern. Einem ähnlichen Zwecke dient die in Fig. 3 dargestellte Heronische Vorrichtung (Her. I, 4 S. 45 = S. 157 Th.), wo die constante Druckhöhe beim Ausflusse aus einem Heber durch einen mit der abnehmenden Flüssigkeit zugleich sinkenden Schwimmer herbeigeführt wird, eine Vorrichtung, an welcher Schott S. 97 nichts auszusetzen hat. Die erwähnte Einrichtung hat Heron in Fig. 4 noch dahin umgestaltet (Her. op. I, 5 S. 47

= S. 158 Th.), dass sich in jedem beliebigen Augenblicke die Druckhöhe ändern, d. h. vergrössern oder verringern und dadurch der Ausfluss beschleunigen oder verlangsamen lässt. Auch dies ist Schott (S. 98) aus Heron bekannt.

Heron beschreibt I, 6 S. 55 = S. 160 Th. eine Vorrichtung, welche es ermöglichen soll, einen Heber ohne Ansaugen durch ein luftdicht an die äussere Hebermündung gehaltenes, mit Wasser gefülltes Gefäss, das man sich entleeren lässt, zum Ausfluss zu bringen. Dies erklärt Porta II, 3 S. 37 für unmöglich, und Schott S. 38 spricht es ihm nach, (derselben Meinung ist de Rochas, a. a. O. S. 107. 108 Anm.) während ein von uns angestellter praktischer Versuch sehr wohl die Möglichkeit des von Heron beschriebenen Vorganges dargethan hat. Dabei hat sich auch gezeigt, dass es nicht erforderlich ist, was jene verlangen, dass das äussere überstehende Ende des Hebers länger als der innere Heberschenkel bis zum Wasserspiegel sei.

Das sogenannte Sieb der Vestalin (Her. I, 7 S. 57 = S. 161 Th.), (welches gewissermassen als Stechheber dient) nämlich eine am Boden durchlöcherte Hohlkugel mit einer Oeffnung oben, sei ein sehr geläufiges Kunststück, berichtet Schott S. 303. Das beweist auch die wiederholte Erwähnung bei Schwenter I, 494 und Harsdörffer II, 490. Hier lautet die gestellte Aufgabe 'Wasser in einem Siebe zu tragen'. Die Sache ist übrigens älter als Heron und findet sich schon bei Philon Cap. 11 und noch früher. Ebenso erregte das Interesse Schotts S. 315 und Harsdörffers S. 478 dieselbe Vorrichtung mit einer oder mehreren Scheidewänden und mehreren Luftlöchern, indem sie so geeignet war, verschiedene Arten von Flüssigkeiten aufzunehmen und nach Belieben ausfliessen zu lassen.

Die Zauberkanne (Her. I, 9 S. 67 = S. 162. 163 Th.), welche mit Hilfe eines einzigen im hohlen Henkel befindlichen Luftloches $\varkappa$ (Fig. 5) bald aus dem Raume über der Scheidewand $\gamma\delta$ Wasser, bald zusammen ein Gemisch des Wassers mit dem Weine aus $\gamma\beta\delta$, schliesslich reinen Wein ausfliessen lassen soll, hat zwar Harsdörffer S. 499 keinen Anstoss erregt, wird dagegen von Porta III, 4 S. 49 und Schott S. 318 als praktisch unmöglich bezeichnet, weil thatsächlich eine Vermischung von Wein und Wasser durch die siebartigen Löcher bei $\varepsilon$ unvermeidlich ist. Vorausgesetzt, dass dieses Capitel dem Heron und nicht, wie jemand versucht sein könnte zu vermuthen, einem Interpolator angehört, kann Heron die Sache nicht praktisch ausgeführt haben. Er hätte sonst sehen müssen, dass unter den obwaltenden Umständen stets eine Mischung ausfliesst.

Eine Compressionspumpe ist bei Heron Pneum. I, 10 S. 75 beschrieben (Fig. 6, der Apparat ist eine Verbindung von Heronsball und

Compressionspumpe). Die Luft trat bei $\tau$ ein, indem der Kolbenstengel $\psi\omega$ noch etwas über $\tau$ zurückgezogen wurde, ohne indessen ganz herauszutreten. Der niedergehende Kolben drängte die Luft durch das sich nur nach innen öffnende Ventil in die Kugel. Im Princip steht der Apparat vielleicht Boyles Compressionspumpe nicht allzu fern (vgl. Poggendorff *Gesch. d. Phys.* S. 474), an eine Abhängigkeit des letzteren von Heron ist freilich nicht zu denken.

Auf Heron Pneum. I, 15 S. 89 = S. 169 Th. u. ä., wo infolge Wasserdrucks durch ausströmende Luft in der Pfeife bei $\varkappa$ ein Ton erzeugt wird (Fig. 7), geht auch Fludds ähnlicher Versuch im Macrocosmus S. 190 zurück.

Die Heronische Einrichtung Pneum. I, 16 S. 91 = S. 169. 170 Th., bestimmt, mittels Wasser- und Luftdrucks den Gesang von Vögeln hervorzurufen, die aber aufhören zu singen, wenn sich eine in der Nähe befindliche Eule (Fig. 8) zu ihnen hinwendet, hat ohne Zweifel zu einer ähnlichen Vorrichtung (des Salomon de Caus?) Anlass gegeben, wie sie bei Agathus Cario S. 50 des Anhangs beschrieben ist. Hier ist der Vorwurf 'eine lustige Machina, darauf etliche Vögel singen, wann sich ein Kautz zu ihnen wendet, und schweigen, wann er sich von ihnen wiederum abwendet'. Die Beschreibung beginnt mit den Worten: 'Dieses Werck ist von Herone Alexandrino vorgestellet worden, aber doch nicht so vieler Hand Vögel, wie allhier'. Porta (S. 58) meint bei dieser und ähnlichen Vorrichtungen Herons, dass sie nicht functionirten. Denn sei der Druck des einströmenden Wassers sehr stark, so treibe er ohne weiteres das Wasser wieder durch den Heber hinaus, sei er schwach, so würden die Pfeifen nicht ertönen.

Die „Krüge von Kana" benennt Schott S. 221, an das bekannte Wunder anknüpfend, die von Heron Pneum. I, 23 S. 117 = S. 176. 177 Th. beschriebenen Krüge (Fig. 9). Giesst man durch den Trichter $\tau$ Wasser in das Gefäss $\gamma\delta$, so treibt die darin enthaltene Luft, durch die Röhre $\mu\nu\xi o$ gedrängt, den im Gefässe $\varepsilon\zeta$ befindlichen Wein durch den Heber $\pi\varrho\sigma$ nach aussen. Die Forderung Schotts S. 221 Anm., dass $\tau\upsilon$ länger sein müsse als $\pi\varrho$, wenn der ganze Wein aus $\varepsilon\zeta$ auslaufen solle, hat übrigens Heron erfüllt, obwohl es vielleicht nicht nothwendig war.

Eine sehr einfache Vorrichtung, welche nach Heron Pneum. I, 32 S. 149 = 185 Th. an den Eingängen ägyptischer Tempel stand, ist das Weihbecken, welches nach Drehung des Rades Weihwasser spendete, sobald die Ausflussöffnung des Beckens mit den Löchern $\tau$, $\pi$ (Fig. 10) in dem beweglichen Rohre $\nu\xi$ und dem unbeweglichen $\lambda\mu$ correspondirten. Kircher Oedip. Aegypt. II, 336 und Schott S. 258 beschreiben den Apparat

ausführlich, jedoch hat Kircher, dem Schott folgt, die Abflussvorrichtung eher zum Nachtheil als zum Vortheil der Sache geändert.

Schwenter beschreibt S. 544 „ein Vass, darauss man drey unterschiedliche Getränck zäpffen kan, welche man durch einen einigen Spund füllet und durch ein einige Röhrn wider ausslauffen lässet". Diese Vorrichtung findet sich auch schon bei Bessonus *Theatr. instrum.* prop. XIX und Ens S. 143. Es ist wahrscheinlich, dass sie durch die allerdings praktischere Vorrichtung Herons Pneum. I, 33 S. 154 = S. 186. 187 Th. veranlasst ist, welche auch drei verschiedene Flüssigkeiten (in die Kammern $\mu$, $\nu$, $\xi$, Fig. 11) aufnimmt und gesondert, aber durch dasselbe Ausflussrohr $\gamma\beta$ ausfliessen lässt. Drei Kugeln von verschiedener Grösse, in den hohlen Kegelstumpf $\zeta\vartheta$ gelegt, dienen dazu $\gamma\beta$ so weit zu drehen, dass je nach der Flüssigkeit, die abgezapft werden soll, das correspondirende Loch unter die entsprechende Kammeröffnung zu liegen kommt. De Rochas erwähnt a. a. O. S. 141 Anm. 1, dass dieser verstellbare, dreifach durchbohrte Hahn wahrscheinlich Papin die Idee des bekannten Vierweghahnes eingegeben habe ('il a probablement inspiré à Papin l'idée du robinet à plusieurs fins proposé par cet ingénieur pour la machine à haute pression'). Indessen findet sich die doppelte Durchbohrung des Hahnes nach Poggendorff Gesch. d. Phys. S. 475 schon 1685 bei Wolferd Senguerd aus Leyden. Ob dieser wenigstens das Princip einer doppelten Durchbohrung aus Heron entnommen hat, ist aber schwer zu sagen, vielleicht sogar unwahrscheinlich. Denn im einzelnen weichen die Durchbohrungen sehr von einander ab.

Es scheint eine ziemlich verbreitete Meinung zu sein, dass die in den physikalischen Lehrbüchern erwähnten Heronsbrunnen und Heronsball in Herons Schriften gar nicht vorkämen.[1]) Das ist aber ein Irrthum. Beide Vorrichtungen finden sich in verschiedenen Formen. Um mit dem Heronsball zu beginnen, so zeigt Her. Pneum. II, 2, S. 213 = S. 196 Th., seine einfachste Form (Fig. 12). Man hält die oben spitz ausgezogene Röhre mit einem Finger zu, giesst seitwärts eine Flüssigkeit ins Gefäss, bläst hinein und verschliesst den Hahn. Lässt man dann den Finger los, so wird die Flüssigkeit durch den Druck der comprimirten Luft ausgespritzt. Diesen einfachen Heronsball beschreibt Schott S. 208 nach Heron. In Verbindung mit mehreren Figuren, von denen wir die eine mit einer Flöte, die andere mit einem verschliessbaren Schlauche ausgestattet sehen, ist Her. Pneum. II, 15, S. 243 = S. 205. 206 Th. ein Heronsball

1) Dieser Meinung sind z. B. Martin a. a. O. S. 46, M. Cantor, *Die römischen Agrimensoren*, Leipzig 1875, S. 18; Heller, *Gesch. d. Phys.*, S. 122 und S. Günther, *Abriss der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften im Altertum*, München 1894, S. 265.



beschrieben, ebenso zwecks automatischer Nachfüllung einer Lampe II, 23, S. 271 = S. 223 Th. Mit einer Compressionspumpe verbunden ist der Heronsball Pneum. I, 10 (s. oben S. 203 und Fig. 6). Auch die Feuerspritze (Heron. op. I, 28, S. 130—137 = S. 180—182 Th.) beruht ja auf dem Princip des Heronsballs (Taf. 3, Fig. 13).

Einen einfachen Heronsbrunnen dagegen, bei welchem die Luft durch den Druck einer Wassersäule comprimirt wird, zeigt Fig. 14 (Taf. 3) in Her. Pneum. I, 37, S. 170 = S. 190. 191 Th. In der Basis ist die obere Kammer $\alpha\delta$ durch das Loch $\nu$, welches nach dem Eingiessen luftdicht verschlossen wird, mit Wasser gefüllt. Dann giesst man ins Becken Wasser, welches in die Kammer $\gamma\beta$ läuft und die hier befindliche Luft nach $\alpha\delta$ drängt. Durch ihren Druck wird darauf das Wasser von $\alpha\delta$ in die sehr enge Röhre $\varkappa\lambda\mu$ gepresst und zum Ausfluss gebracht. Einen zweiten Heronsbrunnen erkennen wir in Fig. 15 (Taf. 2, Her. Pneum. II, 22, S. 265 = S. 222 Th.). Die Basis des Kandelabers enthält in dem oberen Raume $\alpha\beta\varepsilon\zeta$ Wasser. Wird das Ventil unterhalb der Scheidewand geöffnet, so fliesst das Wasser nach $\gamma\delta\varepsilon\zeta$ und drängt die hier befindliche Luft durch die Röhre $\mu\nu$ nach dem Oelbehälter $\varkappa\lambda$. Hier drückt dann die comprimirte Luft das Oel in die Röhren $o\xi$ und $\pi$ und von dort in das Bassin der Lampe. Diese beiden praktischen Verwendungen des Heronsbrunnens sind schon Porta Pneum. II, 5, S. 29. 30 bekannt, der dann im Anschluss an den Satyrbrunnen (Porta Pneum. III, 2, S. 45. 46) eine etwas complicirtere Einrichtung giebt und dabei erwähnt, dass die Vornehmen oft bei gastlichen Gelagen die Einrichtung des Heronsbrunnens benutzten, um wohlriechendes Wasser (unguentatas aquas) hervorsprudeln zu lassen, und dass andererseits Kranke in grosser Fieberhitze ihre Freude daran hätten, wenn sie sähen, wie Wasser damit ausgesprengt werde. Besonderes Interesse für den Heronsbrunnen zeigt Schott, der S. 108 den Satyrbrunnen[1]) (allerdings ohne die Figur des Satyrs), S. 50ff. die Lampe und S. 192 einen anderen, dem ersten ähnlichen Heronsbrunnen, schliesslich S. 194—200 noch einige besondere Arten erwähnt. Schwenter beschreibt S. 490 die Vorrichtung unter der Ueberschrift, 'dass man einen Wasserfaden von sich selbs hochspringend machen könne und ein Mass Wasser eine gantze Stund springe' und betont zum Schluss: 'Diese Erfindung ist sehr lustig bey einer Gasterey, dann man solches mit Wein füllen und ausslauffen lassen kan, welcher in der grösse eines Fadens mit lust anzuschawen seyn wird'. Auch Salomon de Caus und Athanasius Kircher führen nach

1) Die Figur mit dem Schlauche soll nach Heron ein junger Satyr sein, unsere Zeichnung giebt einen Silen. S. Her. op. I, 171 Anm.



Schotts Zeugniss den Heronsbrunnen nach Heron an, ebenso schon früher Cardanus *de subtilitate.*[1]) Porta und Schott verlangen beim Satyrbrunnen nicht ohne Grund, dass die Röhre $\eta\vartheta$, bezw. die Druckhöhe des eingegossenen Wassers (Fig. 14) länger sei als die Steighöhe des ausgespritzten Wassers $\varkappa\lambda\mu$; denn theoretisch ist zwar die Höhe des Wasserdrucks der Steighöhe gleich, in der Praxis muss sie aber wegen der zu überwindenden Reibung und des Luftwiderstandes grösser sein, als die Flüssigkeit emporgetrieben werden soll.[2]) Beim Kandelaber soll dementsprechend statt der blossen Ventilöffnung eine Röhre fast bis an den Boden $\gamma\delta$ führen und noch länger sein als die Röhre $\xi o$. Indessen kann das Ventil so bleiben, wenn nur die Druckhöhe des Wassers die Steighöhe des Oels überwiegt.[3]) Da der griechische Text an einigen Stellen fehlerhaft und auch sonst Commandini's Uebersetzung nicht ganz correct ist,[4]) so machte diese Lampe schon im Ausgange des 16. Jahrhunderts einem Bekannten Galileis, Alvise Mocenigo, Schwierigkeiten. Galilei, von ihm um Auskunft gebeten, antwortet ihm am 11. Januar 1594 aus Padua in einem Schreiben,[5]) welches heute in der 'Biblioteca Ambrosiana' zu Mailand aufbewahrt wird. Galilei schreibt:

Dalle parole di V. S. Ecc.ma e dalla fabbrica assai confusa posta da Herone al N. 7, vengo in cognizione quella essere la Lucerna, della quale Ella de-

Aus den Worten Eurer Excellenz und aus der sehr unklaren Einrichtung, welche Heron zu N. 7[6]) giebt, erkenne ich, dass das die Lampe ist, deren Construction Sie wünschen; doch habe ich sie mehrere

1) Hieronymi Cardani Mediolanensis medici *de subtilitate* libri XXI. Basileae 1560. S. 89: 'Machina Heronis' = Heronsbrunnen.

2) Die Figur, welche sich an Heron's handschriftliche Figur anlehnt, hätte das besser gleich in der Zeichnung zum Ausdruck bringen sollen. Es hindert uns übrigens nichts, uns die Lage des Schlauches etwas tiefer, etwa unterhalb der Brust, zu denken. Dann functionirt der Apparat vortrefflich, wie eine praktische Ausführung uns wiederholt gezeigt hat.

3) In der nach den Handschriften reconstruirten Figur ist das freilich nur zu Anfang der Fall. Um das ganze Oel durch den Wasserdruck zum Ausfluss zu bringen, müsste eine kleine Aenderung in einigen Dimensionen vorgenommen werden.

4) Dass Commandini fälschlich 'Docht' (ἐλλύχνιον ellychnion) statt 'Lampe' (λύχνος lychnos) übersetzt, hat Schott richtig erkannt, Porta aber übersehen. Denselben Fehler hat ferner Galilei mit Commandini gemein, so dass es scheint, als ob auch Galilei keine griechische Handschrift eingesehen habe. Wenn wir hier die Beziehungen Galilei's, der ja doch vorwiegend auch dem 17. Jahrhundert angehört, zu Heron etwas ausführlicher erörtern, als es vielleicht dem Thema angemessen erscheinen könnte, so befürchten wir dennoch keinen Tadel.

5) Abgedruckt bei Venturi *Memorie e lettere inedite finora o disperse di Galileo Galilei.* Modena 1818. S. 12.

6) Worauf diese Nummer sich bezieht, ist nicht bekannt, vermuthlich auf Mocenigos Brief.

sidera la costruzione; però l'ho più volte letta e finalmente non so dalle sue parole trarne tal senso, che non mi resti qualche confusione. Ma non volendo interamente obbligarci a tutte le sue parole, mi pare che voglia inferire una fabbrica simile all' infrascritta.

Male gelesen und weiss schliesslich (doch) nicht aus seinen (Herons) Worten einen solchen Sinn zu entnehmen, dass mir keine Unklarheit bliebe. Aber ohne uns gänzlich an alle seine Worte binden zu wollen, scheint es mir, dass er eine ähnliche Vorrichtung einführen will wie die unten beschriebene.

Darauf giebt Galilei eine Beschreibung des Leuchters in einer freien, von Commandini abweichenden lateinischen Fassung, welche in den Bemerkungen zu den Figuren von Band I der neuen Heronausgabe wieder zum Abdruck kommen wird. Die von Galilei gegebene Beschreibung und Figur trifft im wesentlichen das Richtige. Man kann sogar im einzelnen für den griechischen Text (s. Heron. op. I Einleit.) noch eine Verbesserung daraus entnehmen. Galilei schliesst seinen Brief mit den Worten:

Questo è quanto per ora mi par di poter raccorre dalle parole d'Herone, come ho detto di sopra, assai confuse: e l'ho voluto mandare a V. S. Ecc.$^{ma}$, acciocchè avvertito dal suo giudizio possa con altra occasione cavarne forse miglior costrutto; ancorchè la fabbrica esplicata eseguisce quanto promette la proposta.

Das ist was man für jetzt mir scheint aus den Worten Herons erschliessen zu können, die, wie ich oben gesagt habe, sehr unklar sind. Und ich habe es Eurer Excellenz übersenden wollen, damit Sie, von Ihrem eigenen Urtheile unterwiesen, bei anderer Gelegenheit vielleicht eine bessere Einrichtung daraus ableiten können, obschon die beschriebene Vorrichtung leistet, was sie in Aussicht stellt.

Wir möchten wünschen, dass der Text in der neuen Bearbeitung, wenngleich er nicht tadellos ist, doch nicht mehr so viel Schwierigkeiten biete wie damals.

Heftigen Widerspruch hat Herons saugender Glascylinder Pneum. II, 14, S. 239ff. = S. 204. 205 Th.[1]) erfahren, zuerst von Porta, dann von Schott und in neuerer Zeit von de Rochas. In Heron's Vorrichtung (Fig. 16), welche im Grunde einen unterbrochenen Heber darstellt, sind die Räume $\alpha\delta$, $\gamma\beta$, $\varepsilon\zeta$ gleich gross; $\alpha\delta$ wird durch $\mu$ mit Wasser gefüllt, $\gamma\beta$ durch die Röhre $\xi o$, welche bis dicht an den Boden von $\gamma\beta$ reicht. Oeffnet man die Ausflussröhre $\nu$, so fliesst des Wasser aus $\gamma\beta$ ab, die

1) Heron's Thermoskop Pneum. II, 8 haben wir oben S. 171 erörtert. Ich trage hier nur nach, dass Fludd sein Thermoskop bereits zweimal im Macrocosmus S. 31 und 204 ohne Gradeintheilung beschreibt.



Luft aus $\varepsilon\zeta$ wandert nach $\gamma\beta$, und aus $\alpha\delta$ steigt die Flüssigkeit nach $\varepsilon\zeta$. So ist Herons Meinung. Porta dagegen behauptet S. 25, dass die horizontale Ausflussröhre $\nu$ durch eine verticale ersetzt werden müsse, welche so viel nach unten überrage, dass der Ueberstand gleich $\varkappa\lambda$ sei. Auch Schott meint S. 37, dass nur wenig Wasser aus $\alpha\delta$ aufsteigen werde, wenn man nicht nach Porta die Sache ändere. Schliesslich stellt de Rochas S. 165, Anm. 2, eine Gleichung auf, durch welche er zu beweisen sucht, dass der Ausfluss $\nu$ als verticale Röhre so lang sein müsse, als die Höhe zwischen der Scheidewand der Basis und dem Niveau der Flüssigkeit in dem Glascylinder am Ende der Operation, wenn die in $\beta\gamma$ enthaltene Flüssigkeit völlig ausfliessen solle. Ob die erwähnten Ausstellungen berechtigt sind, liesse sich am besten experimentell darthun; leider waren wir selbst nicht in der Lage, das Experiment auszuführen. Wir haben aber einige Zweifel an der Berechtigung der erwähnten Forderungen.

Poggendorff schreibt in seiner Geschichte der Physik S. 530: 'Besonders haben die Werke des Hero dazu beigetragen, die Kenntniss von der Spannkraft des Wasserdampfes zu erhalten und zu verbreiten'. Das ist zweifellos richtig. Aber schon die Ausdehnbarkeit der Luft zog die Aufmerksamkeit der Physiker auf sich. Sie soll uns daher zunächst beschäftigen. So wird von Heron Pneum. I, 38, S. 174—179 = S. 191, 192 Th. eine Vorrichtung beschrieben, bei der durch den Druck erwärmter Luft aus einer geschlossenen Kugel Wasser in ein Gefäss $\nu\xi$ (Fig. 17) gedrängt wird. Das Gefäss erlangt in Folge der dadurch vermehrten Schwere das Uebergewicht, sinkt, dreht die nach unten verlängerten Thürangeln oder Drehpfosten einer Tempelthür und öffnet die beiden Thürflügel. Erlischt das Feuer und zieht sich die Luft in der Kugel und dem Altar wieder zusammen, so fliesst das Wasser aus dem Gefässe $\nu\xi$ zurück, dieses hebt sich, die Angeln drehen sich nach der entgegengesetzten Richtung, und die Thüren werden geschlossen. Diese Vorrichtung benutzt Fludd 1617 in seinem Macrocosmus S. 32, um zu beweisen, dass beim Mangel des feurigen Elementes (absentiā igneae naturae) alle Dinge in ihren früheren Zustand zurückkehren, und ebendort S. 203 zum Beweise, dass die durch die Wärme verdünnte Luft Wasser aus dem Innern der Erde auf ihre Oberfläche treiben könne. Beide Male bezieht sich Fludd auf Heron und zwar nach Commandini; doch beschränkt er sich auf die Vorgänge in dem Altare, der Kugel und dem Gefässe, ohne der dadurch herbeigeführten Bewegung zu gedenken. Auch Athanasius Kircher thut der Heronischen Vorrichtung im Oedip. Aegypt. II, 335 ausführlich Erwähnung und verknüpft damit eine wenig passende Reminiscenz aus Heron's Automatentheater. Ebenso interessirt sich Schott dafür S. 246.

Zu demselben Zwecke wird von Heron Pneum. I, 39, S. 179ff. = S. 193 Th. der Druck erwärmter Luft benutzt, indem sie, in einen Lederschlauch $\varkappa$ (Fig. 18) geleitet, diesen aufbläst und dadurch ein Gewicht $\lambda$ hebt. In Folge dessen lässt die Spannung einer daran gebundenen Kette nach, die Pfosten einer Thür drehen sich, und die Thürflügel werden geöffnet. Zieht sich bei der Abkühlung die Luft wieder zusammen, so faltet sich der Schlauch zusammen, das Gewicht sinkt, und die Thürflügel werden geschlossen. Dieses Experiment führt Harsdörffer S. 538 und 539 an mit dem Hinweis, dass aus Heron ein 'Herr von Urfe eben diese Erfindung abgesehen und in seine Astree (?) gebracht' habe.

Ein drittes Experiment mit erwärmter Luft hat Heron Pneum. II, 3, S. 214—217 = S. 221 Th. Eine horizontale Scheibe, auf welcher tanzende Figuren stehen, wird durch die Reaction ausströmender Luft in Drehung versetzt (Fig. 19). Von dieser Erscheinung hat Heron allerdings keine klare Vorstellung, sondern nur eine dunkle Ahnung. Während in Wirklichkeit, wie bei der bekannten Segnerschen Turbine (1750), die Drehung dadurch erfolgt, dass in der Richtung der Oeffnung die ausströmende Luft keinen Druck ausübt, dagegen an der der Oeffnung diametral gegenüberliegenden Wandung der Druck wirksam bleibt und so ein Rückstoss in einer der Oeffnung entgegengesetzten Richtung erfolgt, meint Heron irrthümlich, dass die kreisende Bewegung durch ein Zurückprallen der ausströmenden Luft von der Wand des umschliessenden (durchsichtigen) Altars hervorgerufen werde. Athanasius Kircher hält die Heronische Vorrichtung für unmöglich und zeigt dadurch seine Unkenntniss über den erwähnten physikalischen Vorgang. Kircher ersann daher eine andere Vorrichtung, welche die niederströmende erhitzte Luft auf die in der äusseren Peripherie eines Rades angebrachten (schaufelartigen) Zacken drücken und so dieses Rad mit den Figuren in Drehung versetzen liess (Oedip. Aeg. II, 337). Dass Schott S. 247f. Kircher alles gläubig nachschreibt, darf uns nicht wunder nehmen. Wenn Kircher noch hinzufügt, dass der ägyptische König Menes sich über diese Vorrichtung besonders gefreut haben solle und ihr damit ein hohes Alter zuschreibt, so ist dies wegen mangelnder Quellenangabe uncontrollirbar. Und Kirchers wissenschaftliche Zuverlässigkeit wird bekanntlich stark in Zweifel gezogen.

Am meisten hat die Physiker stets die Spannkraft des Dampfes interessirt. Die Techniker (z. B. M. Rühlmann, *Allgemeine Maschinenlehre* I, 394) sehen wohl auf Herons Dampfapparate mit vornehmer Geringschätzung herab und meinen, es habe Niemand daraus Nutzen ziehen können. Um so mehr freut uns daher Poggendorffs oben erwähnter (S. 208) Ausspruch. Dass es bei Heron physikalische Spielereien sind, soll nicht in

Abrede gestellt werden, aber dass diese Spielereien die Möglichkeit einer Bewegung durch Dampf vor Augen stellten, kann ernstlich Niemand leugnen. Dass keiner der bekannten älteren Versuche über die Ausnutzung der Dampfkraft zur Bewegung über das Bekanntwerden von Herons Pneumatik zurückgeht und mehr als einer[1]) unter ihnen nachweislich von Heron angeregt ist, darf doch nicht ausser Acht gelassen werden.

Pneum. II, 6, S. 221—223 = S. 222 Th. wird ein unmittelbarer Dampfstrahl benutzt, um einen Ball in der Luft schweben oder springen zu lassen (Fig. 20).

Allbekannt ist noch heute die Aeolipile (Fig. 21 und 21a). Der Name kommt bei Heron selbst nicht vor, sondern bei Vitruv I, 6, S. 24 ed. Rose (vgl. auch den lateinisch-deutschen Text in Heron. op. I, S. 490. 491). Vitruvs Vorrichtung weicht von der Heronischen ab. Heron leitet den Wasserdampf aus einem geheizten Kessel durch eine Röhre in die rotirende Kugel, während Vitruv das Wasser in die Kugel selbst thut, wie es irrthümlich Poggendorff, *Gesch. d. Phys.*, S. 16, und Frick-Lehmann, *Physikalische Technik* I, 655 von Heron annehmen. Die Drehung der Heronischen Aeolipile wird durch die Reaction des ausströmenden Dampfes herbeigeführt. Ob auch Vitruvs Aeolipile rotirte, ist sehr zweifelhaft; denn Vitruv spricht nur von einem heftigen Wehen ('vehementem flatum') der Luft, ohne die Drehung ausdrücklich zu erwähnen. Wenngleich Jemand nach dem Zusammenhange vermuthen könnte, dass Vitruv eine solche als selbstverständlich voraussetze, wofern er sich die Kugel als Abbild des nach antiker Vorstellung sich drehenden Himmelsgewölbes gedacht habe, so ist doch sehr wahrscheinlich, dass Vitruvs Vorrichtung auf Herons Figur 20 (ohne den Ball) hinausläuft. Das, was später Ens S. 123, Kircher de arte magnet. III, 2, 4, 2, Mersenne S. 141, Schwenter S. 458, Schott S. 237 u. a. unter Aeolipile verstehen, entspricht auch nicht der Vorstellung von der Aeolipile als Reactionsdampfkugel, sondern beruht auf Vitruv und stimmt im Principe mit Figur 20. Eine solche Vitruvsche

1) Die Versuche des 16. Jahrhunderts kommen wohl kaum in Betracht. In Betreff von Garays Dampfschiff (1543) ist die Ueberlieferung zu unsicher. Und Poggendorff S. 529 bringt auch Garay mit Heron in Verbindung. Cardano (Hieronymi Cardani Mediolanensis medici *de rerum varietate* libri XVII. Basileae 1557), der nach Poggendorff S. 529 die Aeolipile zur Bewegung benutzt haben soll — ich habe die Stelle leider nicht gefunden —, kannte schon Herons Belopoiika, Pneumatik und Automatentheater. Von diesen Werken schreibt er S. 1175: 'Omnia huius autoris (nämlich Herons) opera pulcherrima sunt'. Dieses Lob schränkt Cardano 1560 in der Schrift *de subtilitate* S. 1013 wieder etwas ein: 'cuius (nämlich Vitruvs) aemulus fuit Hero clarissimus inventis, sed parum utilibus'.



Aeolipile ist es auch, welche Branca[1]) verwendet, indem er den Dampfstrahl gegen die Schaufeln eines Rades strömen lässt. Die Maschine des Salomon de Caus, den Arago durchaus zum Erfinder der Dampfmaschine machen will, beruht dagegen auf dem Heronsballe (vgl. Poggendorff S. 447 und Rühlmann S. 396). Als erste Dampfmaschine pflegt die Geschichte der Physik bedingungsweise (Poggendorff S. 531) eine Vorrichtung von Giambattista della Porta zu bezeichnen, ich sage bedingungsweise, sofern es gestattet ist, auch jede primitive Vorrichtung, welche den Dampf zum Principe der Bewegung macht, als Dampfmaschine anzusehen.

Portas Vorrichtung steht nicht im lateinischen Texte seiner Pneumatik, sondern nur in der italienischen Uebersetzung des Escrivano S. 75 in demselben Capitel, in welchem auch Portas Thermoskop (s. oben S. 165) enthalten ist. Seine Absicht ist dabei zu erfahren, in wie viel Luft sich ein Theil Wasser auflöst (per sapere una parte di acqua in quanta di aria si risolve). Wird ein theilweise mit Wasser gefüllter Kolben erhitzt, so steigt der sich entwickelnde Wasserdampf in ein allseitig luftdicht verschlossenes Gefäss mit Wasser und drückt dieses durch eine aufwärts steigende Röhre hinaus.[2]) Nun hat ein Franzose, Namens Ainger (s. Libri IV, 354), behauptet, Portas Vorrichtung sei als eine grosse Vervollkommnung einer Heronischen Maschine anzusehen. Arago, der 1837 über die Geschichte der Dampfmaschinen mehrere Aufsätze veröffentlicht hat (s. Libri IV, 358), weist dies dagegen zurück. Porta rede an der Stelle überhaupt nicht von Heron und habe in keiner Beziehung eine Heronische Vorrichtung verbessern wollen. Wenngleich es nicht zutreffend ist, dass Porta, wie auch Ainger (vgl. oben S. 197) behauptet hatte, Herons Pneumatik übersetzt haben soll, so wissen wir doch zur Genüge, wie sehr Porta durch Heron beeinflusst worden ist. Wir dürfen daher, auch wenn Porta dies nicht ausdrücklich bemerken sollte, annehmen, dass er Heronische Vorrichtungen, die auch nur entfernt zu den seinigen in Beziehung stehen, gekannt hat. Auf eine bestimmte Heronische Vorrichtung beruft sich Ainger anscheinend nicht. Es liegt uns daher die Beantwortung der Frage ob, ob sich bei Heron Analogien zu Portas Dampfapparat finden. Eine eigentliche Dampfvorrichtung zur Hebung von Wasser oder irgend einer Flüssigkeit hat nun zwar Heron nicht, aber immerhin eine Vorrichtung, die Porta sehr wohl Anregung gegeben haben und die er mit

---

1) Man findet die auf die erste Periode der Geschichte der Dampfmaschinen bezüglichen Documente in übersichtlicher Weise bei Libri IV, 327—363 (in Bezug auf Cesariano, Porta, Rivault, Salomon de Caus, Branca) zusammengestellt.

2) Portas Figur ist bei Libri IV, 332 und im Längsschnitte bei Poggendorff, *Gesch. d. Phys.*, S. 530, wiederholt.

einer anderen Heronischen Vorrichtung (Fig. 20) in einen einzigen einfachen Apparat umgewandelt haben könnte. In der Pneum. II, 21, S. 262—265 = S. 211 Th. (Fig. 22) enthalten die Behälter $o\pi$ und $\varkappa\lambda$ Wein, der durch die Hebervorrichtungen $\tau\upsilon$, $\varrho\sigma$ nach aussen geleitet werden soll. Das geschieht durch erhitzte Luft, welche von $\delta$ nach $\varepsilon$, von da nach $\xi$ und $\vartheta$ und hier durch kleine Schlitze in den Rohrwänden in die Weinbehälter geleitet wird. Zuvor soll indessen in die Röhren etwas Wasser gegossen werden. Es scheint danach wohl nicht völlig ausgeschlossen, dass in der Röhre auch etwas Dampf, wenn auch nur in geringer Quantität und mit geringer Spannkraft, sich entwickelte. Porta, dem diese Vorrichtung sicher aus Commandini bekannt war,[1]) konnte, um den Druck auf die Flüssigkeit zu erhöhen, leicht auf den Gedanken kommen, die beiden Heronischen Vorrichtungen mit Weglassung aller Nebendinge derart zu einer einzigen umzugestalten, dass er an das verkürzte Steigrohr ($\eta\vartheta$ bez. $\nu\xi$, Fig. 22) nach Fig. 20 einen Kolben mit Wasser über einem Feuerherde ansetzte. Dazu kommt ein Anklang in der Ausdrucksweise Portas an Heron. Statt zu sagen, dass das (bei Porta) dem Rohre $\varrho\sigma$ entsprechende Ausflussrohr 'fast bis dicht an den Boden reichen' solle, sagt Porta, es solle 'so weit vom Boden abstehen, als zum Durchfluss von Wasser genügt' (un canale tanto lontano dal fondo quanto basti a scorrer l'acqua), wie eben Heron sich fast immer auszudrücken pflegt, s. Heron op. I, S. 41,23. 73,1. 89,8. 93,1. 123,6. 137,27. 165,25. 169,10. 173,5 u. ö. Es ist daher nicht unmöglich, dass Portas Dampfapparat durch Heron beeinflusst ist. Aber Bestimmteres lässt sich nicht ermitteln. Interesse hatte man jedenfalls in der Zeit für die in Fig. 22 dargestellte Vorrichtung. Das beweisen Kircher im Oedip. Aegypt. II, 333 und Schott S. 245, welche beide den Apparat mit unwesentlichen Aenderungen ausführlich wiedergeben.

Einer kritischen Betrachtung ist schliesslich Herons Pneum. II, 16, S. 246—251 = S. 206. 207 Th. von Salomon de Caus nach Schotts Zeugniss S. 56 unterzogen worden. Nach Heron soll ein intermittirender Ausfluss aus $\xi$ (Fig. 23) herbeigeführt werden. Zu dem Zwecke sind drei gebogene Heber im Gefässe $\alpha\beta$ angebracht, $\gamma$ am Boden, $\delta$ in halber Höhe, $\varepsilon$ in ganzer. Nach dem ersten Eingusse fliesst die Flüssigkeit zunächst durch $\gamma$ aus. Unterbricht man den Ausfluss, so bleibt in $\zeta$ so viel Wasser zurück, dass die untere Oeffnung von $\gamma$ geschlossen bleibt, während der Heber sonst mit Luft gefüllt ist. Diese verhindert auch beim zweiten Eingiessen einen Abfluss durch $\gamma$. Es fliesst also die Flüssigkeit nicht eher aus $\alpha\beta$ wieder ab, als bis die Flüssigkeit bis zum Scheitelpunkt von $\delta$

1) Die figürlichen Darstellungen fehlen bei Commandini.



steigt. Aehnlich ist es mit ε. Nun behauptet Salomon de Caus, auch beim zweiten Eingiessen fliesse das Wasser durch γ ab, weil die in γ enthaltene Luft durch das Wasser aus der unteren Oeffnung hinausgedrängt werde. Dieser Behauptung stimmt Schott S. 57 unbedingt zu. Auch de Rochas (1882) hat, anscheinend unabhängig von den erwähnten Vorgängern, S. 168 Einspruch erhoben und eine modificirte Einrichtung vorgeschlagen. Aus wiederholten praktischen Versuchen glauben wir aber entnehmen zu sollen, dass Heron Recht hat, dass also durch die Heber γ und δ nichts ausfliesst, wenn die einen Mündungen im Wasser stehen und im Innern der Heber sich Luft befindet. Dabei ist es gleichgiltig, wie tief der äussere Heberschenkel im Wasser steht. Es scheinen uns danach auch die von de Rochas a. a. O. gegebenen Ansätze mit ihren Folgerungen nicht zutreffend zu sein. Ueberhaupt sieht es bei diesem letzten Beispiel fast so aus, als hätte der moderne Physiker die Sache auf Grund theoretischer Erwägung — de Rochas spricht von 'raisonnement' — behandelt, der antike Physiker dagegen auf Grund des Experimentes. Es wäre also das Verhältniss der Antiken und Modernen einmal umgekehrt, als man gewöhnlich annimmt.

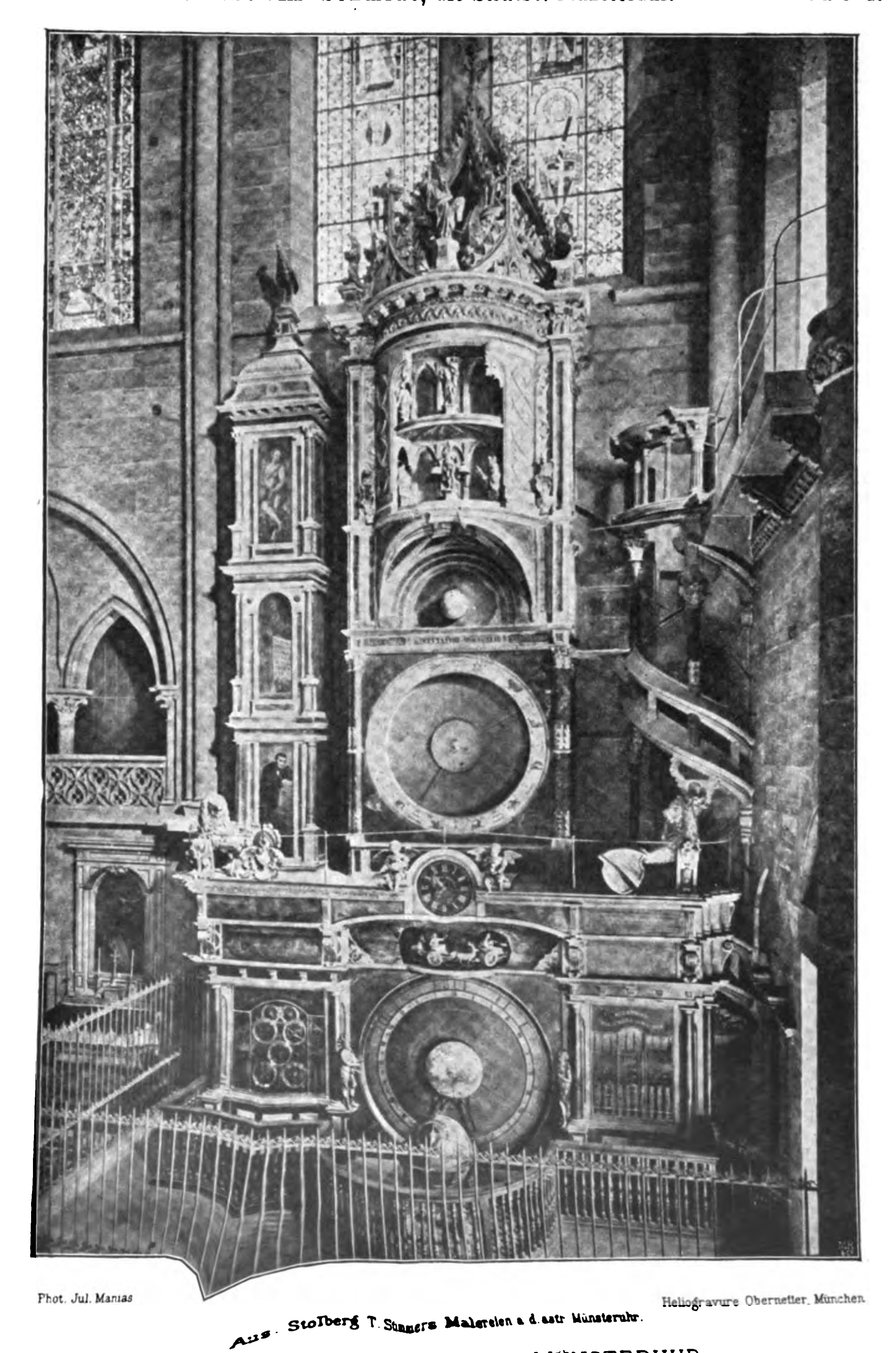
Cantor a. a. O. S. 18 behauptet, ein bei Heron beschriebener intermittirender Brunnen entspreche keineswegs der gleichbenannten Vorrichtung unserer physikalischen Sammlungen. Cantor konnte dies mit vollem Rechte sagen, denn die Vorrichtung, welche er vermuthlich im Sinne hatte (Heron. Pneum. I, 19, S. 102—107 = S. 173f. Th.),[1] ist, so wie er sie in der Pariser Ausgabe vorfand und wie sie in den Handschriften überliefert ist, kein intermittirender Brunnen im heutigen Sinne. Allein der griechische Text ist fehlerhaft, und es bedarf nur einer kleinen Verbesserung, nur der Aenderung eines einzigen Buchstabens, um die Vorrichtung zu einem wirklichen intermittirenden Brunnen zu machen. Denn das sollte er jedenfalls nach Herons Absicht sein. Und Heron ist vermuthlich durch Philon von Byzanz, von dem er sich auch sonst abhängig (s. S. 171) zeigt, dazu angeregt worden. Denn dieser hat unter den wenigen Apparaten seiner Pneumatik nicht weniger als vier, welche im Principe intermittirende Brunnen sind (s. Heron. op. I, 482—489), darunter einen, welcher der Heronischen Vorrichtung ziemlich nahe kommt. Am gefälligsten ist unter ihnen die Lampe mit dem constanten Niveau (Fig. 24). Es sei gestattet, sie zum Schlusse als Anhang anzureihen, da derartige Lampen gerade im 17. Jahrhundert besonderes

1) Sollte Cantor aber Herons Pneum. I, 20, S. 106—111 = S. 174. 175 Th. gemeint haben, so trifft sein Ausspruch auch jetzt noch zu.



Interesse erregten, wie z. B. bei Porta Pneum. S. 54. 55, Ens S. 104, Schott S. 290f. (dieser bezeichnet sie als eine Erfindung des Jesuiten Grünberger), Schwenter S. 448f.[1]) Philons Lampe *ghz* (Fig. 24) wird durch die Zuflussröhren *be*, *cd* aus dem Behälter, der Kugel *a*, mit Oel gespeist. Der Zufluss hört auf, sobald das Oelniveau bis zu der im Innern der Lampe liegenden Mündung *k* der in die Kugel eingelöteten aufsteigenden Röhre *lmn* emporsteigt. Wird der Docht angezündet und Oel verbraucht, so bekommt *k* Luft. Diese dringt in die Kugel und treibt durch ihren Druck so lange wieder Oel aus dem Behälter, bis *k* sich abermals schliesst. Indem sich dies je nach dem Oelverbrauche wiederholt, erhält sich das Niveau constant auf gleicher Höhe.

1) Die von Cardanus *de subtilitate* S. 18f. beschriebene 'lucerna mirabilis' hat eine abweichende Einrichtung.

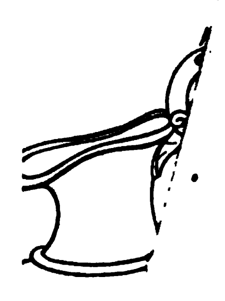


Phot. Jul. Manias

Heliogravure Obernetter. München

Aus . Stolberg T. Stimmers Malereien a. d. astr Münsteruhr.

DIE STRASSBURGER MÜNSTERUHR.



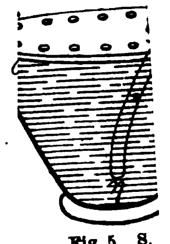
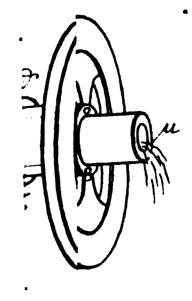
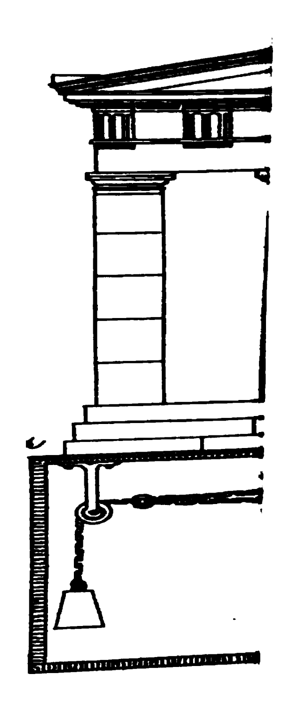


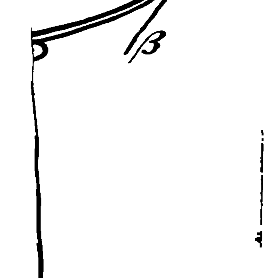
Fig. 5. S.




LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF CALIFORNIA






δ
β


LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF CALIFORNIA

